

EFEKTY BRZEGOWE W RURACH O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

JERZY MOSSAKOWSKI (WARSZAWA)

Rury o przekroju prostokątnym, używane jako elementy konstrukcyjne (pręty kratownic, słupy) pracują zwykle w prostym jednorodnym stanie naprężeń. Stan ten zostaje zaburzony w miejscach połączeń i podparcia. W przedstawionej pracy proponuje się metodę wyznaczania tych dodatkowych efektów występujących na brzegach rur. Podaje się sposób wyznaczania funkcji własnych dla rur o przekroju prostokątnym. Każda z tych funkcji określa w rurze samorzównoważony stan naprężeń zgięciowych i tarczowych. Rozwiązanie przyjmuje się w postaci szeregu nieortogonalnych funkcji własnych. Nieznane współczynniki szeregu wyznacza się stosując zasadę dopełniających prac przygotowanych. Jako przykład podano rozwiązanie dla rur o przekroju kwadratowym. Proponowana metoda daje się uogólnić na dowolne poligonalne przekroje zamknięte, a także na przekroje otwarte.

1. WSTĘP

Rury o przekroju prostokątnym są często stosowanym elementem konstrukcyjnym (słupy, pręty kratownic). Powodem coraz szerszego ich stosowania jest przede wszystkim prosta technologia ich wytwarzania oraz dobre charakterystyki wytrzymałościowe. Rury takie jako elementy konstrukcji pracują zwykle w prostym stanie naprężeń. Stan ten ulega zaburzeniu w miejscach połączeń i podpór. W pracy tej podjęto próbę podania metody pozwalającej na wyznaczenie tych zaburzeń.

Zakładamy, że materiał rury jest izotropowy i podlega prawu Hooke'a. Grubość ścianki h jest jednakowa na wszystkich bokach rury. Przyjęto, że długość rury jest tak duża w porównaniu do jej wymiarów poprzecznych, iż zaburzenia z jednego końca rury nie przekazują się na drugi. Można więc rozpatrywać efekty brzegowe w rurze półnieskończonej. Podzielono rurę na półnieskończone pasma połączone wzdłuż krawędzi. Każde z takich pasm pracuje niezależnie jako tarcza i jako płyta, a wzajemne siły oddziaływań poszczególnych tarcz i płyt przekazują się tylko wzdłuż półnieskończonych krawędzi rury. Założono wreszcie, że stan naprężeń tarczowych nie wpływa na ugięcie elementów zginanych. Jest to równoznaczne z przyjęciem, że równania dla tarczy i płyty nie są ze sobą sprzężone, jak ma to miejsce w równaniach Th. Kármána.

Podstawę wyjściową stanowią więc będą klasyczne równania i związki teorii tarcz i płyt. W przypadku braku obciążeń na obszarze płyty rozwiązanie dla tarczy i dla płyty sprowadza się do wyznaczenia rozwiązania jednorodnego równania biharmonicznego.

$$(1.1) \quad \nabla_z^2 \nabla^2 F(x, z) = 0.$$

Całkę takiego równania dla $0 \leq x \leq a$ i $0 \leq z \leq \infty$ można przedstawić w postaci

$$(1.2) \quad F(x, z) = e^{\lambda_k z} [A \cos x_k + B \sin x_k + C x_k \cos x_k + D x_k \sin x_k],$$

gdzie $x_k = \lambda_k x$ a A, B, C, D są stałymi całkowania. Parametr λ_k jest tu dowolną rzeczywistą lub zespoloną stałą rozdzielenia zmiennych. Wprowadzając na tę stałą ograniczenie

$$(1.3) \quad \operatorname{Re} \lambda_k < 0$$

uzyskamy rozwiązanie o największych wartościach dla $z = 0$ zanikające dla $z \rightarrow \infty$.

Rozwiązanie (1.2) można przedstawić w zapisie macierzowym w sposób następujący:

$$(1.4) \quad F(x, z) = e^{\lambda_k z} \{A; B; C; D\} \cdot C_k(x),$$

gdzie transponowana jednokolumnowa macierz $C_k^T(x)$ ma postać

$$\begin{aligned} \bar{C}_k^T(x) &= \{\cos x_k; \sin x_k; x_k \cos x_k; x_k \sin x_k\} = \{c_k^\alpha(x)\}, \\ x_k &= \lambda_k x, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Różniczkowanie funkcji $F(x, z)$ względem zmiennej z sprowadza się do mnożenia jej przez parametr λ_k . W zapisie macierzowym różniczkowanie względem x sprowadza się do prostych działań na macierzy współczynników:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \lambda_k e^{\lambda_k z} \{B + C; D - A; D; -C\} C_k(x), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \lambda_k^2 e^{\lambda_k z} \{2D - A; -B - 2C; -C; -D\} C_k(x). \end{aligned}$$

Podobnie prosto można wyznaczyć całkę nieoznaczoną względem zmiennej x :

$$(1.6) \quad \int F(x, z) dx = \lambda_k^{-1} e^{\lambda_k z} \{C - B; D + A; -D; C\} C_k(x).$$

We wzorze tym i następnym pominięto dowolną funkcję całkowania zależną tylko od zmiennej z . Wzór (1.6) można wykorzystać dla prostego wyznaczenia w rekurencyjny sposób następującej całki

$$(1.7) \quad \int x^n \{A; B; C; D\} C_k(x) dx = x^n \int \{A; B; C; D\} C_k(x) dx - \int n x^{n-1} [\int \{A; B; C; D\} C_k(x) dx] dx.$$

Wreszcie całka oznaczona w przedziale $(0, a)$ jest równa

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \int_0^a \{A; B; C; D\} C_k(x) dx &= \\ &= \lambda_k^{-1} [\{C - B; D + A; -D; C\} \bar{C}_k(y) - (C - B)], \end{aligned}$$

gdzie

$$C_k^T = \{\cos \gamma_k; \sin \gamma_k; \gamma_k \cos \gamma_k; \gamma_k \sin \gamma_k\}$$

oraz gdzie $\gamma_k = \lambda_k a$.

Dla uproszczenia zapisu wzorów, tam gdzie nie będzie to powodowało niejasności, będzie opuszczony indeks k przy parametrach λ i γ .

2. ROZWIĄZANIE DLA PÓLPASMA PŁYTOWEGO

Jako zadanie pomocnicze podamy rozwiązanie dla półpasma płytowego (rys. 1), na którego półnieskończonych krawędziach dane są następujące warunki brzegowe:

dla $x = 0$

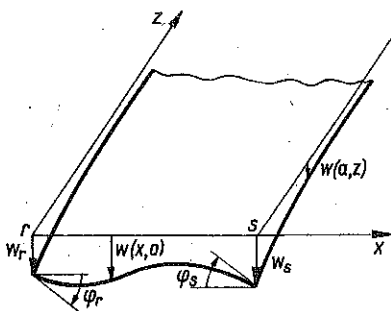
$$(2.1) \quad \begin{aligned} w(0, z) &= w_r \exp \lambda z, \\ \left. \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \varphi_r \exp \lambda z; \end{aligned}$$

dla $x = a$

$$\begin{aligned} w(a, z) &= w_s \exp \lambda z, \\ \left. \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \right|_{x=a} &= \varphi_s \exp \lambda z. \end{aligned}$$

Stałe w_r i w_s są ugięciami naroży półpasma płytowego, a φ_r i φ_s kątami obrotu naroży. Na rysunku 1 pokazano dodatnie zwroty tych ugięć i obrotów. Warunki brzegowe (2.1) są spełnione przez funkcję

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w(x, z) = \frac{1}{2} e^{\lambda z} & \left[w_r \{2; [g(\gamma) + \hat{h}(\gamma)]; [-g(\gamma) - \hat{h}(\gamma)]; [f(\gamma) - \hat{f}(\gamma)]\} + \right. \\ & + w_s \{0; [g(\gamma) - \hat{h}(\gamma)]; [-g(\gamma) + \hat{h}(\gamma)]; [f(\gamma) + \hat{f}(\gamma)]\} + \\ & + \frac{\varphi_r}{\lambda} \{\gamma; [2 - f(\gamma) + \hat{f}(\gamma)]; [f(\gamma) - \hat{f}(\gamma)]; [-h(\gamma) - \hat{g}(\gamma)]\} + \\ & \left. + \frac{\varphi_s}{\lambda} \{0; [f(\gamma) + \hat{f}(\gamma)]; [-f(\gamma) - \hat{f}(\gamma)]; [h(\gamma) - \hat{g}(\gamma)]\} \right] C_k(x). \end{aligned}$$



Rys. 1

Wprowadzone tu funkcje parametru $\gamma = \lambda a$ mają postać

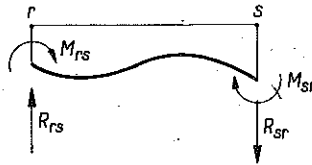
$$(2.3) \quad \begin{aligned} f(\gamma) &= \frac{\sin \gamma}{\gamma + \sin \gamma}, & \hat{f}(\gamma) &= \frac{\sin \gamma}{\gamma - \sin \gamma}, \\ g(\gamma) &= \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma + \sin \gamma}, & \hat{g}(\gamma) &= \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma - \sin \gamma}, \\ h(\gamma) &= \frac{1 + \cos \gamma}{\gamma + \sin \gamma}, & \hat{h}(\gamma) &= \frac{1 + \cos \gamma}{\gamma - \sin \gamma}. \end{aligned}$$

Wprowadzone powyżej pomocnicze funkcje parametru γ nie są niezależne. Łączą je związki wynikające z ich szczególnej budowy oraz własności funkcji trygonometrycznych, np.:

$$\begin{aligned} g(\gamma) h(\gamma) &= [f(\gamma)]^2; & g(\gamma) \hat{h}(\gamma) &= \hat{g}(\gamma) h(\gamma) = f(\gamma) \hat{f}(\gamma), \\ \hat{h}(\gamma) - h(\gamma) &= 2h(\gamma) \hat{f}(\gamma) = 2\hat{h}(\gamma) f(\gamma). \end{aligned}$$

Wykorzystanie tych wzorów może być celowe przy niektórych przekształceniach.

Ze wzoru (2.2.) przez proste różniczkowanie i wykorzystując (1.5) można wyznaczyć siły i momenty w dowolnym punkcie półpasma płytowego, a także na krawędziach $x = 0$ i $x = a$. Przyjęte dodatnie kierunki sił i momentów działających na krawędziach pokazano na rysunku 2.



Rys. 2

Ze względu na dalsze zastosowania rozpatrzmy przypadek, gdy wymuszone ugięcia płyty na krawędziach są symetryczne. Zachodzi wtedy $w_s = w_r$ oraz $\varphi_s = -\varphi_r$. Ugięcie półpasma da się wtedy opisać wzorem

$$(2.4) \quad w(x, z) = e^{z^2} \left[w_r \{1; g(\gamma); -g(\gamma); f(\gamma)\} + \frac{\varphi_r}{\lambda} \{0; 1 - f(\gamma); f(\gamma); -h(\gamma)\} \right] C_k(x).$$

Momenty zginające i zastępcze siły tnące na krawędziach będą równe: dla $x = 0$

$$(2.5) \quad M_{rs} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]_{x=0} =$$

$$(2.5) \quad R_{rs} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} \right]_{x=a} = -2D\lambda^2 e^{\lambda z} \left\{ w_r \left[f(\gamma) - \frac{1-\nu}{2} \right] - \frac{\varphi_r}{\lambda} [h(\gamma)] \right\};$$

$$= -2D\lambda^3 e^{\lambda z} \left\{ w_r [g(\gamma)] - \frac{\varphi_r}{\lambda} \left[f(\gamma) - \frac{1-\nu}{2} \right] \right\};$$

dla $x = a$

$$(2.6) \quad M_{sr} = D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]_{x=a} = -M_{rs};$$

$$R_{sr} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} \right]_{x=0} = -R_{rs};$$

gdzie

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

We wzorach powyższych pierwszy indeks oznacza krawędź, na której występuje siła lub moment, indeks drugi zaś pokazuje kierunek, w którym rozciąga się półpasmo.

Dla przypadku, gdy ugięcie płyty jest antysymetryczne, a więc gdy zachodzi $w_s = -w_r$ i $\varphi_s = \varphi_r$ mamy

$$(2.7) \quad w(x, z) = e^{\lambda z} \left[w_r \{1; \hat{h}(\gamma); -\hat{h}(\gamma); -\hat{f}(\gamma)\} + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_r}{\lambda} \{0; 1 + \hat{f}(\gamma); -\hat{f}(\gamma); -\hat{g}(\gamma)\} \right] C_k(x).$$

Momenty zginające i zastępcze siły tnące na krawędziach dane są związkami

$$(2.8) \quad M_{rs} = 2D\lambda^2 e^{\lambda z} \left\{ w_r \left[\hat{f}(\gamma) + \frac{1-\nu}{2} \right] + \frac{\varphi_r}{\lambda} [\hat{g}(\gamma)] \right\} = M_{sr},$$

$$R_{rs} = -2D\lambda^3 e^{\lambda z} \left\{ w_r [\hat{h}(\gamma)] + \frac{\varphi_r}{\lambda} \left[\hat{f}(\gamma) + \frac{1-\nu}{2} \right] \right\} = R_{sr}.$$

3. ROZWIĄZANIE DLA PÓLPASMA TARCZOWEGO

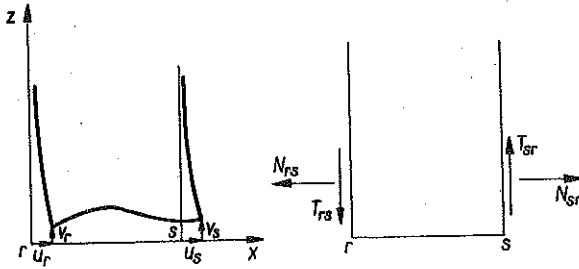
Rozważmy półpasmo tarczowe o szerokości a i grubości h (rys. 3). Załóżmy, że dla $x = 0$ i $x = a$ rozwiązanie ma spełniać warunki brzegowe:

dla $x = 0$

$$(3.1) \quad u(0, z) = u_r \exp \lambda z, \quad v(0, z) = v_r \exp \lambda z;$$

dla $x = a$

$$u(a, z) = u_s \exp \lambda z, \quad v(a, z) = v_s \exp \lambda z.$$



Rys. 3

Stałe u_r, u_s, v_r, v_s są tu przemieszczeniami naroży tarczy. Warunki te są spełnione przez funkcje

$$\begin{aligned}
 u(x, z) = & \frac{1+v}{2} e^{2z} \left[u_r \left\{ \frac{2}{1+v}; \frac{3-v}{1+v} [-p(\gamma) + \hat{n}(\gamma)]; [p(\gamma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \hat{n}(\gamma)]; [m(\gamma) + \hat{m}(\gamma)] \right\} + u_s \left\{ 0; \frac{3-v}{1+v} [p(\gamma) + \hat{n}(\gamma)]; [-p(\gamma) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \hat{n}(\gamma)]; [-m(\gamma) + \hat{m}(\gamma)] \right\} + v_r \left\{ 0; -\frac{2}{1+v} + \frac{3-v}{1+v} [m(\gamma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \hat{m}(\gamma)]; [-m(\gamma) - \hat{m}(\gamma)]; [-n(\gamma) + \hat{p}(\gamma)] \right\} + v_s \left\{ 0; \frac{3-v}{1+v} \times \right. \\
 & \left. \left. \times [m(\gamma) - \hat{m}(\gamma)]; [-m(\gamma) + \hat{m}(\gamma)]; [-n(\gamma) - \hat{p}(\gamma)] \right\} \right] C_k(x); \\
 (3.2) \quad v(x, z) = & \frac{1+v}{2} e^{2z} \left[u_r \left\{ 0; \frac{2}{1+v} - \frac{3-v}{1+v} [m(\gamma) + \hat{m}(\gamma)]; [-m(\gamma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \hat{m}(\gamma)]; [p(\gamma) - \hat{n}(\gamma)] \right\} + u_s \left\{ 0; \frac{3-v}{1+v} [m(\gamma) - \hat{m}(\gamma)]; [m(\gamma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \hat{m}(\gamma)]; [-p(\gamma) - \hat{n}(\gamma)] \right\} + v_r \left\{ \frac{2}{1+v}; \frac{3-v}{1+v} [n(\gamma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \hat{p}(\gamma)]; [n(\gamma) - \hat{p}(\gamma)]; [-m(\gamma) - \hat{m}(\gamma)] \right\} + v_s \left\{ 0; \frac{3-v}{1+v} \times \right. \\
 & \left. \left. \times [n(\gamma) + \hat{p}(\gamma)]; [n(\gamma) + \hat{p}(\gamma)]; [-m(\gamma) + \hat{m}(\gamma)] \right\} \right] C_k(x).
 \end{aligned}$$

Funkcje parametru γ wprowadzone we wzorach (2.3) mają postać:

$$m(\gamma) = \frac{\sin \gamma}{(3-v) \sin \gamma - (1+v) \gamma}, \quad \hat{m}(\gamma) = \frac{\sin \gamma}{(3-v) \sin \gamma + (1+v) \gamma},$$

$$(3.3) \quad n(\gamma) = \frac{1 - \cos \gamma}{(3 - \nu) \sin \gamma - (1 + \nu) \gamma}, \quad \hat{n}(\gamma) = \frac{1 - \cos \gamma}{(3 - \nu) \sin \gamma + (1 + \nu) \gamma},$$

$$p(\gamma) = \frac{1 + \cos \gamma}{(3 - \nu) \sin \gamma - (1 + \nu) \gamma}, \quad \hat{p}(\gamma) = \frac{1 + \cos \gamma}{(3 - \nu) \sin \gamma + (1 + \nu) \gamma},$$

Funkcje podane w (3.3) nie są niezależne i można dla nich wyprowadzić podobne związki, jak dla funkcji występujących w rozwiązaniu dla płyty. Znajomość rozwiązania (3.2) pozwala wyznaczyć w dowolnym punkcie tarczy naprężenia i siły. Nie będziemy zajmować się przypadkiem ogólnym lecz podamy rozwiązania dla przypadków, gdy przemieszczenia są symetryczne lub antysymetryczne względem osi symetrii tarczy $x = a/2$.

Dla przypadku symetrii przemieszczeń, a więc gdy $u_s = -u_r$, $v_s = v_r$, otrzymamy

$$(3.4) \quad u(x, z) = (1 + \nu) e^{z^2} \left[u_r \left\{ \frac{1}{1 + \nu}; -\frac{3 - \nu}{1 + \nu} p(\gamma); p(\gamma); m(\gamma) \right\} + \right. \\ \left. + v_r \left\{ 0; \frac{-1}{1 + \nu} + \frac{3 - \nu}{1 + \nu} m(\gamma); -m(\gamma); -n(\gamma) \right\} \right] C_k(x),$$

$$v(x, z) = (1 + \nu) e^{z^2} \left[u_r \left\{ 0; \frac{1}{1 + \nu} - \frac{3 - \nu}{1 + \nu} m(\gamma); -m(\gamma); p(\gamma) \right\} + \right. \\ \left. + v_r \left\{ \frac{1}{1 + \nu}; \frac{3 - \nu}{1 + \nu} n(\gamma); n(\gamma); -m(\gamma) \right\} \right] C_k(x).$$

Na półnieskończonych krawędziach tarczy występują siły normalne i ścinające. Ich dodatnie kierunki zaznaczono na rysunku 3. Przyjmując one wartości:

$$(3.5) \quad N_{rs} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right]_{x=0} = \\ = 2K\lambda e^{z^2} \left\{ u_r [-p(\gamma)] + v_r \left[m(\gamma) - \frac{1}{2} \right] \right\} = N_{sr},$$

$$T_{rs} = \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=0} = \\ = 2K\lambda e^{z^2} \left\{ \frac{1}{2} - m(\gamma) \right\} + v_r [n(\gamma)] = -T_{sr},$$

gdzie $K = Eh/1 + \nu$.

Dla przypadku, gdy wymuszone przemieszczenia tarczy są antysymetryczne, a więc gdy $u_s = u_r$ i $v_s = -v_r$, to

$$(3.6) \quad u(x, z) = (1 + \nu) e^{z^2} \left[u_r \left\{ \frac{1}{1 + \nu}; \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \hat{n}(\gamma); -\hat{n}(\gamma); \hat{m}(\gamma) \right\} + \right.$$

$$(3.6) \quad v(x, z) = (1+v) e^{iz} \left[u_r \left\{ 0; \frac{1}{1+v} - \frac{3-v}{1+v} \hat{m}(\gamma); -\hat{m}(\gamma); -\hat{n}(\gamma) \right\} + \right. \\ \left. + v_r \left\{ 0; \frac{-1}{1+v} + \frac{3-v}{1+v} \hat{m}(\gamma); -\hat{m}(\gamma); \hat{p}(\gamma) \right\} \right] C_k(x) + \\ + v_r \left\{ \frac{1}{1+v}; -\frac{3-v}{1+v} \hat{p}(\gamma); -\hat{p}(\gamma); -\hat{m}(\gamma) \right\} C_k(x).$$

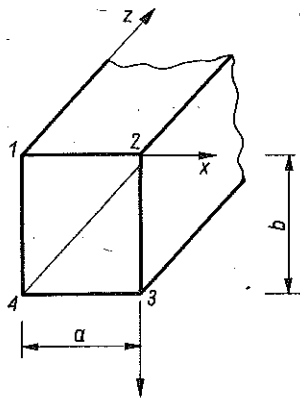
Siły na półnieskończonych krawędziach tarczy przy antysymetrycznym stanie przemieszczeń będą odpowiednio równe:

$$(3.7) \quad N_{rs} = 2K\lambda e^{iz} \left\{ u_r [\hat{n}(\gamma)] + v_r \left[\hat{m}(\gamma) - \frac{1}{2} \right] \right\} = -N_{sr}, \\ T_{rs} = -2K\lambda e^{iz} \left\{ u_r \left[\hat{m}(\gamma) - \frac{1}{2} \right] + v_r [\hat{p}(\gamma)] \right\} = T_{sr}.$$

Dla dowolnych przemieszczeń naroży ogólne wzory na siły krawędziowe można wyprowadzić z (3.2) przez różniczkowanie.

4. PÓLNIESKOŃCZONA RURA O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

Wyprowadzone uprzednio związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami półnieskończonych krawędzi tarcz i płyt wykorzystamy dla zbudowania układu rozwiązań własnych dla półnieskończonej rury. Niech h będzie grubością ścianki rury oraz $a_1 = a + h$, $b_1 = b + h$ jej zewnętrznymi wymiarami (rys. 4).



Rys. 4

Podzielmy rurę wzdłuż krawędzi na półnieskończone pasma. Każde z pasm będziemy traktować niezależnie jako tarczę i jako płytę. Zakładamy także, że kąty proste przekroju po odkształceniu nie ulegną zmianie. Przekrój prostokątny ma dwie osie symetrii $x = a/2$ i $y = b/2$. Dowolne wymuszone przemieszczenia naroży przekroju możemy więc rozłożyć na przemieszczenia

symetryczne i antysymetryczne. Zajmijmy się przypadkiem, gdy wszystkie przemieszczenia naroży są symetryczne. W takim przypadku możemy ograniczyć się do rozważania pasm $1 \div 2$ i $2 \div 3$. Nadajmy krawędzi 2 przemieszczenia $U \exp \lambda z$, $V \exp \lambda z$, $W \exp \lambda z$ i obrót $\Phi \exp \lambda z$. Przyjęte kierunki tych przemieszczeń pokazano na rysunku 5. Po wykorzystaniu symetrii możemy wyznaczyć odpowiednio przemieszczenia i obroty krawędzi dla poszczególnych tarcz i płyt. Tak więc

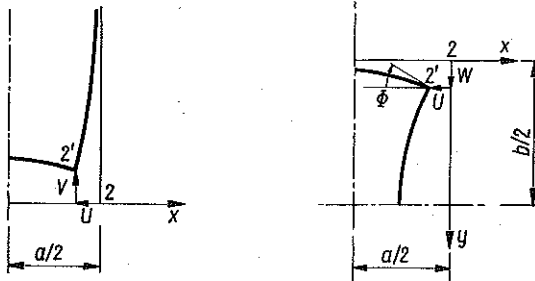
dla pasma $1 \div 2$

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_1 &= -u_2 = U, & v_1 &= v_2 = V, \\ w_1 &= w_2 = W, & -\varphi_1 &= \varphi_2 = \Phi, \end{aligned}$$

dla pasma $2 \div 3$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u_2 &= -u_3 = W, & v_2 &= v_3 = V, \\ w_2 &= w_3 = U, & \varphi_2 &= -\varphi_3 = \Phi. \end{aligned}$$

Tak wymuszonym przemieszczeniem odpowiadają na krawędziach płyt i tarcz siły, które określimy ze wzorów (2.5), (2.6) i (3.5).



Rys. 5

Pasmo $1 \div 2$: siły i moment na krawędzi 2 ($r = 1$; $s = 2$)

$$(4.3) \quad \begin{aligned} M_{21} &= 2D\lambda^2 e^{\lambda z} \left\{ W \left[f(\gamma) - \frac{1-\nu}{2} \right] + \frac{\Phi}{\lambda} [h(\gamma)] \right\}, \\ R_{21} &= 2D\lambda^3 e^{\lambda z} \left\{ W [g(\gamma)] + \frac{\Phi}{\lambda} \left[f(\gamma) - \frac{1-\nu}{2} \right] \right\}, \\ N_{21} &= 2K\lambda e^{\lambda z} \left\{ -U [p(\gamma)] + V \left[m(\gamma) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \\ T_{21} &= 2K\lambda e^{\lambda z} \left\{ -U \left[\frac{1}{2} - m(\gamma) \right] - V [n(\gamma)] \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma = \lambda a.$$

Pasmo $2 \div 3$: siły i moment na krawędzi 2 ($r = 2$; $s = 3$)

$$\begin{aligned}
 M_{23} &= -2D\lambda^2 e^{\lambda z} \left\{ U \left[f(\varepsilon) - \frac{1-\nu}{2} \right] - \frac{\Phi}{\lambda} [h(\varepsilon)] \right\}, \\
 R_{23} &= -2D\lambda^3 e^{\lambda z} \left\{ U [g(\varepsilon)] - \frac{\Phi}{\lambda} \left[f(\varepsilon) - \frac{1-\nu}{2} \right] \right\}, \\
 N_{23} &= 2K\lambda e^{\lambda z} \left\{ -W [p(\varepsilon)] + V \left[m(\varepsilon) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \\
 T_{23} &= 2K\lambda e^{\lambda z} \left\{ -W \left[m(\varepsilon) - \frac{1}{2} \right] + V [n(\varepsilon)] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

gdzie

$$\varepsilon = \lambda b = \gamma b/a.$$

Na krawędzi 2 momenty i siły z pasm $1 \div 2$ i $2 \div 3$ muszą spełniać warunki równowagi:

$$\begin{aligned}
 R_{21} - N_{23} &= 0, & -N_{21} - R_{23} &= 0, \\
 T_{23} - T_{21} &= 0, & M_{23} + M_{21} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Po uwzględnieniu związków (4.3) i (4.4) w równaniach (4.5) otrzymamy układ czterech jednorodnych równań, w którym niewiadomymi będą U, V, W i Φ/λ . Układ ten będzie miał niezerowe rozwiązania dla każdego z , gdy będą istniały różne od zera rozwiązania układu równań

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix}
 [\omega^2 g(\gamma) + p(\varepsilon)], & 0, & \left[\frac{1}{2} - m(\varepsilon) \right], & \omega^2 \left[f(\gamma) - \frac{1-\nu}{2} \right] \\
 0, & [\omega^2 g(\varepsilon) + p(\gamma)], & \left[\frac{1}{2} - m(\gamma) \right], & -\omega^2 \left[f(\varepsilon) - \frac{1-\nu}{2} \right] \\
 \left[\frac{1}{2} - m(\varepsilon) \right], & \left[\frac{1}{2} - m(\gamma) \right], & [n(\gamma) + n(\varepsilon)], & 0 \\
 \left[f(\gamma) - \frac{1-\nu}{2} \right], & -\left[f(\varepsilon) - \frac{1-\nu}{2} \right], & 0, & [h(\gamma) + h(\varepsilon)]
 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \left\{ W, U, V, \frac{\Phi}{\lambda} \right\}^T = \{0\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$\omega^2 = \frac{D}{K} \lambda^2 = \frac{h^2 \lambda^2}{12(1-\nu)} = \frac{1}{12(1-\nu)} \frac{h^2}{a^2} \gamma^2.$$

Pomnożenie ostatniego z równań przez ω^2 doprowadziłoby macierz do pełnej symetrii względem głównej przekątnej. Należy w tym miejscu zauważyć, że metoda otrzymania układu równań (4.6) jest bardzo podobna do znanej w mechanice budowli metody odkształceń w zastosowaniu do wyznaczania drgań własnych lub sił krytycznych w układach ramowych.

Układ równań (4.6) będzie miał niezerowe rozwiązania, gdy jego główny wyznacznik będzie równy zeru:

$$(4.7) \quad \Delta(\gamma) = 0.$$

Z warunku tego otrzymamy nieskończony ciąg, na ogół zespolonych, wartości własnych

$$(4.8) \quad \gamma_k = \lambda_k a = \pm \alpha_k \pm i\beta_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Zgodnie z założeniem (1.3) możemy stosować tylko te wartości własne, których część rzeczywista jest ujemna. Zakładając, że dla danego γ_k (np. niewiadoma $W_k = 1$), możemy z układu równań (4.6) wyznaczyć pozostałe niewiadome— U_k , V_k , Φ_k/λ_k . Wartości liczbowe tych niewiadomych podstawiamy do równań (4.1) i (4.2) i wyznaczamy przemieszczenia naroży pasm $1 \div 2$ i $2 \div 3$. Możemy teraz przystąpić do wyznaczenia rozwiązań własnych dla poszczególnych pasm, na które podzieliliśmy rurę. I tak dla pasma $1 \div 2$ ze wzoru (4.1) mamy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} u_1^{(k)} &= U_k, & v_1^{(k)} &= V_k, \\ w_1^{(k)} &= W_k, & \frac{\varphi_1^{(k)}}{\lambda_k} &= -\frac{\Phi_k}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Podstawmy $w_1^{(k)}$ i $\varphi_1^{(k)}/\lambda_k$ do wzoru na ugięcie płyty (2.4) i pomnóżmy je przez odpowiednie macierze współczynników. Macierze te są także macierzami liczbowymi, ponieważ dla każdego γ_k można wyznaczyć liczbowe wartości ich elementów.

Po wykonaniu mnożenia możemy zsumować macierze współczynników i wyrażenie na ugięcie doprowadzić do postaci

$$(4.10) \quad w_k(x, z) = e^{\lambda_k z} \{S_k^1; S_k^2; S_k^3; S_k^4\} C_k(\lambda_k x),$$

gdzie elementy macierzy współczynników S_k^j ($j = 1, 2, 3, 4$) wynoszą

$$(4.11) \quad \begin{aligned} S_k^1(\gamma_k) &= w_1^{(k)} = W_k, \\ S_k^2(\gamma_k) &= w_1^{(k)} g(\gamma_k) - \frac{\varphi_1^{(k)}}{\lambda_k} [1 - f(\gamma_k)] = W_k g(\gamma_k) - \frac{\Phi_k}{\lambda_k} [1 - f(\gamma_k)], \\ S_k^3(\gamma_k) &= -w_1^{(k)} g(\gamma_k) + \frac{\varphi_1^{(k)}}{\lambda_k} f(\gamma_k) = -W_k g(\gamma_k) + \frac{\Phi_k}{\lambda_k} f(\gamma_k), \\ S_k^4(\gamma_k) &= w_1^{(k)} f(\gamma_k) - \frac{\varphi_1^{(k)}}{\lambda_k} h(\gamma_k) = W_k f(\gamma_k) + \frac{\Phi_k}{\lambda_k} h(\gamma_k). \end{aligned}$$

Podobnie postawiając $u_1^{(k)}$ i $v_1^{(k)}$ z (4.9) do (3.4) i sumując macierze współczynników, otrzymamy wzory na przemieszczenia w tarczy $1 \div 2$

$$(4.12) \quad \begin{aligned} u_k(x, z) &= e^{\lambda_k z} \{A_k^1; A_k^2; A_k^3; A_k^4\} C_k(\lambda_k x), \\ v_k(x, z) &= e^{\lambda_k z} \left\{ -A_k^2 - \frac{3-v}{1+v} A_k^3; A_k^1 - \frac{3-v}{1+v} A_k^4; -A_k^4; A_k^3 \right\} C_k(\lambda_k x), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.13) \quad \begin{aligned} A_k^1(\gamma_k) &= u_1^{(k)} = U_k, \\ A_k^2(\gamma_k) &= -U_k [(3-\nu) p(\gamma_k)] + V_k [-1 + (3-\nu) m(\gamma_k)], \\ A_k^3(\gamma_k) &= U_k [(1+\nu) p(\gamma_k)] - V_k [(1+\nu) m(\gamma_k)], \\ A_k^4(\gamma_k) &= U_k [(1+\nu) m(\gamma_k)] - V_k [(1+\nu) n(\gamma_k)]. \end{aligned}$$

Dla pasma $2 \div 3$ ze wzoru (4.2) wyznaczmy

$$(4.14) \quad \begin{aligned} u_2^{(k)} &= W_k, & v_2^{(k)} &= V_k, \\ w_2^{(k)} &= U_k, & \frac{\varphi_2^{(k)}}{\lambda_k} &= \frac{\Phi_k}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Postępując podobnie jak w przypadku pasma $1 \div 2$ ugięcie płyty przedstawimy wzorem

$$(4.15) \quad w_k(y, z) = e^{\lambda_k z} \{S_k^1; S_k^2; S_k^3; S_k^4\} C_k(\lambda_k y).$$

Pasma $2 \div 3$ ma szerokość b , a więc funkcje wchodzące w skład elementów macierzy będą funkcjami parametru $\varepsilon_k = \lambda_k b = \gamma_k b/a$. Tak więc

$$\begin{aligned} S_k^1(\varepsilon_k) &= w_2^{(k)} = U_k, \\ S_k^2(\varepsilon_k) &= U_k g(\varepsilon_k) + \frac{\Phi_k}{\lambda_k} [1 - f(\varepsilon_k)], \\ S_k^3(\varepsilon_k) &= \dots \end{aligned}$$

W analogiczny sposób wyznaczamy przemieszczenia $u_k(y, z)$ i $v_k(y, z)$. Przy rozpatrywaniu najbardziej ogólnego przypadku wymuszonych odkształceń naroży rury prostokątnej tok postępowania jest identyczny. Należy wtedy odpowiednio korzystać ze wzorów (2.2) i (3.2) dla wyznaczania ugięć i przemieszczeń naroży każdego z pasm.

Zgodność przemieszczeń na krawędziach pasm oraz spełnienie warunków równowagi pozwala traktować rurę jako jeden spójny element. Powierzchnie boczne rury są nieobciążone. Na brzegu $z = 0$ działa układ sił i momentów, który możemy uważać za zewnętrzny układ obciążeń wymuszający wyznaczony powyżej stan przemieszczeń i ugięć. Układ tych obciążeń jest samorzównoważony. Dla całego przekroju wypadkowy wektor momentu i wypadkowy wektor sił są równe zeru. Każdej wartości własnej γ_k przyporządkowane jest rozwiązanie własne. Funkcje opisujące to rozwiązanie są w ogólnym przypadku zespolonymi funkcjami zmiennych rzeczywistych x i z . Funkcje własne nie są ortogonalne, co stanowi niewątpliwie pewne utrudnienie w ich stosowaniu.

Omówiono powyżej przypadek, gdy osie symetrii przekroju $x = a/2$ i $y = b/2$ były jednocześnie osiami symetrii dla wymuszonych przemieszczeń. W podobny sposób można wyznaczyć wartości własne i rozwiązania własne, gdy jedna z osi przekroju jest osią symetrii wymuszonych przemieszczeń, druga

zaś jest osią antysymetrii. Rozwiązanie takiego przypadku będzie konieczne, gdy będziemy chcieli wyznaczyć efekty brzegowe w rurze o przekroju prostokątnym poddanej zginaniu.

5. WARUNKI BRZEGOWE

Rozwiązania własne otrzymane za pomocą zaproponowanej powyżej metody nie mogą spełnić ściśle dowolnych warunków brzegowych na brzegu $z = 0$. Dla spełnienia takich warunków należy zastosować jedną z metod przybliżonych. Wydaje się, że najlepsza będzie tu metoda uzupełniających prac przygotowanych [1]. Przy pominięciu sił masowych ma ona postać:

$$(5.1) \quad \int_V \varepsilon_{ij} \sigma'_{ij} dV - \int_S u_i^* t'_i dS = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

gdzie $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, symbol u_i oznacza rzeczywiste przemieszczenia, u_i^* przemieszczenia na brzegu ciała, σ'_{ij} stan naprężeń przygotowanych spełniających warunki równowagi oraz warunki brzegowe, $t'_i = \sigma'_{ij} n_j$ naprężenia na powierzchni brzegowej S oraz V obszar zajmowany przez ciało.

Po uwzględnieniu w (5.1) związków teorii tarcz i płyt oraz wykonaniu całkowania po grubości dla każdego z pasm otrzymamy:

$$(5.2) \quad \sum_j [L_p^j(w; w') + L_t^j(u, v; u', v')] = \sum_j [Z_p^j(w^*; w') + Z_t^j(u^*, v^*; u', v')],$$

gdzie suma względem j odnosi się do wszystkich pasm, z jakich składa się rura, operatory zaś występujące pod znakiem sumy są następujące:

$$(5.3) \quad L_p^j(w; w') = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^\infty dz \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right] - \right. \\ \left. - (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} \right\} dx,$$

$$(5.4) \quad L_t^j(u, v; u', v') = \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^\infty dz \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right] - \right. \\ \left. - (1-\nu) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} \right] + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right] \right\} dx.$$

$$(5.5) \quad Z_p^j(w^*, w') = \int_0^a [w^*(x) R'_z(x, 0) + \varphi_z^*(x) M'_{zz}(x, 0)] dx + \\ + w_r^* \cdot R'_r + w_s^* \cdot R'_s,$$

$$(5.6) \quad Z_t^j(u^*, v^*; u', v') = \int_0^a [u^*(x) N'_{xz}(x, 0) + v^*(x) N'_{zz}(x, 0)] dx.$$

We wzorach powyższych u, v, w oznaczają przemieszczenia j -tej tarczy i ugięcia płyty, u^*, v^*, w^* i φ_z^* wartości brzegowe, jakie spełnia roz-

wiązanie (φ_z^* jest kątem obrotu płyty w_r^* i w_s^* przemieszczeniami naroży płyty). Wielkości ze znakami «prim» odnoszą się do wirtualnych przemieszczeń i związanego z nim układu sił i momentów działających na brzegu $z = 0$. Tak więc N'_{zz} oznacza siłę normalną, N'_{zx} się ścinającą, R'_z zastępczą siłę tnącą oraz M'_{zz} moment zginający. Siły działające w narożach płyty są tu równe nie podwójnym momentom skręcającym, lecz pojedynczym:

$$R'_r = M'_{xz}(\theta, 0) \quad \text{oraz} \quad R'_s = M'_{xz}(a, 0).$$

Przyjmijmy przybliżone rozwiązanie w postaci

$$(5.7) \quad \begin{Bmatrix} w \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n X_k \begin{Bmatrix} w_k \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

gdzie przez w_k , u_k , v_k oznaczyliśmy przemieszczenia k -tego rozwiązania własnego dla rury, X_k zaś są nieznanymi współczynnikami liczbowymi. Rozwiązanie to ma przyjmować na brzegu rury wartości $u^*(x)$, $v^*(x)$, $w^*(x)$, $\varphi_z^*(x)$.

Jako rozwiązanie wirtualne przyjmiemy ciąg rozwiązań sprzężonych do rozwiązań własnych:

$$(5.8) \quad \begin{Bmatrix} w' \\ u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_l \\ \bar{u}_l \\ \bar{v}_l \end{Bmatrix} \quad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Po podstawieniu tak przyjętego stanu wirtualnego do (5.2), otrzymamy układ równań

$$(5.9) \quad \sum_{k=1}^n X_k \delta_{kl} = \delta_{l0} \quad (l = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie

$$(5.10) \quad \delta_{kl}(\gamma_k, \bar{\gamma}_k) = \sum_j [L_p^j(w_k, \bar{w}_l) + L_t^j(u_k, v_k; \bar{u}_l, \bar{v}_l)],$$

$$(5.11) \quad \delta_{l0}(\bar{\gamma}_l) = \sum_j [Z_p^j(w^*; \bar{w}_l) + Z_t^j(u^*, v^*; \bar{u}_l; \bar{v}_l)].$$

Sumowanie względem j przebiega po kolejnych półpasmach.

Wartości liczbowe występujących tu całek wyznaczamy z (5.3)-(5.6). Przeprowadzenie każdorazowo różniczkowania pod znakami całki i następnie całkowania celem wyznaczenia wartości δ_{kl} byłoby bardzo pracochłonne. Ze względu na przyjęty zapis rozwiązań (4.10) i (4.12) operacje te można przeprowadzić w ogólnej postaci.

Sposób wyznaczenia tych całek omówimy na przykładzie j -tej płyty. Po wykonaniu operacji różniczkowania pod znakiem całki we wzorze (5.3) otrzymamy

$$(5.12) \quad L_p^j(w_k; \bar{w}_l) = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_{\beta=1}^4 B_k^\alpha \bar{B}_l^\beta \int_0^\infty e^{i(\lambda_k + \bar{\lambda}_l)z} dz \int_0^a c_k^\alpha(x) \bar{c}_l^\beta(x) dx.$$

gdzie B_k^α , B_l^β są liniowymi kombinacjami współczynników S_k^α , S_l^β ; $c_k^\alpha(x)$, $c_l^\beta(x)$ kolejnymi elementami macierzy $C_k(x)$, $\bar{C}_l(x)$, a zaś jest szerokością j -tej tarczy.

Po wykonaniu całkowania względem zmiennej z otrzymamy

$$\int_0^{\infty} e^{(\lambda_k + \bar{\lambda}_l)z} dz = -\frac{1}{\lambda_k + \bar{\lambda}_l}.$$

Wykonanie całkowania względem zmiennej x daje nam macierz całek. Przykładowo podamy tu jeden z elementów tej macierzy:

$$\begin{aligned} \int_0^a c_k^2(x) \overline{c_l^1(x)} dx &= \int_0^a \sin \lambda_k x \cos \bar{\lambda}_l x dx = \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{1 - \cos(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)}{\gamma_k - \bar{\gamma}_l} + \frac{1 - \cos(\gamma_k + \bar{\gamma}_l)}{\gamma_k + \bar{\gamma}_l} \right], \quad \gamma_k = \lambda_k a. \end{aligned}$$

Jak widać w wyniku całkowania otrzymaliśmy wyrażenia, w których występują funkcje trygonometryczne argumentów γ_k i $\bar{\gamma}_l$. Funkcje trygonometryczne tych samych argumentów występują także we wzorach na S_k^α i S_l^β wyznaczonych ze wzorów (4.11). Po wykonaniu w (5.12) sumowania po α i β oraz pracochłonnych, lecz elementarnych przekształceń, wynikających z własności funkcji trygonometrycznych otrzymamy dla j -tej płyty:

$$\begin{aligned} (5.13) \quad L_p^j(w_k; \bar{w}_l) &= L_p^j(\gamma_k, \bar{\gamma}_l) = -\frac{Eh}{6(1+\nu)} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \cdot \frac{\gamma_k^2 \bar{\gamma}_l^2}{\gamma_k + \bar{\gamma}_l} \times \\ &\times \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{-1}{\gamma_k + \bar{\gamma}_l} [S_k^3 \bar{S}_l^4 + S_k^4 \bar{S}_l^3] - \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\gamma_k - \bar{\gamma}_l} [S_k^3 \bar{S}_l^4 - S_k^4 \bar{S}_l^3] + \right. \\ &\quad + \frac{2}{\gamma_k - \bar{\gamma}_l} [S_k^5 \bar{S}_l^6 - S_k^6 \bar{S}_l^5] - \frac{2\gamma_k}{(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)^2} [S_k^3 \bar{S}_l^6 + S_k^4 \bar{S}_l^5] - \\ &\quad \left. - \frac{2\bar{\gamma}_l}{(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)^2} [S_k^6 \bar{S}_l^3 + S_k^5 \bar{S}_l^4] + \frac{4\gamma_k \bar{\gamma}_l}{(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)^3} [S_k^3 \bar{S}_l^4 - S_k^4 \bar{S}_l^3] \right\}. \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono pomocnicze oznaczenia

$$(5.14) \quad S_\mu^5 = S_\mu^2 + S_\mu^3, \quad S_\mu^6 = S_\mu^1 - S_\mu^4, \quad \mu = k, l.$$

Dla j -ej tarczy otrzymamy

$$\begin{aligned} (5.15) \quad L_t^j(u_k, v_k; \bar{u}_l, \bar{v}_l) &= L_t^j(\gamma_k, \bar{\gamma}_l) = -\frac{2Eh}{1+\nu} \cdot \frac{\gamma_k \cdot \bar{\gamma}_l}{\gamma_k + \bar{\gamma}_l} \times \\ &\times \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\gamma_k + \bar{\gamma}_l} [A_k^3 \bar{A}_l^4 + A_k^4 \bar{A}_l^3] - \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\gamma_k - \bar{\gamma}_l} [A_k^3 \bar{A}_l^4 - A_k^4 \bar{A}_l^3] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\gamma_k - \bar{\gamma}_l} [A_k^5 \bar{A}_l^6 - A_k^6 \bar{A}_l^5] - \frac{2\gamma_k}{(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)^2} [A_k^3 \bar{A}_l^6 + A_k^4 \bar{A}_l^5] - \\
 & - \frac{2\bar{\gamma}_l}{(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)^2} [A_k^6 \bar{A}_l^3 + A_k^5 \bar{A}_l^4] + \frac{4\gamma_k \bar{\gamma}_l}{(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)^3} [A_k^3 \bar{A}_l^4 - A_k^4 \bar{A}_l^3] \Big\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.16) \quad A_\mu^5 = A_\mu^2 + \frac{2}{1+\nu} A_\mu^3, \quad A_\mu^6 = A_\mu^1 - \frac{2}{1+\nu} A_\mu^4, \quad \mu = k, l.$$

We wzorach powyższych $\gamma_k = \lambda_k a$, $\bar{\gamma}_l = \bar{\lambda}_l a$. Wzory te są prawdziwe dla $\gamma_k \neq \bar{\gamma}_l$ oraz dla S_μ^α i A_μ^α ($\mu = k, l, \alpha = 1, 2, \dots, 6$) wyznaczonych nie tylko ze wzorów (4.10) — (4.13), co odpowiada symetrycznemu odkształceniu płyty i tarczy, lecz także dla przypadku ogólnego, gdy wyznaczamy je ze wzorów (2.2) i (3.2). Wzory (5.13) i (5.15) tracą swą ważność dla $\gamma_k = \bar{\gamma}_l$, co zachodzi np. w przypadku, gdy wartość własna jest rzeczywista, a więc gdy $k = l$ mamy $\gamma_k = \bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}_l$. Dla $\gamma_k = \bar{\gamma}_l$ element macierzy δ_{kk} leżący na głównej przekątnej należy wyznaczyć stosując poniżej podane wzory. I tak dla j -tej płyty

$$\begin{aligned}
 (5.17) \quad L_p^j(\gamma_k, \gamma_k) = & - \frac{Eh}{12(1+\nu)} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \gamma_k^2 \left\{ \frac{-(1+\nu)}{1-\nu} [S_k^1 S_k^3 + S_k^2 S_k^4 - S_k^3 S_k^4] + \right. \\
 & \left. + \gamma_k [(S_k^5)^2 + (S_k^6)^2] + \frac{\gamma_k^2}{3} [S_k^1 S_k^3 + S_k^2 S_k^4] \right\}.
 \end{aligned}$$

a dla j -tej tarczy

$$\begin{aligned}
 (5.18) \quad L_t^j(\gamma_k, \gamma_k) = & - \frac{Eh}{(1+\nu)} \left\{ \frac{-(1-\nu)}{1+\nu} [A_k^1 A_k^3 + A_k^2 A_k^4 - A_k^3 A_k^4] + \right. \\
 & \left. + \gamma_k [(A_k^5)^2 + (A_k^6)^2] + \frac{\gamma_k^2}{3} [A_k^1 A_k^3 + A_k^2 A_k^4] \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie $\gamma_k = \lambda_k a$.

Stosując wzory (5.13) i (5.15) można w prosty sposób wyznaczyć elementy macierzy δ_{kl} , gdy znane są macierze współczynników rozwiązań własnych. Macierz δ_{kl} jest macierzą hermitowską, zachodzi więc dla niej związek $\delta_{lk} = \bar{\delta}_{kl}$. Elementy leżące na głównej przekątnej macierzy są rzeczywiste. Rzeczywisty i różny od zera jest także wyznacznik główny macierzy.

Wielkość δ_{l0} wyznaczamy ze wzorów (5.11) i (5.5) oraz (5.6) oddzielnie w zależności od danych warunków na brzegu rury. W wielu przypadkach warunki te będą dane w postaci wielomianów. Dla takich przypadków można przy całkowaniu wykorzystać wzory (1.5) — (1.7), co znacznie uprości obliczenie całek. Po wyznaczeniu δ_{l0} dalsze uproszczenia można otrzymać, wykorzystując związki wynikające z równań równowagi (4.6).

Po wyznaczeniu liczbowych wartości δ_{kl} i δ_{l0} układ równań (5.9) można rozwiązać stosując skrócony algorytm Gaussa. W podanym przez NOWACKIEGO [2] schemacie zastosowania skróconego algorytmu Gaussa do rozwiązania układów równań o symetrycznej macierzy należy wprowadzić zależność $\delta_{lk} = \delta_{kl}$. Układ równań (5.9) można rozwiązać także metodą iteracji zwykłej lub iteracji zwrotnej [2].

Należy podkreślić, że wzory (5.13) i (5.15), a także (5.17) i (5.18) mają ogólny charakter i są prawdziwe nie tylko dla półpasma stanowiącego część składową rury o przekroju prostokątnym. Zachowują one także swą poprawność dla dowolnego półpasma, które jest częścią składową bardziej złożonego przekroju.

Po wyliczeniu X_k możemy ze wzoru (5.7) wyznaczyć wszystkie przemieszczenia, a następnie odkształcenia i naprężenia. Uzyskaliśmy jednak w ten sposób nie jedno lecz dwa rozwiązania przybliżone. Przybliżonym rozwiązaniem jest zarówno część rzeczywista, jak i część urojona otrzymanych związków. Należy więc podać kryterium, które z tych dwu rozwiązań jest rozwiązaniem „bliższym” do rozwiązania ścisłego. Zagadnienie to będzie bardziej szczegółowo omówione w zamieszczonym w pracy przykładzie liczbowym. Tu zajmiemy się jedynie wyprowadzeniem pewnych związków energetycznych.

Pomnóżmy równanie (5.9) stronami przez \bar{X}_l i zsumujmy względem l :

$$(5.19) \quad \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n X_k \bar{X}_l \delta_{kl} = \sum_{l=1}^n \bar{X}_l \delta_{l0},$$

Można wykazać, że lewa strona tej równości jest podwojona pracą sił wewnętrznych. Ponieważ rozpatrywany układ jest układem Clapeyrona, przeto prawa strona równości jest podwojona pracą sił zewnętrznych. Wyrażenia po obu stronach równości są rzeczywiste. Suma po prawej stronie równości jest łatwa do wyznaczenia i może stanowić pewien sprawdzian dokładności obliczeń.

Zasada prac wirtualnych, która doprowadziła do otrzymania równania (5.9) w rozważanym przez nas zagadnieniu, jest równoznaczną z warunkiem minimalizacji energii potencjalnej układu [3]. Każde z przemieszczeń (5.7) można rozdzielić na część rzeczywistą i część urojoną np. $(w + \bar{w})/2$ i $(w - \bar{w})/2i$. Jeżeli oznaczymy energię potencjalną części rzeczywistej rozwiązania przez U_R części zaś urojonej przez U_I , to można wykazać, że

$$(5.20) \quad U_R + U_I = 2U_0 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n X_k \bar{X}_l \delta_{kl} - \sum_{l=1}^n \bar{X}_l \delta_{l0}.$$

gdzie U_0 jest energią potencjalną układu w stanie nieodkształconym i może być przyjęta dowolnie (np. $U_0 = 0$).

Suma energii potencjalnych $U_R + U_I$ określonych przez wzór (5.20) osiąga ekstremum, gdy spełniony jest warunek (5.9), który otrzymaliśmy z zasady

prac wirtualnych [3]. Zasada ta minimalizuje w tym przypadku sumę energii potencjalnych części rzeczywistej i części urojonej rozwiązania.

Po wykorzystaniu równości (5.19) można wzór (5.20) doprowadzić do postaci

$$(5.21) \quad U_R + U_I = 2U_0 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \bar{X}_l \delta_{l0}.$$

Dla różnicy energii potencjalnych $U_R - U_I$ otrzymamy związek

$$(5.22) \quad U_R - U_I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n X_k X_i b_{ki} \right],$$

gdzie elementy macierzy $b_{ki} = \delta_{ki}(\gamma_k, \gamma_i)$ wyznaczamy ze wzorów (5.10) i (5.13)–(5.18). We wzorach tych zamiast wartości sprzężonych $\bar{\gamma}_i, \bar{A}_i^1, \dots, \bar{S}_i^1, \dots$ należy odpowiednio przyjąć wartości zespolone $\gamma_i, A_i^1, \dots, S_i^1, \dots$. Macierz $[b_{ki}]$ jest macierzą symetryczną o elementach zespolonych. Zachodzi więc związek $b_{ik} = b_{ki}$. Także elementy b_{kk} mogą być zespolone.

Ze wzorów (5.21) i (5.22) możemy wyznaczyć

$$(5.23) \quad U_R = U_0 - \frac{1}{4} \left[\sum_{l=1}^n \bar{X}_l \delta_{l0} + \operatorname{Re} \sum_{k,l=1}^n X_k X_l b_{kl} \right],$$

$$U_I = U_0 - \frac{1}{4} \left[\sum_{l=1}^n \bar{X}_l \delta_{l0} - \operatorname{Re} \sum_{k,l=1}^n X_k X_l b_{kl} \right].$$

Jeżeli dla $n \rightarrow \infty$ rozwiązanie (5.7) dąży do rozwiązania ścisłego, to część rzeczywista tego rozwiązania musi być równa jego części urojonej. Wynika stąd, że różnica $U_R - U_I \rightarrow 0$, energia zaś potencjalna układu osiąga absolutne minimum. Następnym wnioskiem będzie to, że dla energetycznego kryterium zbieżności [3] to rozwiązanie przybliżone będzie «bliższe» rozwiązaniu ścisłemu, którego energia potencjalna jest mniejsza. Pozwala to na określenie ze wzorów (5.23), czy energetycznie bliższa do rozwiązania ścisłego jest część rzeczywista rozwiązania przybliżonego czy część urojona. Zastosowanie kryterium energetycznego wymaga dodatkowo wyliczenia elementów macierzy $[b_{ki}]$ i następnie podwójnej sumy (5.22).

Kryterium energetyczne jest kryterium całkowym i tak, jak inne kryteria całkowite nie daje odpowiedzi na pytanie, jak w dowolnym punkcie obszaru rozwiązanie przybliżone różni się od rozwiązania ścisłego. Ze względu na to ograniczone zastosowanie kryterium energetycznego nie przeprowadzono ścisłego dowodu poprawności podanego powyżej rozumowania. Dowód taki wymagałby zastosowania bardziej subtelnej aparatury matematycznej [3 i 4], co wykraczałoby poza zakres tej pracy.

6. RURA O PRZEKROJU KWADRATOWYM

Podane powyżej wzory i związki znacznie upraszczają się dla przypadku rury o przekroju kwadratowym $a = b$. W przekroju takim przekątne stają się dodatkowymi osiami symetrii przekroju. Wyznacznik układu równań równowagi (4.6) da się napisać w zwartej postaci jako iloczyn dwóch wyrażeń

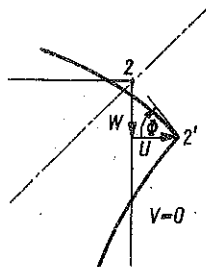
$$(6.1) \quad \Delta(\gamma) = \Delta_1(\gamma) \Delta_2(\gamma) = 0,$$

gdzie

$$(6.2) \quad \Delta_1(\gamma) = \frac{\gamma^2}{48} \left(\frac{h}{a}\right)^2 [(3+v) \sin \gamma + (1-v) \gamma] [(3-v) \sin \gamma - (1+v) \gamma] + (1 + \cos \gamma)^2,$$

$$(6.3) \quad \Delta_2(\gamma) = \frac{\gamma^2}{3(1-v^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 (1 - \cos \gamma)^2 + (\gamma + \sin \gamma)^2.$$

Można łatwo sprawdzić, że warunek $\Delta_1 = 0$ odpowiada antysymetrycznemu względem przekątnych stanowi przemieszczeń naroży (rys. 6). Zachodzi wtedy

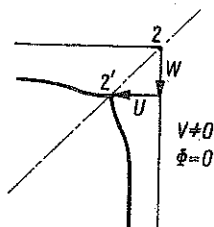


Rys. 6

$$U = -W, \quad V = 0,$$

$$(6.4) \quad \frac{\Phi}{\lambda} = \frac{-1}{h(\gamma)} \left[f(\gamma) - \frac{1-v}{2} \right] W = \frac{(1-v)\gamma - (1+v)\sin \gamma}{2(1+\cos \gamma)} W.$$

Warunek $\Delta_2 = 0$ odpowiada symetrycznemu stanowi przemieszczeń naroży względem przekątnych (rys. 7) i daje związki



Rys. 7

$$(6.5) \quad U = W, \quad \Phi = 0,$$

$$V = \frac{-1}{n(\gamma)} \left[\frac{1}{2} - m(\gamma) \right] W = \frac{(1+v)\gamma - (1-v)\sin\gamma}{2(1-\cos\gamma)} W.$$

Ze względu na pokazany w dalszej części pracy przykład zastosowania omawianej metody, zajmijmy się bardziej szczegółowo przypadkiem symetrii przemieszczeń względem przekątnych. Warunek $\Delta_2 = 0$ można przedstawić w postaci

$$\Delta_2 = \left[\frac{\gamma}{\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h}{a} + i \frac{\gamma + \sin\gamma}{1-\cos\gamma} \right] \left[\frac{\gamma}{\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h}{a} - i \frac{\gamma + \sin\gamma}{1-\cos\gamma} \right] = 0.$$

Równanie to nie ma pierwiastków rzeczywistych. Z warunku

$$(6.6) \quad \frac{\gamma_k}{\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h}{a} - i \frac{\gamma_k + \sin\gamma_k}{1-\cos\gamma_k} = 0$$

otrzymamy nieskończony ciąg zespolonych wartości własnych γ_k . Sprężone wartości własne $\bar{\gamma}_l$ będą spełniały równanie

$$(6.7) \quad \frac{\bar{\gamma}_l}{\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{h}{a} + i \frac{\bar{\gamma}_l + \sin\bar{\gamma}_l}{1-\cos\bar{\gamma}_l} = 0.$$

Ze względu na symetrię przemieszczeń naroży przekroju wszystkie rozwiązania możemy ograniczyć do pasma $1 \div 2$. Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć, że dla k -tej wartości własnej $U_k = W_k = 1$. Rozwiązanie własne dla płyty (4.10) przy uwzględnieniu tego warunku oraz (6.5) będzie miało postać

$$(6.8) \quad w_k(x, z) = e^{\lambda_k z} \{S_k^1; S_k^2; S_k^3; S_k^4\} C_k(x).$$

gdzie

$$(6.9) \quad \begin{aligned} S_k^1 &= 1, \\ S_k^2 &= g(\gamma_k) = \frac{1 - \cos\gamma_k}{\gamma_k + \sin\gamma_k}, \\ S_k^3 &= -g(\gamma_k) = -S_k^2, \\ S_k^4 &= f(\gamma_k) = \frac{\sin\gamma_k}{\gamma_k + \sin\gamma_k}. \end{aligned}$$

Współczynniki \bar{S}_l^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) dla rozwiązania sprężonego będą miały odpowiednio wartości sprężone do S_k^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Dla tarczy zaś zgodnie z (4.12) i (4.13) przy uwzględnieniu (6.5)

$$(6.10) \quad \begin{aligned} u_k(x, z) &= e^{\lambda_k z} \{A_k^1; A_k^2; A_k^3; A_k^4\} C_k(x), \\ v_k(x, z) &= e^{\lambda_k z} \left\{ -A_k^2 - \frac{3-v}{1+v} A_k^3; A_k^1 - \frac{3-v}{1+v} A_k^4; -A_k^4; A_k^3 \right\} C_k(x), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 A_k^1 &= U_k = 1, \\
 A_k^2 &= -(3-\nu) p(\gamma_k) U_k + [(3-\nu) m(\gamma_k) - 1] V_k = \\
 (6.11) \quad &= \frac{1 - (5-\nu) m(\gamma_k)}{2n(\gamma_k)} = \frac{-2 \sin \gamma_k - (1+\nu) \gamma_k}{2(1 - \cos \gamma_k)}, \\
 A_k^3 &= \frac{1+\nu}{2} \frac{m(\gamma_k)}{n(\gamma_k)} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\sin \gamma_k}{1 - \cos \gamma_k}, \\
 A_k^4 &= \frac{1+\nu}{2}.
 \end{aligned}$$

Znając wartości współczynników S_k^2 i A_k^2 możemy w dowolnym punkcie półpasma wyznaczyć przemieszczenia oraz siły tarczowe i płytowe dla k -tego rozwiązania własnego.

Przy poszukiwaniu przybliżonego rozwiązania w postaci szeregu (5.7) dla przekroju kwadratowego znacznie uprości się zapis elementów macierzy δ_{kl} w układzie równań (5.9).

Ponieważ założyliśmy symetrię przemieszczeń względem wszystkich czterech osi symetrii przekroju więc wystarczy rozpatrzenie tylko jednego półpasma. Po wykorzystaniu związku (6.6) dla γ_k i (6.7) dla $\bar{\gamma}_l$ operatory L_p i L_t możemy zsumować i sprowadzić do jednego wyrażenia. Otrzymamy

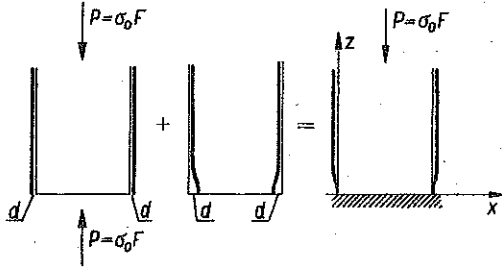
$$\begin{aligned}
 (6.12) \quad \delta_{kl}(\gamma_k, \bar{\gamma}_l) &= L_p(\gamma_k, \bar{\gamma}_l) + L_t(\gamma_k, \bar{\gamma}_l) = -Eh \frac{\gamma_k \bar{\gamma}_l}{\gamma_k + \bar{\gamma}_l} \left\{ \frac{1}{\gamma_k + \bar{\gamma}_l} \times \right. \\
 &\times \left[\frac{\sin \gamma_k}{1 - \cos \gamma_k} + \frac{\sin \bar{\gamma}_l}{1 - \cos \bar{\gamma}_l} \right] - \frac{1}{\gamma_k - \bar{\gamma}_l} \left[\frac{\sin \gamma_k}{1 - \cos \gamma_k} - \frac{\sin \bar{\gamma}_l}{1 - \cos \bar{\gamma}_l} \right] + \\
 &\left. + \frac{2\gamma_k \bar{\gamma}_l}{(\gamma_k - \bar{\gamma}_l)^2} \left[\frac{1}{1 - \cos \gamma_k} + \frac{1}{1 - \cos \bar{\gamma}_l} + \frac{2}{\gamma_k - \bar{\gamma}_l} \left(\frac{\sin \gamma_k}{1 - \cos \gamma_k} - \frac{\sin \bar{\gamma}_l}{1 - \cos \bar{\gamma}_l} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Dla $\gamma_k = \bar{\gamma}_l$

$$\delta_{kk}(\gamma_k, \gamma_k) = \frac{Eh\nu}{2} \left\{ \gamma_k + \frac{\sin \gamma_k}{1 - \cos \gamma_k} + \frac{\gamma_k^3}{1 - \cos \gamma_k} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{1 - \cos \gamma_k} \right] \right\},$$

7. PRZYKŁAD LICZBOWY

Rozpatrzmy słup o przekroju kwadratowym, zamocowany u podstawy i obciążony siłą $P = \sigma_0 F$ (rys. 8), gdzie σ_0 jest tu naprężeniem, F zaś polem powierzchni przekroju nośnego rury. Pod wpływem takiego obciążenia słup zwiększa swoje wymiary poprzeczne. Równomierny rozkład naprężeń zostaje zaburzony w pobliżu podparcia, gdzie na skutek zamocowania słup nie może zwiększyć swoich poprzecznych wymiarów. Końcowy stan odkształceń słupa można otrzymać jako superpozycję dwóch stanów (rys. 8).



Rys. 8

Stan pierwszy pozwala na natychmiastowe wyznaczenie przemieszczeń wywołanych obciążeniem. Stan drugi dodany do pierwszego powinien skasować przemieszczenia w zamocowanym przekroju. Ze względu na lokalny charakter zaburzeń można przyjąć, że słup jest półnieskończony, co pozwoli na zastosowanie proponowanej metody.

Niech zewnętrzny wymiar kwadratowego przekroju rurowego będzie równy $a+h$, gdzie h oznacza grubość ścianki, a zaś obliczeniową szerokość półpasma. Dla obliczeń przyjęto, że $h/a = 1/10$, $\nu = 0,3$. Swobodne rozszerzenie słupa będzie równe $2d$, gdzie

$$(7.1) \quad d = \nu \frac{\sigma_0}{E} \frac{a}{2}$$

Drugi stan przemieszczeń powinien więc dla $z=0$ spełnić następujące warunki brzegowe:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} u^*(x) &= \left(1 - \frac{2x}{a}\right) d, \\ v^*(x) &= 0, \quad w^*(x) = d, \\ \varphi_z^*(x) &= \left. \frac{\partial w(x, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie przybliżone przyjmiemy w postaci sumy funkcji własnych (5.7). Dla przekroju kwadratowego odpowiednie stany przemieszczeń określone są wzorami (6.8) i (6.10).

Przy przyjętych wartościach $h/a = 1/10$ i $\nu = 0,3$ wyznaczono z równania (6.6) dziesięć kolejnych wartości własnych. Podajemy tu kilka z nich:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -3,88178332 - i 2,46745660 \\ \gamma_2 &= -10,03134361 - i 3,85236475 \\ \gamma_3 &= -15,55497306 - i 4,71656284 \\ \gamma_4 &= -20,95397713 - i 4,70133141 \\ \gamma_5 &= -26,88177060 - i 4,38463008 \end{aligned}$$

$$\gamma_{10} = -58,08517657 - i 3,83319563$$

Uwzględniono tu warunek $\text{Re } \gamma_k < 0$.

Elementy δ_{kl} układu równań (5.9) wyznaczono ze wzoru (6.12). Oto niektóre z nich:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= 3,1182544, & \delta_{5,5} &= 121.3487143, \\ \delta_{10,10} &= 1760,896399, \\ \delta_{51} &= -0,2609353 + i 0,0202378, \\ \delta_{10,1} &= -0,04818089 - i 0,01507741, \\ \delta_{10,5} &= -5,77646856 - i 4,03665523.\end{aligned}$$

Pominięto tu mnożnik Eh . Jak wynika z podanych tu wartości, elementy macierzy leżące na głównej przekątnej są znacznie większe od pozostałych elementów macierzy, co zapewnia dobrą zbieżność przy iteracyjnym rozwiązywaniu układu równań.

Wartości δ_{i0} wyznaczmy z (5.11) podstawiając warunki brzegowe (7.2) do (5.5) i (5.6).

Jak widać z warunków brzegowych (7.2) do δ_{i0} wejdą tylko poniżej podane siły przygotowane:

$$\begin{aligned}N'_{xz}(x, 0) &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x} \right]_{z=0} = \\ &= \frac{Eh}{1+\nu} \bar{\lambda}_l \left\{ \bar{A}_l^1 - \frac{2}{1+\nu} \bar{A}_l^2; \bar{A}_l^2 + \frac{2}{1+\nu} \bar{A}_l^3; \bar{A}_l^3; \bar{A}_l^4 \right\} \overline{C_l(x)}, \\ R'_z(x, 0) &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^3 \bar{w}_l}{\partial z^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \bar{w}_l}{\partial z \partial x^2} \right]_{z=0} = \\ &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \bar{\lambda}_l^3 \left\{ \bar{S}_l^1 - \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} \bar{S}_l^4; \bar{S}_l^2 + \frac{2(2-\nu)}{1-\nu} \bar{S}_l^3; \bar{S}_l^3; \bar{S}_l^4 \right\} \overline{C_l(x)}, \\ R'_r &= R'_s = 0.\end{aligned}$$

We wzorach powyższych \bar{A}_l^α i \bar{S}_l^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) są określone odpowiednio wzorami (6.9) i (6.11), lecz od sprzężonego argumentu $\bar{\gamma}_l$ ($l = 1, 2, \dots, n$). Po wykonaniu w (5.11) całkowania według wzorów (1.7) i (1.8) oraz uwzględnieniu warunku (6.3) otrzymamy

$$\delta_{i0} = -\frac{4d}{\bar{\gamma}_l} Eh.$$

Z powyższego związku wynika, że moduł δ_{i0} będzie mała dla kolejnych wartości własnych $\bar{\gamma}_l$.

Układ równań (5.9), z którego wyznaczamy niewiadome X_k , rozwiązano algorytmem Gaussa dla $n = 1, 4, 7, 10$. Poniżej podano wartości kilku niewiadomych $X_k^{(n)}$ dla tych kolejnych przybliżeń (pominięto tu mnożnik $10^{-2} d$).

$$\begin{aligned}X_1^{(1)} &= -23,536085 - i 14,960720, \\ X_1^{(4)} &= -29,283662 - i 14,109117, \\ X_1^{(7)} &= -29,663205 - i 13,857173,\end{aligned}$$

$$X_1^{(10)} = -29,708027 - i 13,814651,$$

$$X_4^{(4)} = 1,757307 - i 0,712983,$$

$$X_4^{(7)} = 1,967726 - i 2,288414,$$

$$X_4^{(10)} = 1,892210 - i 2,448089,$$

$$X_7^{(7)} = 0,169982 + i 0,008817,$$

$$X_7^{(10)} = 0,227646 - i 0,107837,$$

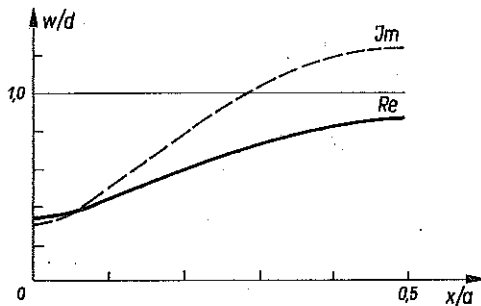
$$X_{10}^{(10)} = 0,035608 - i 0,008909.$$

Z podanych tu wartości wynika, że wraz ze wzrostem liczby uwzględnionych wyrazów rozwiązania niewiadoma X_1 dosyć szybko stabilizuje się. Największym względnym błędem obarczona jest niewiadoma X_{10} . Jest to zrozumiałe, ponieważ przyjmując $n = 10$ nie uwzględniamy dużego wpływu, jaki ma niewiadoma X_{11} na X_{10} i dalsze pominięte w przyjętym przybliżeniu.

Po wyznaczeniu niewiadomych X_k możemy wyznaczyć wszystkie interesujące nas wielkości przemieszczeń i naprężeń. Tak np. ugięcie płyty jest następujące:

$$w(x, z) = \sum_{k=1}^n X_k e^{\lambda_k z} \{S_k^1; S_k^2; S_k^3; S_k^4\} C_k(x).$$

Jest to funkcja zespolona zmiennych rzeczywistych x i z . Otrzymaliśmy więc nie jedno lecz dwa rozwiązania przybliżone, ponieważ zarówno część rzeczywista, jak i część urojona są przybliżonymi rozwiązaniami postawionego zagadnienia. Na rys. 9 podano wykresy ugięć dla $z = 0$ i $0 \leq x \leq a/2$ odniesione do wielkości d . Z warunku brzegowego (7.2) wynika, że $w^*(x)/d = 1$.



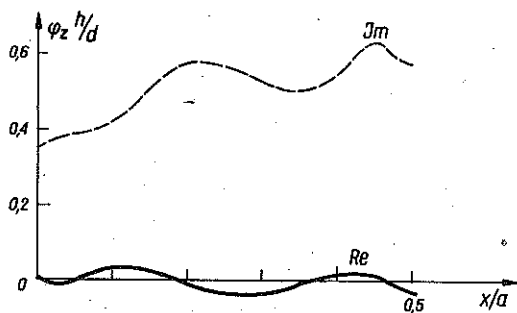
Rys. 9

Można więc oszacować z jaką dokładnością otrzymane rozwiązanie spełnia warunek brzegowy. Na następnych rysunkach pokazano jak uzyskane rozwiązanie spełnia pozostałe warunki brzegowe (7.2). Niestety nie udało się znaleźć obiektywnego kryterium, pozwalającego jednoznacznie określić, które z otrzymanych rozwiązań jest lepszym przybliżeniem dla danych warunków brzegowych.

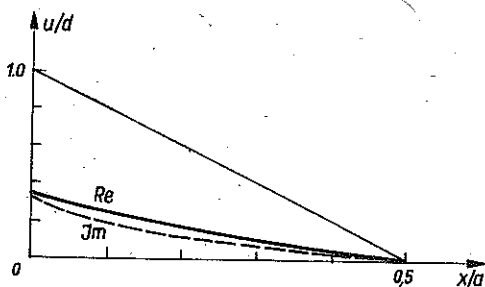
Omówione uprzednio kryterium energetyczne (5.23) pozwala porównać energię potencjalną części rzeczywistej i urojonej, jednak podobnie jak inne kryteria całkowite nie daje informacji o lokalnym zachowaniu się rozwiązań. Dodatkową jego wadą jest konieczność wyznaczenia elementów macierzy $[b_{kl}]$ oraz podwójnej sumy (5.22). Kryterium lokalnego maksymalnego odchylenia nie daje informacji, jaki wpływ ma przybliżone spełnienie tego jednego warunku brzegowego na rozkład sił i momentów, określenie których jest właściwym celem w postawionym zagadnieniu.

Wydaje się, że najbardziej celowe będzie stosowanie w wątpliwych przypadkach kryterium całkowego. Pozwala ono przy stosunkowo małym nakładzie pracy na subiektywną ocenę otrzymanych przybliżeń. W większości przypadków do takiej oceny wystarczy przeprowadzenie analizy rozwiązań. Pokażemy to na naszym przykładzie.

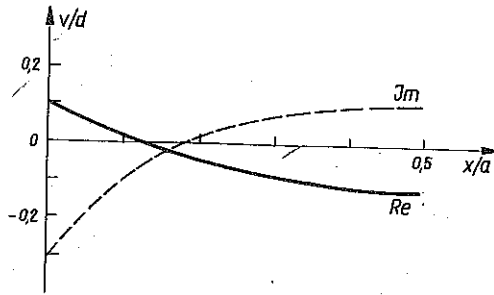
Z wykresu $w(x, 0)$ wynika, że część urojona (rys. 9) jest tu lepszym przybliżeniem. Przeczy jednak temu wykres kąta $\varphi_z(x, 0)$. Część rzeczywista rozwiązania (rys. 10) jest tu „w średnim” bliższa dla danej warunkiem (7.2) wielkości $\varphi_z^*(x) = 0$. Także część rzeczywista przemieszczenia $u(x, 0)$ jest lepszym przybliżeniem warunku brzegowego (rys. 11). Przemieszczenie $v(x, 0)$ powinno zgodnie z (7.2) być równe zeru. Z wykresu a rysunku 12 wynika, że całki z części rzeczywistej i urojonej będą się nieznacznie od siebie różniły. Wybór lepszego przybliżenia umożliwi w tym przypadku wykres



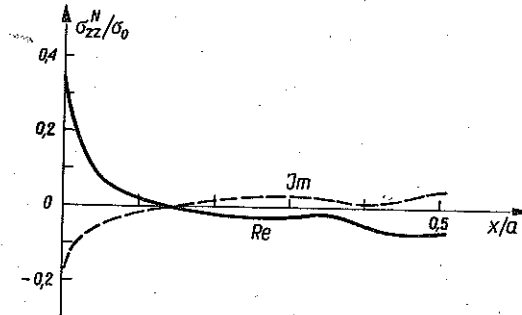
Rys. 10



Rys. 11

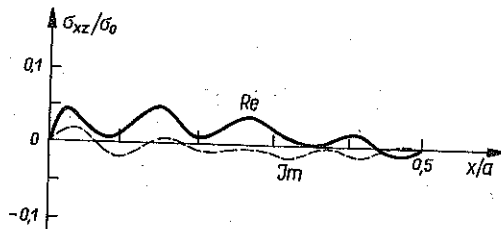


Rys. 12

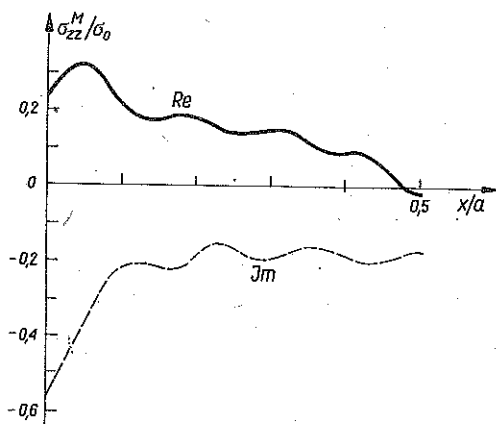


Rys. 13

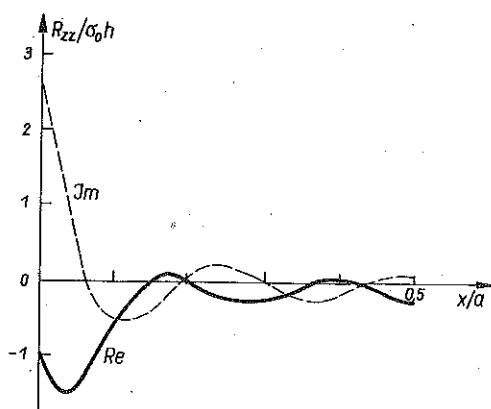
(rys. 13) naprężeń $\sigma_{zz}^N(x, 0) = N_{zz}(x, 0)/h$. Jest oczywiste, że rozkład naprężeń normalnych na powierzchni zamocowania słupa powinien mieć kształt podobny do wykresu naprężeń pod stopą wciskanego sztywnego stępła. Rzędne w narożach muszą być większe od naprężenia średniego. Z wykresu σ_{zz}^N wynika, że prawidłowa z fizycznego punktu widzenia będzie część rzeczywista rozwiązania, ponieważ w punkcie $x = 0$ ma wartość dodatnią, czyli zwiększa naprężenia w stosunku średniego naprężenia w słupie σ_0 . Na rysunkach 14, 15 i 16 zamieszczono wykresy naprężeń $\sigma_{xz} = N_{xz}(x, 0)/h$, $\sigma_{zz}^M(x, 0) = 6M_{zz}(x, 0)/h^2$ oraz $R_{zz}(x, 0)/h$. Wykresy te mogą posłużyć do dalszej analizy dwóch otrzymanych przybliżeń. Kończącym wnioskiem będzie to, że część rzeczywista będzie lepszym bardziej poprawnym fizycznie przybliżeniem dla danych warunków brzegowych.



Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

Dla porównania, czy powyższy wniosek jest zbliżony z kryterium energetycznym, wyznaczono podwójną sumę (5.22) przyjmując $n = 1, 2, 4, 6$. Tak więc mamy

$$(U_R^1 - U_I^1)/(U_R^1 + U_I^1) = 0,1477,$$

$$(U_R^2 - U_I^2)/(U_R^2 + U_I^2) = 0,1195,$$

$$(U_R^4 - U_I^4)/(U_R^4 + U_I^4) = 0,1163,$$

$$(U_R^6 - U_I^6)/(U_R^6 + U_I^6) = 0,1155.$$

Widać z powyższego, że ze wzrostem n różnica energii potencjalnych części rzeczywistej i rojonej maleje, co jest warunkiem aby energie te dążyły do wspólnej granicy. Różnica ta jest także dodatnia, co na podstawie wzorów (5.23) pozwala na wyciągnięcie wniosku, że $U_R < U_I$ a więc, że zgodnie z kryterium energetycznym część rzeczywista rozwiązania jest lepszym przybliżeniem.

Przy sporządzaniu wykresów przemieszczeń i naprężeń przyjęto, że $X_9 = X_{10} = 0$. Niewiadome te, jak to już uprzednio podkreślano, są obarczone największym błędem względnym, a pomnożone przez duże rzędne rozwiązań własnych lub ich pochodnych zniekształcają obraz naprężeń. Ma to szczególnie miejsce w tych przedziałach, gdzie wartości tych naprężeń są bliskie zera. Zjawisko to najsilniej występuje na wykresie $R_{zz}/\sigma_0 h$ na rys. 16. Siła tnąca R_{zz} wyraża się przez trzecie pochodne rozwiązań własnych i zbieżność wyników jest tu najgorsza.

Wykresy przemieszczeń i naprężeń na rysunkach 9—17 mają tylko charakter jakościowy. Dla otrzymania oszacowań ilościowych należy zwiększyć liczbę uwzględnionych rozwiązań własnych oraz dokładność obliczeń numerycznych. Przedstawione tu wyniki liczbowe uzyskano wykonując obliczenia numeryczne na minikalkulatorze Texas Instruments SR-51A. Tylko tabelaryzację funkcji własnych wykonano na programowalnym i liczącym w liczbach zespolonych minikalkulatorze Texas Instruments 59.

8. UWAGI KOŃCOWE

Metodę omówiono i zilustrowano wykresami na przykładzie efektów brzegowych słupa poddanego ścisłaniu osiowemu. W przypadku gdy słup taki obciążymy momentem zginającym, tok postępowania będzie podobny. Jedną z osi symetrii przekroju będzie osią symetrii, druga zaś osią antysymetrii (rys. 4). Dla tarczy i płyty 2÷3 siły krawędziowe należy wtedy wyznaczyć ze wzorów (2.8) i (3.7). Przemieszczenia $w^*(x)$ i $u^*(x)$ nie będą funkcjami liniowymi, jak dla słupa ściskanego. Wyznaczamy je rozwiązując przekrój jako zamkniętą ramę, w której dane są odkształcenia początkowe $\varepsilon_x^0 = \nu \varepsilon_z^0(x)$, wynikające z rozciągania i ściskania wywołanego momentem zginającym w swobodnej rurze półnieskończonej.

Ubočnym rezultatem tej pracy jest wykazanie, że w niektórych zagadnieniach brzegowych tarcz i płyt może być celowe stosowanie układu nieortogonalnych funkcji własnych. Tworząc odpowiednie liniowe kombinacje tych funkcji można otrzymać układ funkcji ortonormalnych. Układ takich funkcji, których warunkiem ortonormalizacji będzie zasada prac wirtualnych, będzie miał postać

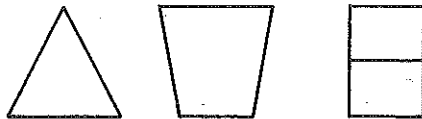
$$f_k(x, z) = \beta_{kk}^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^k \beta_{kl} \Phi_l(x, z),$$

gdzie przez $\Phi_l(x, z)$ oznaczono ogólnie l -te nieortonormalne rozwiązanie własne, a macierz $[\beta_{kl}]$ jest macierzą odwrotną do macierzy $[\delta_{kl}]$. Zachodzi więc związek $[\beta_{kl}] = [\delta_{kl}]^{-1}$. Widać stąd, że ortogonalizacja funkcji własnych jest tu niecelowa. Poza dodatkowym wyznaczeniem macierzy odwrotnej $[\beta_{kl}]$ komplikuje ona wyznaczenie wszystkich wielkości fizycznych, które należy wyliczać z podwójnych sum.

Przedstawiona metoda wyznaczania efektów brzegowych nie jest tak uniwersalna jak metoda elementów skończonych, jednak w niektórych zagadnieniach zastosowanie jej może wymagać mniejszego nakładu pracy. Zaletami jej są: podobieństwo do znanej z mechaniki budowli metody odkształceń i wynikające stąd łatwe wyprowadzenie równań równowagi na krawędziach; możliwość wyznaczenia naprężeń w dowolnym interesującym nas punkcie brzegu i obszaru; proste wynikające z przyjętego zapisu operacje różniczkowania i całkowania funkcji własnych; proste wzory na wyznaczenie elementów hermitowskiej macierzy $[\delta_{kl}]$.

Wady tej metody są następujące: konieczność wyznaczenia wszystkich elementów macierzy $[\delta_{kl}]$; konieczność uwzględnienia większej liczby rozwiązań własnych w celu uzyskania wyników ilościowych; zastosowanie elektrycznych maszyn cyfrowych liczących w liczbach zespolonych; mała liczba praktycznych rozwiązań, które wskazywałyaby, jak zależą jakościowe i ilościowe wyniki oraz zbieżność przybliżeń od stosunków wymiarów geometrycznych takich jak h/a i a/b .

Przedstawiona metoda da się uogólnić na dowolne wielokątne przekroje zamknięte (rys. 17). Dla p -kąta, będziemy mieli $4p$ wymuszonych obrotów i przemieszczeń krawędzi oraz $4p$ warunków równowagi sił i momentów



Rys. 17

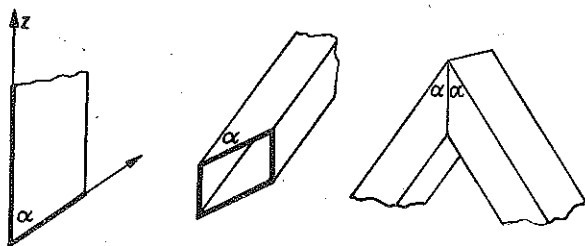
występujących na tych krawędziach. Wykorzystanie symetrii i antysymetrii przemieszczeń może znacznie zmniejszyć liczbę jednorodnych równań równowagi, z których wyznaczamy wartości własne. Dalszą możliwością uogólnienia jest rozszerzenie metody na przekroje otwarte (rys. 18). W tym przypadku na swobodnej krawędzi warunki równowagi sprowadzają się do porównania do zera występujących na niej sił i momentów.



Rys. 18

Opracowanie odpowiednich rozwiązań i wzorów dla półpasma tarczowego i płytowego ze skośnym brzegiem [5] tworzącym kąt α z krawędzią (rys. 19) pozwoli na wyznaczenie efektów brzegowych w rurach o przekroju prostokątnym łączonych pod kątem. Bardziej szczegółowe rozpatrzenie zagadnienia efektów brzegowych w rurach o przekroju prostokątnym można

by przeprowadzić wychodząc z równań teorii Reissnera dla płyt i tarcz [6]. Zachodzi jednak obawa, że komplikacja rozwiązań i odpowiednich wzorów może być tak duża, że proponowana w tej pracy metoda dla teorii Reissnera stanie się nieefektywna.



Rys. 19

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
2. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, t. 1, PWN, Warszawa 1957.
3. S. G. MICHLIN, *Вариационные методы в математической физике*, ГИТТЛ, Москва 1957.
4. J. MUSIELAK, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
5. Z. KAÇZKOWSKI, *Płyty*, Arkady, Warszawa 1980.
6. W. NOWACKI, *Dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1979.

РЕЗЮМЕ

КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТРУБАХ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Трубы с прямоугольным сечением, используемые как конструкционные элементы (стержни ферм, столбы), работают обычно в простом однородном напряженном состоянии. Это состояние возмущается в местах соединений и опирания. В представленной работе предлагается метод определения этих дополнительных эффектов, выступающих на краях труб. Дается способ определения собственных функций для труб с прямоугольным сечением. Каждая из этих функций определяет в трубе самоуравновешенное состояние изгибных и дисковых напряжений. Решение принимается в виде ряда неортогональных собственных функций. Неизвестные коэффициенты ряда определяются, применяя принцип дополнительных виртуальных работ. Как пример приведено решение для трубы с квадратным сечением. Предлагаемый метод дается обобщить на произвольные полигональные замкнутые сечения, а также на открытые сечения.

SUMMARY

BOUNDARY EFFECTS IN PIPES OF RECTANGULAR CROSS-SECTIONS

Pipes of rectangular cross-section used as structural elements (truss rodes, columns) are usually subject to simple uniform states of stress. This state is disturbed in the regions

of joints and supports. A method of determining these effects occurring at the pipe edges is proposed. The method of determining the eigenfunctions for pipes of rectangular cross-sections is given. Each of the functions determines a self-equilibrated system of membrane and bending stresses in the pipe. The solution is assumed in the form of the series of non-orthogonal eigenfunctions. The unknown coefficients of the expansions are determined by means of the complementary virtual works principle. A pipe of square cross-section is presented as an example. The method proposed may be generalized to arbitrary polygonal closed cross-sections, and also to open cross-sections.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI.

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1981 r.
