

## DYSKRETNY OPIS GIĘTNYCH DRGAŃ PRĘTÓW Z WIĘZAMI ZALEŻNYMI OD CZĘSTOŚCI

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

Praca dotyczy obliczeń giętnych drgań dyskretnych modeli prętów z więzami zależnymi od częstości. Sprężyste, inercyjne i tłumiące własności więzów opisano funkcją zespoloną, reprezentującą dynamiczną sztywność więzów w dziedzinie częstości. Wykorzystanie tej funkcji przedstawiono dla układu o dwóch stopniach swobody. Rozpatrzono wymuszone i swobodne drgania tego układu.

### 1. WSTĘP

Sprężyste, inercyjne i tłumiące własności więzów zależnych od częstości mogą być opisane przy pomocy funkcji zespolonych reprezentujących dynamiczną sztywność więzów w dziedzinie częstości. Sposób wyznaczenia i wykorzystania tych funkcji do analizy giętnych drgań pręta jako układu ciągłego przedstawiono w pracy [1]. W przypadku dyskretnych modeli analogiczne funkcje stosowano do opisu własności amortyzatorów przeznaczonych do elastycznego posadowienia maszyn oraz podatnych fundamentów w punktach podparcia maszyn [2 i 3]. Niniejsza praca dotyczy giętnych drgań dyskretnego modelu pręta z dwustronnymi więzami o własnościach zależnych od częstości. Ograniczono się przy tym do modelu o dwóch stopniach swobody.

### 2. OPIS ROZPATRYWANEGO UKŁADU

Rozpatrywany jest układ którego dyskretny model składa się z dwóch mas skupionych  $m_1$  i  $m_2$  oraz z nieważkiego pręta o stałych parametrach sprężystych (rys. 1). Masa  $m_2$  połączona jest z więzami o własnościach zależnych od częstości. Uwzględnienie podatności więzów i pręta na zginanie skręcanie i rozciąganie prowadzi do modelu, w którym masy skupione mają po sześć stopni swobody. Więzy zależne od częstości mogą być w tym przypadku scharakteryzowane przy pomocy macierzy sztywności dynamicznej w dziedzinie częstości [1]. W układach prętowych poddanych działaniu sił poprzecznych szczególnie istotne są poprzeczne drgania mas skupionych w płaszczyźnie działania wymuszeń, które w pierwszym przybliżeniu analizowane są z pominięciem drgań innych rodzajów. Uproszczenie to zastosowano w niniejszej pracy, ograniczając się do wyznaczenia poprzecznych przemieszczeń  $u_1$  i  $u_2$  obu mas skupionych. Miarą odkształceń giętnych pręta są względne przemieszczenia obu mas

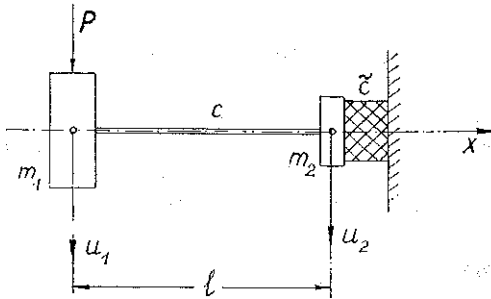
(2.1)

$$u = u_1 - u_2.$$

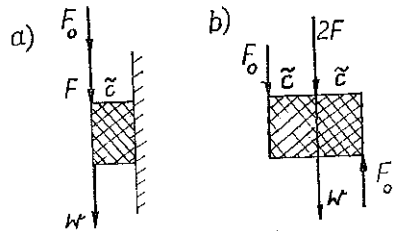
Przyjęto, że sztywność pręta na zginanie jest stała i odpowiada ugięciu pręta  $u$  przy jednostkowej sile poprzecznej  $P$ , przyłożonej na końcu pręta. Sztywność ta dla prętów pryzmatycznych wynosi

$$(2.2) \quad c = \frac{3EJ}{l^3},$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga materiału pręta,  $J$  moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta,  $l$  długość pręta.



Rys. 1



Rys. 2

Sprężyste, inercyjne i tłumiące własności więzów mogą być określone przy pomocy sztywności dynamicznej. Sztywność dynamiczną więzów na zginanie, poddanych działaniu stałej siły poprzecznej

$$(2.3) \quad F_0 = (m_1 + m_2) g$$

( $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie) oraz harmonicznie zmiennej siły

$$(2.4) \quad F = \bar{F}_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i)$$

można zdefiniować zgodnie z [1] i z rys. 2a jako

$$(2.5) \quad c_i = \frac{F_i}{w_i} = k_i + j l_i,$$

gdzie

$$F_i = \bar{F}_i \exp(j\varepsilon_i), \quad w_i = \bar{w}_i \exp(j\vartheta_i),$$

$$k_i = \frac{\bar{F}_i}{\bar{w}_i} \cos(\varepsilon_i - \vartheta_i), \quad l_i = \frac{\bar{F}_i}{\bar{w}_i} \sin(\varepsilon_i - \vartheta_i),$$

przy czym oznaczono przez  $\bar{F}_i$ ,  $\varepsilon_i$  rzeczywistą amplitudę i fazę siły  $F$ ,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\bar{w}_i$ ,  $\vartheta_i$  rzeczywistą amplitudę i fazę przemieszczeń więzów  $w$ , wywołanych wymuszeniem (2.4).

Wielkość (2.5) jest miarą sztywności dynamicznej więzów na zginanie przy wymuszeniu (2.4) i stałym obciążeniu (2.3), odpowiadającym ciężarowi obu mas skupionych przy poziomym usytuowaniu pręta.

Charakterystyki sztywności dynamicznej więzów na zginanie przy częstotliwości  $\omega_i$

$$(2.6) \quad w_i = f(F_0), \quad F_i = \text{const},$$

$$(2.7) \quad w_i = f(F_i), \quad F_0 = \text{const}$$

są z reguły nieliniowe. Wynika stąd, że pomiary sztywności dynamicznej należy przeprowadzić nie tylko przy takich wartościach  $F_0$ , jakie obciążać będą badane więzy w układzie rzeczywistym, lecz także przy wartościach  $\bar{F}_i$  zbliżonych do eksploatacyjnych wartości amplitud zmiennych sił wymuszających. Przy pomiarach korzystne jest odciążenie źródła zmiennych wymuszeń od stałej siły  $F_0$ . W tym celu zastosować można układ przedstawiony schematycznie na rys. 2b.

W niniejszej pracy przyjęto, że w rozpatrywanych przedziałach zmienności amplitud przemieszczeń więzów  $w$  zależność (2.7) jest dla  $\omega = \omega_i$  liniowa (lub zlinearyzowana), tzn. wartość  $c_i$  traktuje się jako stałą dla danej wartości  $F_0$  i obliczeniowego zakresu zmienności  $\bar{F}_i$ . Pozwala to wykorzystać liniową teorię drgań. Przyjęto także, że wpływ częstości na sztywność dynamiczną więzów jest istotny, tzn.

$$(2.8) \quad c_i \neq c_j, \quad \omega_i \neq \omega_j.$$

Oznacza to konieczność wykonania pomiarów przy odpowiednio dużej liczbie różnych częstości. Liczba ta zależy od zakresu częstości, w którym badane są wymuszone i swobodne drgania pręta, od charakteru zmienności dynamicznej sztywności więzów jako funkcji częstości oraz od pożądanej dokładności. Jeśli przy danej wartości  $F_0$  wyznaczono z pomiarów wartości  $k_0, k_1, \dots, k_l, \dots, k_n$  oraz  $l_0, l_1, \dots, l_l, \dots, l_n$  dla częstości  $\omega = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_l, \dots, \omega_n$ , to na podstawie znanych formuł interpolacyjnych [4] można utworzyć wielomiany co najwyżej  $n$ -tego stopnia

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \bar{k}(\omega) &= a_0 + a_1 \omega + a_2 \omega^2 + \dots + a_n \omega^n, \\ \bar{l}(\omega) &= b_0 + b_1 \omega + b_2 \omega^2 + \dots + b_n \omega^n. \end{aligned}$$

spełniające warunki

$$(2.10) \quad \bar{k}(\omega_i) = k_i, \quad \bar{l}(\omega_i) = l_i.$$

Analogicznie do (2.5) można utworzyć funkcję

$$(2.11) \quad \bar{c}(\omega) = \bar{k}(\omega) + j\bar{l}(\omega).$$

Funkcja  $\bar{c}(\omega)$  określa sztywność dynamiczną więzów na zginanie w dziedzinie częstości. Dokładność aproksymacji sztywności dynamicznej więzów w dziedzinie częstości wyrażeniem (2.11) zależy od stopnia wielomianów i zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa może być dowolnie wysoka. Funkcja  $\bar{c}(\omega)$  pozwala napisać związek pomiędzy transformatami Fouriera  $\bar{F}(\omega)$  i  $\bar{w}(\omega)$  siły poprzecznej przyłożonej do więzów i ugięcia więzów:

$$(2.12) \quad \bar{F}(\omega) = \bar{c}(\omega) \bar{w}(\omega).$$

Analogiczna zależność pomiędzy transformatami Fouriera  $\bar{R}(\omega)$  i  $\bar{u}_2(\omega)$  reakcji działającej ze strony więzów na masę  $m_2$  i przemieszczenia masy  $m_2$  ma postać

$$(2.13) \quad \bar{R}(\omega) = -\bar{c}(\omega) \bar{u}_2(\omega).$$

Sposób wykorzystania funkcji  $\bar{c}(\omega)$  zilustrowano poniżej.

## 3. WYMUSZONE DRGANIA GIĘTNE PRĘTA

W przypadku działania na masę  $m_1$  siły poprzecznej  $P(t)$  wymuszone drgania poprzeczne masy  $m_1$  opisują się równaniem

$$(3.1) \quad m_1 \ddot{u}_1 + c(u_1 - u_2) = P.$$

Ze względu na wyrażenie sztywności dynamicznej więzów w dziedzinie częstości korzystne jest przedstawienie równań ruchu mas skupionych również w tej dziedzinie. W wyniku zastosowania transformacji Fouriera do równania (3.1) otrzymuje się

$$(3.2) \quad -\omega^2 m_1 \tilde{u}_1 + c(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = \tilde{P},$$

gdzie  $\tilde{u}_1, \tilde{P}$  oznaczają transformatory Fouriera wielkości  $u_1$  i  $P$ . Analogiczne równanie ruchu masy  $m_2$  można z uwzględnieniem (2.13) napisać w dziedzinie częstości następująco:

$$(3.3) \quad -\omega^2 m_2 \tilde{u}_2 + c(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1) + \tilde{c}\tilde{u}_2 = 0.$$

Jeżeli siła wymuszająca  $P$  jest funkcją okresową

$$(3.4) \quad P = \sum_k P_k \exp(j\omega_k t),$$

w której oznaczono

$$P_k = \tilde{P}_k \exp(j\gamma_k),$$

$\tilde{P}_k, \gamma_k, \omega_k$  są odpowiednio rzeczywistą amplitudą, fazą i częstością  $k$ -tej składowej siły  $P$ , to równanie (3.2) przyjmuje postać

$$(3.5) \quad -\omega^2 m_1 \tilde{u}_1 + c(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = 2\pi \sum_k P_k \delta(\omega - \omega_k).$$

Prawa strona równania (3.5) jest ciągiem impulsów określonych dystrybucją Diraca  $\delta$ , zatem może ono być spełnione jedynie wówczas, gdy funkcje  $\tilde{u}_1$  i  $\tilde{u}_2$  są również ciągami impulsów:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_1 &= 2\pi \sum_k u_{1k} \delta(\omega - \omega_k), \\ \tilde{u}_2 &= 2\pi \sum_k u_{2k} \delta(\omega - \omega_k). \end{aligned}$$

W wyniku podstawienia (3.6) do równań (3.3) i (3.5) otrzymuje się

$$(3.7) \quad \begin{aligned} -\omega_k^2 m_1 u_{1k} + c(u_{1k} - u_{2k}) &= P_k, \\ -\omega_k^2 m_2 u_{2k} + c(u_{2k} - u_{1k}) + c_k u_{2k} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.8) \quad c_k = \tilde{c}(\omega_k).$$

Poszukiwane drgania poprzeczne mas skupionych określone są wzorami

$$(3.9) \quad u_1 = \sum_k u_{1k} \exp(j\omega_k t), \quad u_2 = \sum_k u_{2k} \exp(j\omega_k t).$$

Na podstawie (3.7) wielkości  $u_{1k}$  i  $u_{2k}$  wynoszą

$$(3.10) \quad u_{1k} = \frac{c + c_k - m_2 \omega_k^2}{B_k} P_k, \quad u_{2k} = \frac{c}{B_k} P_k, \\ B_k = (c + c_k - m_2 \omega_k^2)(c - m_1 \omega_k^2) - c^2.$$

Wymuszone drgania gięte pręta określone są wzorami (2.1) i (3.9), czyli

$$(3.11) \quad u = \sum_k \frac{c_k - m_2 \omega_k^2}{B_k} P_k \exp(j\omega_k t).$$

Z zależności (3.11) wynika, że jeśli w rozpatrywanym układzie tak dobrać wartości  $c_k$  i  $m_2$  (aby spełnione były warunki)<sup>1)</sup>

$$(3.12) \quad c_k = m_2 \omega_k^2,$$

$$(3.13) \quad B_k \neq 0,$$

to drgania gięte pręta o częstotliwości  $\omega_k$  nie wystąpią pomimo istnienia wymuszenia o tej częstotliwości. Na podstawie (2.8) i (3.11) można również wnioskować, że w układzie z więzami o sztywności zależnej od częstotliwości możliwe jest dynamiczne tłumienie drgań w szerszym zakresie częstotliwości. Warunek (3.13) oznacza że przy wymuszeniu, o częstotliwości  $\omega_k$  nie występuje rezonans z żadną częstotliwością drgań swobodnych układu.

W przypadku wymuszeń nieokresowych stosuje się transformację Laplace'a równań ruchu, co daje

$$(3.14) \quad s^2 m_1 \bar{u}_1 + c(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) = \bar{P}, \\ s^2 m_2 \bar{u}_2 + c(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) + \bar{c}\bar{u}_2 = 0.$$

gdzie oznaczono przez  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{P}$  — transformaty Laplace'a funkcji  $u_1, u_2$  i  $P$ , oraz  $s$  — zmienną Laplace'a,  $\bar{c} = \bar{c}(\omega)|_{\omega = -sj}$ .

Z równań (3.14) wynikają wzory

$$(3.15) \quad \bar{u}_1 = \frac{c + \bar{c} + s^2 m_2}{B} \bar{P}, \quad \bar{u}_2 = \frac{c}{B} \bar{P}, \quad \bar{u} = \frac{\bar{c} + s^2 m_2}{B} \bar{P}, \\ B = (c + \bar{c} + m_2 s^2)(c + m_1 s^2) - c^2.$$

Numeryczna inwersja wyrażeń (3.15) umożliwia wyznaczenie drgań układu w dziedzinie czasu.

Funkcje

$$(3.16) \quad L_1(\omega) = \frac{1}{B} (c + \bar{c} + m_2 s^2)|_{s=j\omega}, \quad L_2(\omega) = \frac{c}{B}|_{s=j\omega}, \\ L(\omega) = \frac{1}{B} (\bar{c} + m_2 s^2)|_{s=j\omega}$$

(<sup>1)</sup> Warunki te odpowiadają koncepcji dynamicznego tłumienia drgań [5].

stanowią funkcje przenoszenia, przy pomocy których wyznaczyć można losowe drgania układu przy wymuszeniach stochastycznych. Jeśli poprzeczna siła wymuszająca  $P(t)$  stanowi stacjonarny proces stochastyczny o wartości oczekiwanej równej zero i o gęstości widmowej  $G(\omega)$ , to gęstości widmowe  $U_1(\omega)$  i  $U_2(\omega)$  drgań poprzecznych mas skupionych  $m_1$  i  $m_2$  oraz drgań giętnych pręta  $U(\omega)$  wynoszą

$$(3.17) \quad \begin{aligned} U_1(\omega) &= |L_1(\omega)|^2 G(\omega), & U_2(\omega) &= |L_2(\omega)|^2 G(\omega), \\ U(\omega) &= |L(\omega)|^2 G(\omega). \end{aligned}$$

#### 4. SWOBODNE DRGANIA GIĘTNE PRĘTA

Funkcje przenoszenia (3.16) stają się nieokreślone, gdy zeruje się ich mianownik

$$(4.1) \quad B|_{s=j\omega} = 0,$$

czyli

$$(4.2) \quad [c + \check{c}(\omega) - \omega^2 m_2] (c - \omega^2 m_1) - c^2 = 0.$$

Pierwiastki równania (4.2) są częstościami  $\omega_s$  ( $s=1, 2, \dots, n+2$ ) swobodnych drgań poprzecznych mas skupionych  $m_1$  i  $m_2$  oraz swobodnych drgań giętnych pręta. Dla opisanego swobodnych drgań układu w dziedzinie czasu można dokonać odwrotne transformacji Fouriera równania (3.3). W wyniku otrzymuje się, z uwzględnieniem (2.9) i (2.11), równanie

$$(4.3) \quad m_2 \ddot{u}_2 + c(u_2 - u_1) + H u_2 = 0,$$

w którym  $H$  jest liniowym operatorem różniczkowym

$$(4.4) \quad H = h_0 + j^{-1} h_1 \frac{d}{dt} + j^{-2} h_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots + j^{-n} h_n \frac{d^n}{dt^n}$$

o współczynnikach

$$(4.5) \quad h_0 = a_0 + j b_0, \quad h_1 = a_1 + j b_1, \dots, h_n = a_n + j b_n.$$

Z równania (3.1) otrzymuje się dla  $P=0$

$$(4.6) \quad u_2 = u_1 + \frac{m_1}{c} \ddot{u}_1.$$

W wyniku podstawienia (4.4) i (4.6) do (4.3) otrzymuje się równanie

$$(4.7) \quad h_0 u_1 + j^{-1} h_1 \frac{du_1}{dt} + \left( m_1 + m_2 + h_0 \frac{m_1}{c} + j^{-2} h_2 \right) \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \dots + j^{-n} h_n \frac{m_1}{c} \frac{d^{n+2} u_1}{dt^{n+2}} = 0.$$

Przy założeniu, że wszystkie częstości  $\omega_s$  są różne, można rozwiązanie równania (4.7) przedstawić w postaci

$$(4.8) \quad u_1 = \sum_{s=1}^{n+2} \alpha_s \exp(j\omega_s t).$$

Aby wyznaczyć współczynniki  $\alpha_s$  należy znać następujące wartości początkowe:

$$(4.9) \quad u_1|_{t=0} = u_{10}, \quad \left. \frac{du_1}{dt} \right|_{t=0} = \dot{u}_{10}, \dots, \quad \left. \frac{d^{n+1} u_1}{dt^{n+1}} \right|_{t=0} = u_{10}^{(n+1)}.$$

Na podstawie (4.8) i (4.9) otrzymuje się równanie macierzowe

$$(4.10) \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{W} \boldsymbol{\alpha},$$

w którym oznaczono

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{10} \\ \dot{u}_{10} \\ \ddot{u}_{10} \\ \vdots \\ u_{10}^{(n+1)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n+2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j\omega_1 & j\omega_2 & j\omega_{n+2} \\ (j\omega_1)^2 & (j\omega_2)^2 & (j\omega_{n+2})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (j\omega_1)^{n+1} & (j\omega_2)^{n+1} & (j\omega_{n+2})^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik głównej macierzy  $\mathbf{W}$  wynosi

$$(4.11) \quad \det \mathbf{W} = j^N V, \quad N = \sum_{n=1}^{n+1} n.$$

$V$  jest wyznacznikiem Vandermonde'a,

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n+2} \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \dots & \omega_{n+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \omega_1^{n+1} & \omega_2^{n+1} & \dots & \omega_{n+2}^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Przy braku krotnych częstotliwości  $\omega_s$  wyznacznik Vandermonde'a jest różny od zera, tzn. macierz  $\mathbf{W}$  jest nieosobliwa i współczynniki  $\alpha_s$  mogą być wyznaczone ze wzoru

$$(4.12) \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{u}_0.$$

swobodne drgania poprzeczne masy  $m_2$  oraz swobodne drgania gięte pręta są zgodne z (2.1), (4.6) i (4.8) określone wzorami:

$$(4.13) \quad u_2 = \sum_{s=1}^{n+2} \beta_s \exp(j\omega_s t), \quad \beta_s = \alpha_s \left( 1 - \frac{m_1}{c} \omega_s^2 \right),$$

$$u = \frac{m_1}{c} \sum_{s=1}^{n+2} \alpha_s \omega_s^2 \exp(j\omega_s t).$$

## 5. UWAGI KOŃCOWE

W ogólnym przypadku drgania poprzeczne mas skupionych w układach prętowych mogą być sprzężone z drganiami innych rodzajów (np. z drganiami obrotowymi mas skupionych w płaszczyźnie drgań poprzecznych). Sposób rozwiązania zagadnienia sprzężonych drgań układów z więzami zależnymi od częstotliwości w oparciu o liniowy model dyskretny oraz drgań układów o większe liczbie stopni swobody jest analogiczny do przedstawionego powyżej.

W wielu układach mechanicznych na własności więzów wpływają czynniki nie uwzględnione w niniejszej pracy. W odniesieniu do podkładek elastycznych i łożysk ślizgowych jednym z takich czynników może być np. temperatura. Więzy wykonane z elementów gumowych i gumopodobnych wykazują niejednokrotnie istotny rozrzut własności w ramach wyrobów tej samej serii oraz podlegają procesowi starzenia. W takich przypadkach współczynniki funkcji reprezentujących sztywność dynamiczną więzów w dziedzinie częstości mogą być traktowane jako wielkości losowe.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. KOLENDA, *Drgania giętne prętów z więzami zależnymi od częstości*, Rozpr. Inżyn., **31**, 3, 1983.
2. J. KOLENDA, *Drgania maszyn elastycznie posadowionych na podkładkach o własnościach zależnych od częstości*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej nr 365, Bud. Okręt., 39, 1983.
3. J. KOLENDA, *Eigenschwingungen einer direkt auf einem nachgiebigen Fundament aufgestellten Maschine*, Schiffbau Forschung, **21**, 2, 1982.
4. A. STRZAŁKOWSKI, A. SŁIŻYŃSKI, *Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów*, PWN, Warszawa 1973.
5. Z. OSIŃSKI, *Teoria drgań*, PWN, Warszawa 1978.

#### Резюме

#### ДИСКРЕТНОЕ ОПИСАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ С СВЯЗЯМИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ЧАСТОТЫ

Работа касается расчетов изгибных колебаний дискретных моделей стержней с связями зависящими от частоты. Упругие, инерционные и демпфирующие свойства связей описывается комплексной функцией, представляющей динамическую жесткость связей в частотной области. Использование этой функции указывается для системы с двумя степенями свободы. Рассматриваются вынужденные и свободные колебания этой системы.

#### SUMMARY

#### DISCRETE DESCRIPTION OF FLEXURAL VIBRATIONS OF BARS WITH CONSTRAINTS DEPENDING ON FREQUENCY

The paper deals with the calculation of flexural vibrations of discrete bar models with constraints depending on frequency. Elastic inertial and damping properties of the constraints are described by the complex function representing the dynamical stiffness of the constraints in the frequency domain. The application of this function is presented for the system of two degrees of freedom. Forced and free vibrations of this system are considered.

POLITECHNIKA GDAŃSKA  
INSTYTUT OKRETOWY

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 maja 1983 r.