

DRGANIA GIĘTNE PRĘTÓW Z WIĘZAMI ZALEŻNYMI OD CZĘSTOŚCI

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

W pracy omówiono zagadnienie obliczeń drgań giętych prętów z więzami dwustronnymi o własnościach zależnych od częstości. Sprężyste i tłumiące własności więzów opisano funkcją zespoloną określającą sztywność dynamiczną więzów w dziedzinie częstości. Wykorzystanie tej funkcji przedstawiono na przykładzie wymuszonych i swobodnych drgań giętych pręta. Rozpatrzone przypadki wymuszeń skupionych i rozłożonych w ujęciu deterministycznym i probabilistycznym. Stwierdzono, że w przypadku więzów o własnościach zależnych od częstości funkcje własne drgań giętych nie są ortogonalne.

1. WSTĘP

Problematyka drgań układów mechanicznych z elastycznymi więzami jest szeroko naświetlona w literaturze. Rosnące wymagania odnośnie dokładności analizy drgań i chęć ograniczenia kosztownych badań układów rzeczywistych uzasadniają celowość należytego uwzględnienia wpływu częstości drgań na charakterystyki więzów. Przypadek układów analizowanych jako modele dyskretne z więzami zależnymi od częstości rozpatrzono w pracy [1]. W odniesieniu do modeli ciągłych zagadnienie to analizowano w pracach [2 i 3] na przykładzie drgań skrętnych oraz podłużno-skrętnych pręta. Niniejsza praca dotyczy drgań giętych pręta z więzami dwustronnymi o własnościach zależnych od częstości.

2. CHARAKTERYSTYKI WIĘZÓW

Poniżej ograniczono się do rozpatrzenia więzów dwustronnych, których podatność dynamiczna w istotny sposób zależy od częstości. Zachodzi zatem zależność

$$(2.1) \quad y^{(t)} = D^{(t)} f^{(t)},$$

w której występują następujące oznaczenia:

$$y^{(t)} = \{y_r^{(t)}\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ z \\ \varphi \\ \psi \\ \vartheta \end{Bmatrix}_{(t)}, \quad f^{(t)} = \{f^{(t)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}_{(t)}$$

$D^{(i)}$ oznacza macierz podatności dynamicznej więzów przy częstotliwości ω_i o postaci

$$D^{(i)} = [d_{rs}^{(i)}]_{6 \times 6}, \quad r, s = 1, 2, \dots, 6,$$

wiążącą zespolone amplitudy liniowych deformacji więzów u, w, z w kierunkach trzech wzajemnie prostopadłych osi oraz kątowych deformacji więzów φ, ψ, ϑ względem tych osi z zespolonymi amplitudami wymuszających sił F_1, F_2, F_3 i momentów M_1, M_2, M_3 , przyłożonych do więzów i działających z częstotliwością ω_i względem tych samych osi. Współczynnik dynamicznej podatności $d_{rs}^{(i)}$ może być zdefiniowany następująco:

$$(2.2) \quad d_{rs}^{(i)} = \frac{\bar{y}_r^{(i)} \exp [j(\omega_i t + \beta_r^{(i)})]}{f_s^{(i)} \exp [j(\omega_i t + \varepsilon_s^{(i)})]} = \frac{y_r^{(i)}}{f_s^{(i)}},$$

gdzie $f_s^{(i)}, \varepsilon_s^{(i)}$ oznaczają odpowiednio rzeczywistą amplitudę i fazę s -tego wymuszenia o częstotliwości ω_i oraz $\bar{y}_r^{(i)}, \beta_r^{(i)}$ rzeczywistą amplitudę i fazę r -tej deformacji więzów pod wpływem s -tego wymuszenia o częstotliwości ω_i .

Przy założeniu, że macierz $D^{(i)}$ jest nieosobliwa, można napisać

$$(2.3) \quad f^{(i)} = C^{(i)} y^{(i)},$$

gdzie $C^{(i)}$ jest macierzą sztywności dynamicznej więzów przy częstotliwości ω_i :

$$(2.4) \quad C^{(i)} = [D^{(i)}]^{-1}.$$

Zakłada się, że charakterystyki podatności więzów przy danej częstotliwości ω_i są liniowe (lub zlinearyzowane), tzn. że macierze $D^{(i)}$ i $C^{(i)}$ są dla $\omega_i = \text{const}$ stałe w analizowanym zakresie amplitud drgań. Zależność podatności od częstotliwości oznacza, że identyfikacja podatności powinna obejmować zakres częstotliwości odpowiadający warunkom eksploatacyjnym. Jeśli pomiary prowadzone są kolejno dla częstotliwości $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, to zgodnie z (2.2) wyznaczyć można macierze podatności dynamicznej więzów $D^{(0)}, D^{(1)}, \dots, D^{(n)}$. Z kolei stosując znane procedury numerycznego odwracania zespolonych macierzy wyliczyć można macierze sztywności dynamicznej więzów $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(n)}$. Współczynniki sztywności $c_{rs}^{(0)}, c_{rs}^{(1)}, \dots, c_{rs}^{(n)}$ można przedstawić w postaci:

$$(2.5) \quad c_{rs}^{(i)} = k_{rs}^{(i)} + j l_{rs}^{(i)}.$$

Zgodnie z założeniem współczynniki $k_{rs}^{(0)}, k_{rs}^{(1)}, \dots, k_{rs}^{(n)}$ różnią się wartościami. To samo może dotyczyć części urojonych współczynników sztywności. Zachodzi zatem funkcyjna zależność

$$(2.6) \quad c_{rs}^{(i)} = f(\omega_i) = \check{c}_{rs}(\omega).$$

Uwzględniając zespoloną postać (2.5) współczynników $c_{rs}^{(i)}$ można napisać

$$(2.7) \quad \check{c}_{rs}(\omega) = \check{k}_{rs}(\omega) + j \check{l}_{rs}(\omega),$$

Funkcja $\check{k}_{rs}(\omega)$ może być wyznaczona jako funkcja określająca równanie krzywej przechodzącej przez punkty $k_{rs}^{(0)}, k_{rs}^{(1)}, \dots, k_{rs}^{(n)}$ w dziedzinie częstotliwości, tj. na płaszczyźnie $k_{rs}^{(i)}, \omega$. Podobnie funkcja $\check{l}_{rs}(\omega)$ określa równanie krzywej przechodzącej

przez punkty $l_{rs}^{(0)}, l_{rs}^{(1)}, \dots, l_{rs}^{(n)}$ na płaszczyźnie $l_{rs}^{(0)}, \omega$. W szczególności funkcje te mogą być, na podstawie znanych formuł interpolacyjnych, przedstawione w sposób przybliżony wielomianem co najwyżej n -tego stopnia. Na podstawie znajomości funkcji (2.7) można utworzyć macierz

$$(2.8) \quad \tilde{C}(\omega) = \tilde{K}(\omega) + j\tilde{L}(\omega),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\omega) &= [\tilde{c}_{rs}(\omega)], & \tilde{K}(\omega) &= [k_{rs}(\omega)]_{6 \times 6}, \\ \tilde{L}(\omega) &= [l_{rs}(\omega)]_{6 \times 6}, & r, s &= 1, 2, \dots, 6. \end{aligned}$$

$\tilde{C}(\omega)$ oznacza macierz sztywności dynamicznej więzów w dziedzinie częstości, za pomocą której wyrazić można relacje pomiędzy transformatami Fouriera deformacji więzów $\tilde{y}_r(\omega)$ i wymuszeń $\tilde{f}_r(\omega)$ w postaci

$$(2.9) \quad \tilde{f}(\omega) = \tilde{C}(\omega) \tilde{y}(\omega),$$

gdzie oznaczono

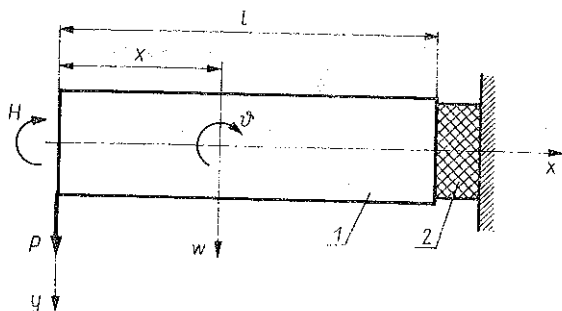
$$\tilde{f}(\omega) = \{\tilde{f}_r(\omega)\}, \quad \tilde{y}(\omega) = \{\tilde{y}_r(\omega)\}.$$

Sposób wykorzystania macierzy $\tilde{C}(\omega)$ w obliczeniach drgań układów ciągłych przedstawiono poniżej na przykładzie drgań giętych pręta.

3. WYMUSZONE DRGANIA GIĘTNE PRĘTA Z WIĘZAMI O WŁASNOŚCIACH ZALEŻNYCH OD CZĘSTOŚCI

Rozpatrzmy pręt pryzmatyczny o długości l (rys. 1), poddany na swobodnym końcu działaniu poprzecznej siły

$$(3.1) \quad P(t) = \sum_k P_k \exp(j\omega_k t)$$



Rys. 1. Schemat analizowanego układu.

l — pręt, 2 — więzy, l — długość pręta, w — ugięcie pręta, ψ — kąt ugięcia osi pręta, H, P — skupione wymuszenia zewnętrzne w przekroju $x=0$.

i momentu gnącego

$$(3.2) \quad H(t) = \sum_k H_k \exp(j\omega_k t)$$

oraz reakcji więzów na drugim końcu. Zakłada się, że wymuszenia typu (3.1) i (3.2) wywołują jedynie giętne deformacje więzów w płaszczyźnie rysunku, zatem do obliczeń można przyjąć macierz $\tilde{C}(\omega)$ w postaci

$$(3.3) \quad \tilde{C}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{22}(\omega) & \tilde{c}_{26}(\omega) \\ \tilde{c}_{62}(\omega) & \tilde{c}_{66}(\omega) \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\tilde{f}_2(\omega) = \tilde{F}_2(\omega)$ i $\tilde{f}_6(\omega) = \tilde{M}_3(\omega)$ oznaczają transformaty Fouriera siły poprzecznej i momentu gnącego przyłożonych do więzów, to transformaty Fouriera reakcji więzów $\tilde{R}_2(\omega)$ i $\tilde{R}_6(\omega)$ wynoszą zgodnie z (2.9)

$$(3.4) \quad \begin{Bmatrix} \tilde{R}_2(\omega) \\ \tilde{R}_6(\omega) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \tilde{F}_2(\omega) \\ \tilde{M}_3(\omega) \end{Bmatrix} = - \tilde{C}(\omega) \begin{Bmatrix} \tilde{w}(l, \omega) \\ \tilde{\vartheta}(l, \omega) \end{Bmatrix},$$

gdzie $\tilde{w}(l, \omega)$ i $\tilde{\vartheta}(l, \omega)$ oznaczają transformaty Fouriera przemieszczeń poprzecznych i kątowych pręta $w(x, t)$ i $\vartheta(x, t)$ w przekroju $x=l$. Równanie różniczkowe drgań giętych pręta przyjęto w postaci

$$(3.5) \quad \rho A \ddot{w} + EJ w^{IV} = 0,$$

gdzie A oznacza pole przekroju poprzecznego pręta, ρ gęstość materiału pręta, EJ sztywność giętą pręta. Warunki brzegowe są następujące:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x=0: & \quad EJ w'''(0, t) = P(t), & EJ w''(0, t) = -H(t), \\ x=l: & \quad EJ w'''(l, t) = -R_2(t), & EJ w''(l, t) = R_6(t). \end{aligned}$$

Zachowano przy tym konwencję znaków przyjętą w [4], zgodnie z którą zachodzi także związek

$$(3.7) \quad \vartheta(x, t) = w'(x, t),$$

Rozwiązania równania (3.5) szukamy w postaci

$$(3.8) \quad w(x, t) = \sum_k w_k(x) \exp(j\omega_k t).$$

W wyniku podstawienia (3.8) do (3.5) otrzymuje się

$$(3.9) \quad w_k(x) = A_{k1} \cos \lambda_k x + A_{k2} \sin \lambda_k x + A_{k3} \operatorname{ch} \lambda_k x + A_{k4} \operatorname{sh} \lambda_k x,$$

gdzie A_{km} oznacza stałe,

$$\lambda_k = \sqrt[4]{\frac{A\rho}{EJ}} \omega_k^2.$$

Warunki (3.6) prowadzą z uwzględnieniem (3.1)–(3.4), (3.7) i (3.8) do zależności następujących:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} EJ w_k'''(0) &= P_k, & EJ w_k''(0) &= -H_k, \\ EJ w_k'''(l) &= \tilde{c}_{22}(\omega_k) w_k(l) + \tilde{c}_{26}(\omega_k) w_k'(l), \\ EJ w_k''(l) &= -\tilde{c}_{62}(\omega_k) w_k(l) - \tilde{c}_{66}(\omega_k) w_k'(l). \end{aligned}$$

Ze wzorów (3.9) i (3.10) otrzymuje się

$$(3.11) \quad A_{km} = \frac{|A_{km}|}{|A_k|}, \quad m=1, 2, 3, 4.$$

Wyznacznik główny ma postać następującą:

$$|A_k| = \det [d_{mm}], \quad m, n=1, 2, 3, 4.$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= 0, & d_{12} &= -EJ\lambda_k^3, & d_{13} &= 0, & d_{14} &= EJ\lambda_k^3, \\ d_{21} &= -EJ\lambda_k^2, & d_{22} &= 0, & d_{23} &= EJ\lambda_k^2, & d_{24} &= 0, \\ d_{31} &= EJ\lambda_k^2 \sin \lambda_k l - \check{c}_{22}(\omega_k) \cos \lambda_k l + \check{c}_{26}(\omega_k) \lambda_k \sin \lambda_k l, \\ d_{32} &= -EJ\lambda_k^3 \cos \lambda_k l - \check{c}_{22}(\omega_k) \sin \lambda_k l - \check{c}_{26}(\omega_k) \lambda_k \cos \lambda_k l, \\ d_{33} &= EJ\lambda_k^3 \operatorname{sh} \lambda_k l - \check{c}_{22}(\omega_k) \operatorname{ch} \lambda_k l - \check{c}_{26}(\omega_k) \lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k l, \\ d_{34} &= EJ\lambda_k^3 \operatorname{ch} \lambda_k l - \check{c}_{22}(\omega_k) \operatorname{sh} \lambda_k l - \check{c}_{26}(\omega_k) \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k l, \\ d_{41} &= -EJ\lambda_k^2 \cos \lambda_k l + \check{c}_{62}(\omega_k) \cos \lambda_k l - \check{c}_{66}(\omega_k) \lambda_k \sin \lambda_k l, \\ d_{42} &= -EJ\lambda_k^2 \sin \lambda_k l + \check{c}_{62}(\omega_k) \sin \lambda_k l + \check{c}_{66}(\omega_k) \lambda_k \cos \lambda_k l, \\ d_{43} &= EJ\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k l + \check{c}_{62}(\omega_k) \operatorname{ch} \lambda_k l + \check{c}_{66}(\omega_k) \lambda_k \operatorname{sh} \lambda_k l, \\ d_{44} &= EJ\lambda_k^2 \operatorname{sh} \lambda_k l + \check{c}_{62}(\omega_k) \operatorname{sh} \lambda_k l + \check{c}_{66}(\omega_k) \lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k l. \end{aligned}$$

Wyznacznik $|A_{km}|$ powstaje z wyznacznika $|A_k|$ przez zastąpienie m -tej kolumny — kolumną

$$\begin{pmatrix} P_k \\ -H_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. SWOBODNE DRGANIA GIĘTNE PRĘTA Z WIĘZAMI O WŁASNOŚCIACH ZALEŻNYCH OD CZĘSTOŚCI

Swobodnych drgań giętnych pręta poszukiwać będziemy w postaci iloczynu funkcji o rozdzielonych zmiennych:

$$(4.1) \quad w(x, t) = W(x) T(t).$$

W wyniku podstawienia (4.1) do 3.5) otrzymuje się równania różniczkowe zwyczajne, których rozwiązaniami są funkcje

$$(4.2) \quad \begin{aligned} W(x) &= a_1 \cos \lambda x + a_2 \sin \lambda x + a_3 \operatorname{ch} \lambda x + a_4 \operatorname{sh} \lambda x, \\ T(t) &= b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t, \end{aligned}$$

przy czym

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{Ap}{EJ} \omega^2}.$$

Warunki brzegowe są następujące:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} x=0: & \quad EJW'''(0, t)=0, \quad EJW''(0, t)=0, \\ x=l: & \quad EJW''(l, t)=-R_2(t), \quad EJW'(l, t)=R_6(t) \end{aligned}$$

Warunki (4.3) prowadzą z uwzględnieniem (3.3), (3.4), (3.7), (4.1) i (4.2) do zależności

$$[A] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = 0.$$

Elementy macierzy $[A]$ tworzy się z macierzy $[A_k]$ przez podstawienie ω i λ na miejsce ω_k i λ_k . Stałe a_m mogą przyjmować wartości różne od zera, gdy

$$(4.4) \quad \det [A] = 0.$$

Równanie (4.4) jest równaniem częstości, którego pierwiastki $\omega_1, \omega_2, \dots$ są częstościami swobodnych drgań giętnych pręta. Funkcje własne

$$W_i(x) = a_{i1} \cos \lambda_i x + a_{i2} \sin \lambda_i x + a_{i3} \operatorname{ch} \lambda_i x + a_{i4} \operatorname{sh} \lambda_i x$$

spełniają warunki (4.3) i równanie

$$(4.5) \quad \frac{d^4 W_i}{dx^4} - \lambda_i^4 W_i = 0, \quad \left(\lambda_i = \sqrt{\frac{A\rho}{EJ}} \omega_i \right).$$

Można zatem napisać

$$\lambda_i^4 \int_0^l W_i W_j dx = \int_0^l \frac{d^4 W_i}{dx^4} W_j dx = [W_i''' W_j - W_i'' W_j' + W_i' W_j'' - W_i W_j''']_0^l + \lambda_j^4 \int_0^l W_i W_j dx.$$

skąd z uwzględnieniem (4.3) wynika

$$(4.6) \quad (\lambda_i^4 - \lambda_j^4) \int_0^l W_i(x) W_j(x) dx = W_i'''(l) W_j(l) - W_i''(l) W_j'(l) + W_i'(l) W_j''(l) - W_i(l) W_j'''(l).$$

Zgodnie z (3.3), (3.4), (3.7) i (4.3) zachodzi

$$EJW_i'''(l) = \tilde{c}_{22}(\omega_i) W_i(l) + \tilde{c}_{26}(\omega_i) W_i'(l),$$

$$EJW_i''(l) = -\tilde{c}_{62}(\omega_i) W_i(l) - \tilde{c}_{66}(\omega_i) W_i'(l)$$

i zależność (4.6) przyjmuje postać

$$(4.7) \quad (\lambda_i^4 - \lambda_j^4) \int_0^l W_i(x) W_j(x) dx = \frac{1}{EJ} \{ W_i(l) W_j(l) [\tilde{c}_{22}(\omega_i) - \tilde{c}_{22}(\omega_j)] + W_i'(l) W_j'(l) [\tilde{c}_{66}(\omega_i) - \tilde{c}_{66}(\omega_j)] + W_i'(l) W_j(l) [\tilde{c}_{26}(\omega_i) - \tilde{c}_{62}(\omega_j)] + W_i(l) W_j'(l) [\tilde{c}_{62}(\omega_i) - \tilde{c}_{26}(\omega_j)] \}.$$

Prawa strona zależności (4.7) świadczy, że funkcje własne drgań giętnych pręta z więzami zależnymi od częstości nie są ortogonalne. Z warunków brzegowych dla $x=0$ wynika

$$(4.8) \quad a_{i3} = a_{i1}, \quad a_{i4} = a_{i2}.$$

Pomiędzy stałymi a_{i1} oraz a_{i2} zachodzą związki

$$(4.9) \quad a_{i2} = \frac{|\Delta_{i2}|}{|\Delta_{i1}|} a_{i1}, \quad i=1, 2, \dots,$$

gdzie $|\Delta_{i1}|$ oraz $|\Delta_{i2}|$ są podwyznacznikami utworzonymi przez skreślenie pierwszej kolumny i ostatniego wiersza oraz drugiej kolumny i ostatniego wiersza w wyznaczniku $|\Delta_i|$. Wyznacznik $|\Delta_i|$ tworzy się podobnie jak $|\Delta_k|$. Mamy zatem

$$(4.10) \quad w(x, t) = \sum_i W_i(x) (b_{i1} \sin \omega_i t + b_{i2} \cos \omega_i t),$$

gdzie b_{i1} , b_{i2} oznaczają stałe określone warunkami początkowymi,

$$(4.11) \quad W_i(x) = \cos \lambda_i x + \operatorname{ch} \lambda_i x + \frac{|\Delta_{i1}|}{|\Delta_{i1}|} (\sin \lambda_i x + \operatorname{sh} \lambda_i x).$$

Warunki początkowe mają postać

$$(4.12) \quad \begin{aligned} w(x, 0) &= u_0(x), \\ \dot{w}(x, 0) &= v_0(x). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (4.10) znajdziemy

$$(4.13) \quad u_0(x) = \sum_i b_{i2} W_i(x)$$

oraz

$$(4.14) \quad v_0(x) = \sum_i \omega_i b_{i1} W_i(x).$$

Ograniczając się do $i=1, 2, \dots, n$ oraz mnożąc równania (4.13) i (4.14) kolejno przez $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$, a następnie całkując obie strony otrzymanych w ten sposób równań względem x w przedziale od 0 do 1, można napisać następujące równania macierzowe:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} Cb &= u, \\ Da &= v, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$a = \begin{Bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix},$$

$$C = [c_{ij}]_{n \times n}, \quad D = [d_{ij}]_{n \times n},$$

$$u_i = \int_0^l u_0(x) W_i(x) dx, \quad v_i = \int_0^l v_0(x) W_i(x) dx,$$

$$c_{ij} = \int_0^l W_i(x) W_j(x) dx, \quad d_{ij} = \omega_i \int_0^l W_i(x) W_j(x) dx.$$

Utworzone w ten sposób macierze C i D są nieosobliwe, zatem

$$(4.16) \quad b = C^{-1} u, \quad a = D^{-1} v.$$

5. WYKORZYSTANIE FUNKCJI WŁASNYCH DO OPISU WYMUSZONYCH DRGAŃ GIĘTNYCH PRĘTA Z WIĘZAMI O WŁASNOŚCIACH ZALEŻNYCH OD CZĘSTOŚCI

Drgania wymuszone rozpatrywanego układu liniowego mogą być wyznaczone jako superpozycje drgań pochodzących od poszczególnych wymuszeń. Z tego powodu rozważymy oddzielnie przypadek wymuszeń rozłożonych i przypadek wymuszeń skupionych. Przy wymuszeniach rozłożonych równanie (3.5) zastąpimy równaniem

$$(5.1) \quad \rho A \ddot{w} + EJ w^{IV} = q$$

oraz przyjmijmy następujące warunki brzegowe na swobodnym końcu pręta:

$$(5.2) \quad w''(0, t) = 0, \quad w'''(0, t) = 0.$$

Założymy również, że znamy funkcje własne (4.11). Rozwiązań równania (5.1) poszukiwać będziemy w postaci

$$(5.3) \quad w(x, t) = \sum_i W_i(x) T_i(t).$$

W tym celu należy dokonać rozkładu funkcji $q(x, t)$ w szereg funkcji własnych drgań giętnych pręta:

$$(5.4) \quad q(x, t) = \sum_i W_i(x) q_i(t).$$

Ograniczając się do $i=1, 2, \dots, n$ oraz mnożąc funkcję (5.4) kolejno przez $W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x)$, a następnie całkując obie strony otrzymanych w ten sposób równań względem x w przedziale od 0 do 1, znajdziemy

$$(5.5) \quad Aq = w,$$

gdzie

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{Bmatrix},$$

$$a_{ij} = \int_0^l W_i(x) W_j(x) dx, \quad w_i(t) = \int_0^l q(x, t) W_i(x) dx.$$

Otrzymana w ten sposób macierz A jest nieosobliwa, zatem

$$(5.6) \quad q = Gw, \quad G = [g_{ij}] = A^{-1}.$$

Po podstawieniu (5.3) i (5.4) do równania (5.1) otrzymuje się

$$\frac{\ddot{T}_i}{T_i} + \frac{EJW_i^{IV}}{\rho AW_i} = \frac{q_i}{\rho AT_i},$$

czyli z uwzględnieniem (4.5)

$$(5.7) \quad \ddot{T}_i + \omega_i^2 T_i = \frac{q_i}{\rho A},$$

Rozwiązaniem równania (5.7) dla $\omega_i \neq 0$ jest funkcja

$$(5.8) \quad T_i = \frac{1}{\rho A \omega_i} \int_0^t q_i(\tau) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau.$$

Analogicznie można wykorzystać funkcje własne do opisu drgań przy wymuszeniach skupionych. Tak na przykład, jeśli nie występują obciążenia rozłożone i w punkcie $x = x_r$ działa skupiona siła poprzeczna $P_r(t)$, to równanie (5.1) przyjmie postać

$$(5.9) \quad \rho A \ddot{w} + EJW^{IV} = \delta(x - x_r) P_r(t),$$

gdzie δ oznacza dystrybucję Diraca. Poszukując drgań wymuszonych pręta w postaci (5.3) należy rozłożyć funkcję wymuszenia w szereg funkcji własnych drgań giętych pręta:

$$(5.10) \quad \delta(x - x_r) P_r(t) = \sum_i W_i(x) q_i(t).$$

Funkcje $q_i(t)$ można wyznaczyć analogicznie do przypadku rozkładu (5.4). Dochodzi się w ten sposób do zależności (5.6), w której elementami macierzy kolumnowej w są funkcje

$$(5.11) \quad w_i(t) = \int_0^l \delta(x - x_r) P_r(t) W_i(x) dx = W_i(x_r) P_r(t).$$

Jeśli siła $P_r(t)$ ma postać

$$(5.12) \quad P_r(t) = p_r \exp(j\omega t), \quad p_r = \text{const},$$

to zgodnie z (5.3), (5.6), (5.7) i (5.11) otrzymuje się rozwiązanie

$$(5.13) \quad w(x, t) = \tilde{h}_r(x, x_r, \omega) p_r \exp(j\omega t),$$

w którym \tilde{h}_r jest funkcją przenoszenia dla wymuszenia skupionego $P_r(t)$ o postaci

$$(5.14) \quad \tilde{h}_r(x, x_r, \omega) = \frac{1}{\rho A} \sum_{i=1}^n W_i(x) \frac{q_{ir}}{\omega_i^2 - \omega^2}.$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenie:

$$q_{ir} = \sum_{i=1}^n g_{ij} W_j(x_r).$$

Znajomość funkcji przenoszenia pozwala wyznaczyć impulsową funkcję przejścia h_r :

$$(5.15) \quad h_r(x, x_r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_r(x, x_r, \omega) \exp(j\omega t) d\omega,$$

z pomocą której drgania pręta można wyrazić następująco:

$$(5.16) \quad w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(x, x_r, t - \tau) P_r(\tau) d\tau.$$

W odróżnieniu od (5.12) siła wymuszająca może tu charakteryzować się dowolnym wykresem czasowym.

Jeśli siła $P_r(t)$ stanowi stacjonarny proces stochastyczny o wartości oczekiwanej równej zeru i gęstości widmowej $\gamma_r(\omega)$, to gęstość widmowa $\gamma_{wr}(\omega)$ giętych drgań pręta w przekroju x wynosi

$$(5.17) \quad \gamma_{wr} = \tilde{h}_r \gamma_r \tilde{h}_r^* = |\tilde{h}_r|^2 \gamma_r.$$

Symbol $(\)^*$ oznacza wielkość zespoloną sprzężoną.

Tworząc funkcję

$$(5.18) \quad \rho_{rs}(x_r, x_s, \tau) = \langle q(x_r, t + \tau) q^*(x_s, t) \rangle$$

(gdzie $\langle \ \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną) oraz wyznaczając jej transformatę Fouriera

$$(5.19) \quad \gamma_{rs}(x_r, x_s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{rs}(x_r, x_s, \tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau,$$

można określić gęstość widmową giętych drgań pręta przy losowym stacjonarnym obciążeniu rozłożonym $q(x, t)$ ze wzoru

$$(5.20) \quad \gamma_{wq}(x, \omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{h}_r(x, x_r, \omega) \tilde{h}_s^*(x, x_s, \omega) \gamma_{rs}(x_r, x_s, \omega) dx_r dx_s,$$

Inne przypadki wymuszeń losowych (np. łączne występowanie obciążeń skupionych i rozłożonych, niestacjonarne procesy stochastyczne) mogą być rozpatrzone podobnie jak w pracy [5].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. KOLENDA, *Drgania maszyn elastycznie posadowionych na podkładkach o własnościach zależnych od częstości*, Zesz. Nauk. P. G., Bud. Okręt. [w druku].
2. J. KOLENDA, *Drgania skrętne prętów z więzami zależnymi od częstości*, Zesz. Nauk. P. G., Bud. Okręt. [w druku].

3. J. KOLENDA, *Sprężone drgania prętów z więzami zależnymi od częstości*, Zesz. Nauk. P. G., Bud. Okręt. [w druku].
4. J. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętnej i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów linii wałów*, Mech. Teor. i Stos., 16, 4, 1978.
5. J. KOLENDA, *Swobodne i wymuszone drgania podatnie podpartego asymetrycznego wału*, Zesz. Nauk. P. G., 319, Bud. Okręt. XXXII, Gdańsk 1980.

Резюме

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ СО СВЯЗЯМИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ЧАСТОТЫ

В работе обсуждена проблема расчетов изгибных колебаний стержней с двухсторонними связями со свойствами зависящими от частоты. Упругие и демпфирующие свойства связей описаны комплексной функцией, определяющей динамическую жесткость связей в области частот. Использование этой функции представлено на примере вынужденных и свободных изгибных колебаний стержня. Рассмотрены случаи сосредоточенных и распределенных вынуждений в детерминистическом и пробалистическом подходах. Констатировано, что в случае связей со свойствами зависящими от частоты, собственные функции изгибных колебаний не являются ортогональными.

SUMMARY

FLEXURAL VIBRATIONS OF RODS WITH FREQUENCY-DEPENDENT CONSTRAINTS

The problem of analysis of flexural vibrations of rods is discussed under the assumption that the two-sided constraints depend on the vibration frequency. The elastic and damping properties of the constraints are described by a complex variable function representing the dynamic rigidity of constraints in the frequency domain. Application of that function is demonstrated on the example of forced and free transversal vibrations of a rod. The cases of concentrated and distributed forces of excitation are considered, both in the deterministic and probabilistic approach. It is found that in the case of frequency-dependent constraints the corresponding eigenfunctions are not orthogonal.

POLITECHNIKA GDAŃSKA
INSTYTUT OKRETOWY, GDAŃSK

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1983 r.