

## WPLYW NIEJEDNORODNOŚCI MATERIAŁU NA KSZTAŁTY NIEKOŁOWYCH PRZEKROJÓW CYLINDRÓW GRUBOŚCIENNYCH CAŁKOWICIE UPLASTYCZNIONYCH W STADIUM ZNISZCZENIA

ANNA DOLLAR (KRAKÓW)

W przedstawionej pracy poszukuje się kształtów cylindrów wykonanych z materiałów o zmiennej granicy plastyczności, poddanych działaniu ciśnienia, które ulegają całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia. W związku z przyjętą metodą małego parametru poszukuje się kształtów odbiegających od kołowego. Uzyskane rozwiązania stanowią uogólnienie rozwiązań z pracy [3] odnoszących się do cylindrów o ustalonym stosunku promieni  $a_0/b_0$  wykonanych dla materiałów o stałej granicy plastyczności na przypadek cylindrów o dowolnym stosunku promieni wykonanych z materiału o zmiennej granicy plastyczności. Analiza problemu doprowadziła również do znalezienia takich niekołowo-symetrycznych rozkładów granicy plastyczności, które zapewniają całkowite uplastycznienie cylindrów kołowych.

### 1. WSTĘP

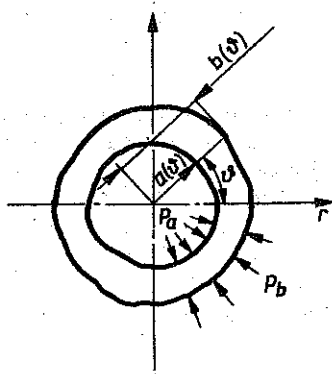
Kształtowanie oparte na warunku całkowitego uplastycznienia konstrukcji w stadium zniszczenia pozwala na wyeliminowanie stref sztywnych bądź sprężystych, co warunkuje lepsze wykorzystanie materiału. Takie kryterium kształtowania elementów konstrukcyjnych w zakresie plastycznym było stosowane w pracach [3] — dla cylindra grubościennego, [2] — dla skręcanego pręta rurowego, [1] — dla pręta silnie zakrzywionego oraz szerzej w przeglądowej pracy [4]. W pracach tych poszukiwano kształtów elementów konstrukcyjnych niewiele odbiegających od powszechnie stosowanych kształtów symetrycznych (koło, pierścień), wykonanych z materiału plastycznie jednorodnego ( $\sigma_0 = \text{const}$ ), idealnie sprężysto-plastycznego.

W przedstawionej pracy zajęto się analizą wpływu zmiennej (na powierzchni przekroju) granicy plastyczności na kształt niekołowego cylindra grubościennego poddanego działaniu ciśnienia, który uplastycznia się całkowicie w stadium zniszczenia. W zastosowanej metodzie rozwinięto w szereg względem małego parametru (charakteryzującego niejednorodność materiału) naprężenia, odkształcenia oraz funkcje  $a(\theta)$  i  $b(\theta)$  określające kształt cylindra. Ograniczono się do rozpatrzenia problemu w pierwszym stopniu przybliżenia. Uzyskane rozwiązanie stanowi uogólnienie rozwiązań z pracy [3] odnoszących się do cylindrów o ustalonym stosunku promieni  $a_0/b_0$  wykonanych z materiału o stałej granicy plastyczności na przypadek cylindrów o dowolnym

stosunku promieni  $a_0/b_0$  wykonanych z materiału o zmiennej granicy plastyczności. Analiza problemu doprowadziła również do znalezienia takich niekołowych rozkładów granicy plastyczności, które zapewniają całkowite uplastycznienie cylindrów kołowych.

## 2. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PODSTAWOWE

Rozważany jest cylinder grubościenny o kształcie scharakteryzowanym we współrzędnych biegunowych promieniami  $a(\theta)$  i  $b(\theta)$  poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego  $p_a$  i zewnętrznego  $p_b$  (rys. 1).



Rys. 1

Przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia i nieściśliwości materiału stan naprężenia w dowolnym punkcie cylindra określony jest trójką składowych  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  oraz  $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$ . Naprężenia te spełniają dwa warunki równowagi wewnętrznej

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z przyjętym kryterium kształtowania w każdym punkcie jest spełniony warunek plastyczności Huberta–Misesa–Hencky'ego:

$$(2.2) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2(r, \theta),$$

gdzie  $\sigma_0(r, \theta)$  oznacza granicę plastyczności zależną od współrzędnych rozpatrywanego punktu.

Trzy równania (2.1) i (2.2) określają trzy niewiadome  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  i  $\tau_{r\theta}$ , zatem problem jest wewnętrznie statycznie pseudowyznaczalny.

Dla znalezienia poszukiwanych funkcji  $a(\theta)$  i  $b(\theta)$  oraz czterech stałych całkowania równań równowagi wewnętrznej (2.1) wykorzystano następujące naprężeniowe warunki brzegowe (równowartości naprężeń promieniowych i obwodowych) wyprowadzone w pracy [3]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p_a &= -\sigma_r(r, \theta)|_{r=a(\theta)} + \frac{a'(\theta)}{a(\theta)} \tau_{r\theta}(r, \theta)|_{r=a(\theta)}, \\ p_a &= -\sigma_\theta(r, \theta)|_{r=a(\theta)} + \frac{a(\theta)}{a'(\theta)} \tau_{r\theta}(r, \theta)|_{r=a(\theta)}, \\ p_b &= -\sigma_r(r, \theta)|_{r=b(\theta)} + \frac{b'(\theta)}{b(\theta)} \tau_{r\theta}(r, \theta)|_{r=b(\theta)}, \\ p_b &= -\sigma_\theta(r, \theta)|_{r=b(\theta)} + \frac{b(\theta)}{b'(\theta)} \tau_{r\theta}(r, \theta)|_{r=b(\theta)}. \end{aligned}$$

Rozwiązania poszukuje się w postaci szeregu małego parametru charakteryzującego niejednorodność materiału.

$$(2.4) \quad x(r, \theta) = x_0 + \alpha x_1(r, \theta) + \alpha^2 x_2(r, \theta) + \alpha^3 x_3(r, \theta) + \dots,$$

gdzie

$$x(r, \theta) = \sigma_0(r, \theta), a(\theta), b(\theta), \sigma_r(r, \theta), \sigma_\theta(r, \theta), \tau_{r\theta}(r, \theta).$$

Wielkości z indeksem „0” są składowymi stanu naprężenia dla cylindra kołowego o promieniach  $a_0$  i  $b_0$ , wykonanego z materiału o stałej granicy plastyczności  $\sigma_{00}$  i nośności granicznej

$$p_b - p_a = \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \ln \frac{a_0}{b_0}.$$

### 3. ROZWIĄZANIE W PIERWSZYM STOPNIU PRZYBLIŻENIA

#### 3.1. Całkowanie równań podstawowych

Po rozwinięciu składowych stanu naprężenia i granicy plastyczności w szereg względem parametru  $\alpha$  i porównaniu współczynników przy pierwszej potędze  $\alpha$  otrzymano układ trzech równań:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta 1}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r1} - \sigma_{\theta 1}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta 1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta 1}}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta 1}}{r} &= 0, \quad \sigma_{r1} - \sigma_{\theta 1} = K(r\theta) \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenie:

$$K(r, \theta) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{\theta 1}.$$

Układ ten można sprowadzić do jednego równania różniczkowego, cząstkowego, drugiego rzędu, niejednorodnego na pierwszą poprawkę naprężenia stycznego  $\tau_{r\theta_1}$ :

$$(3.2) \quad r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_1}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_1}}{\partial \theta^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial r} = \frac{\partial^2 [rK(r, \theta)]}{\partial r \partial \theta}$$

Poszukuje się rozwiązań okresowych ze względu na  $\theta$ . Funkcję  $K(r, \theta)$  można rozwinąć w szereg trygonometryczny

$$(3.3) \quad K(r, \theta) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} k_{\lambda}(r) \cos \lambda \theta.$$

Pierwszej poprawki naprężenia stycznego  $\tau_{r\theta_1}$  należy zatem poszukiwać w postaci szeregu

$$(3.4) \quad \tau_{r\theta_1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \tau_{\lambda}(r) \sin \lambda \theta.$$

Wobec (3.2), (3.3) i (3.4) dla każdego  $\lambda$  musi być spełnione równanie

$$(3.5) \quad r^2 \frac{d^2 \tau_{\lambda}}{dr^2} + 3r \frac{d\tau_{\lambda}}{dr} + \lambda^2 \tau_{\lambda} = -\lambda \frac{d(rk_{\lambda})}{dr}.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania są następujące funkcje promienia: dla  $\lambda \neq 1$

$$(3.6) \quad \tau_{\lambda}(r) = \frac{1}{r} \left[ A_{\lambda} - \lambda \int_{a_0}^r k_{\lambda}(r) \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \right] \times \\ \times \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \frac{1}{r} \left[ B_{\lambda} - \lambda \int_{a_0}^r k_{\lambda}(r) \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \right] \times \\ \times \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right);$$

dla  $\lambda = 1$

$$(3.7) \quad \tau_1(r) = \frac{1}{r} \left[ A_1 \ln \frac{r}{b_0} + B_1 - \int_{a_0}^r k_1(r) dr \right].$$

Pierwszej poprawki naprężenia promieniowego  $\sigma_{r_1}$  poszukuje się w postaci

$$(3.8) \quad \sigma_{r_1}(r, \theta) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma_{\lambda}(r) \cos \lambda \theta.$$

Całkowanie pierwszego z równań równowagi (3.1) z uwzględnieniem kolejno (3.6) i (3.7) oraz (3.8) prowadzi do określenia  $\sigma_{\lambda}(r)$ :

dla  $\lambda \neq 1$

$$(3.9) \quad \sigma_{\lambda}(r) = \frac{1}{r\lambda} \left[ A_{\lambda} - \lambda \int_{a_0}^r k_{\lambda}(r) \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \right] \times \\ \times \left[ \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \sqrt{\lambda^2 - 1} \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] + \\ + \frac{1}{r\lambda} \left[ B_{\lambda} - \lambda \int_{a_0}^r k_{\lambda}(r) \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \right] \times \\ \times \left[ \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] + C_{\lambda};$$

dla  $\lambda = 1$

$$(3.10) \quad \sigma_1(r) = \frac{1}{r} \left[ A_1 \left( \ln \frac{r}{b_0} + 1 \right) + B_1 - \int_{a_0}^r k_1(r) dr \right] + C_1.$$

Stałe  $A_{\lambda}$ ,  $B_{\lambda}$  i  $C_{\lambda}$  należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

### 3.2. Wykorzystanie warunków brzegowych

Rozwinięcie w szereg parametru  $\alpha$  warunków brzegowych (2.3) (przeprawdzone w pracy [3]) i porównanie współczynników przy  $\alpha^1$  prowadzi do warunków brzegowych w pierwszym przybliżeniu:

$$(3.11) \quad \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} a_1(\theta) + a_0 \sigma_{r1}|_{r=a_0} = 0, \\ \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} a_1'(\theta) - a_0 \tau_{r\theta 1}|_{r=a_0} = 0, \\ \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} b_1(\theta) + b_0 \sigma_{r1}|_{r=b_0} = 0, \\ \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} b_1'(\theta) - b_0 \tau_{r\theta 1}|_{r=b_0} = 0.$$

Układ ten można sprowadzić do dwóch równań:

$$(3.12) \quad \tau_{\lambda}(a_0) - \lambda \sigma_{\lambda}(a_0) = 0, \\ \tau_{\lambda}(b_0) - \lambda \sigma_{\lambda}(b_0) = 0.$$

Dla  $\lambda \neq 1$  podstawienie do równań (3.12) wyrażeń na  $\tau_{\lambda}(r)$  i  $\sigma_{\lambda}(r)$  określonych wzorami (3.6) i (3.9) prowadzi do układu dwóch równań na stałe  $A_{\lambda}$ ,  $B_{\lambda}$  i  $C_{\lambda}$  (z których jedna ma spełniać rolę parametru):

$$(3.13) \quad A_{\lambda} c - B_{\lambda} s + C_{\lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} a_0 = 0,$$

$$A_\lambda - \lambda \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr + C_\lambda \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} b_0 = 0,$$

gdzie oznaczono

$$c = \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0}\right),$$

$$s = \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0}\right).$$

W pracy [3] przyjęto  $C_\lambda = 0$ , co wobec  $k_\lambda(r) \equiv 0$  doprowadziło do  $A_\lambda = 0$ ,

$$a_0/b_0 = e^{\frac{-i\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}}.$$

Z układu (3.13) można wyznaczyć stałe  $A_\lambda$  i  $C_\lambda$  jako funkcje parametru  $B_\lambda$ :

$$(3.14) \quad A_\lambda = \frac{1}{a_0 - b_0 c} \left[ a_0 \lambda \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr - b_0 s B_\lambda \right],$$

$$C_\lambda = \frac{-\sqrt{\lambda^2 - 1}}{a_0 - b_0 c} \left[ c \lambda \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr - s B_\lambda \right].$$

Dla  $\lambda = 1$  podstawienie do równań (3.12) wyrażeń na  $\tau_1(r)$  i  $\sigma_1(r)$  określonych wzorami (3.7) i (3.10) pozwala na wyznaczenie stałych  $A_1$  i  $C_1$ :

$$(3.15) \quad A_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Należy zauważyć, że wynik ten można uzyskać ze wzorów (3.14) przez podstawienie  $\lambda = 1$ , a wyrażenia (3.6) i (3.9) na  $\tau_\lambda(r)$  i  $\sigma_\lambda(r)$  można traktować jako poprawne dla  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

#### 4. ZESTAWIENIE KOŃCOWYCH WYNIKÓW I PRZYKŁADY LICZBOWE

##### 4.1. Przypadek ogólny

Wstawienie do wzorów (3.6) i (3.9) stałych  $A_\lambda$  i  $C_\lambda$  określonych wzorami (3.14) pozwala na wyrażenie składowych stanu naprężenia z dokładnością do pierwszego przybliżenia

$$(4.1) \quad \tau_{r\theta} = \alpha \frac{1}{r} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ \left[ B_\lambda - \lambda \int_{a_0}^r k_\lambda(r) \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr \right] \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \left[ a_0 \lambda \int_r^{b_0} k_\lambda(r) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + b_0 \lambda c \int_{a_0}^r k_\lambda(r) \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr - b_0 s B_\lambda \Big] \times \\
 & \times \frac{1}{a_0 - b_0 c} \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \Big\} \sin \lambda \theta, \\
 \sigma_\theta = & \sigma_r + \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} - \alpha \sum_{\lambda=1}^{\infty} k_\lambda(r) \cos \lambda \theta, \\
 (4.1) \quad & \\
 [\text{cd.}] \quad \sigma_r = & \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_0} - p_b + \alpha \frac{1}{r} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ B_\lambda - \lambda \int_{a_0}^r k_\lambda(r) \times \right. \right. \\
 & \times \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \Big] \left[ \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \\
 & \left. \left. - \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] + \left[ a_0 \lambda \int_r^{b_0} k_\lambda(r) \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr + \right. \right. \\
 & \left. \left. + b_0 \lambda c \int_{a_0}^r k_\lambda(r) \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr - b_0 s B_\lambda \right] \times \right. \\
 & \times \frac{1}{a_0 - b_0 c} \left[ \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \sqrt{\lambda^2 - 1} \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] + \\
 & \left. + r \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[ B_\lambda s - \lambda c \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \right] \times \right. \\
 & \left. \times \frac{1}{a_0 - b_0 c} \right\} \cos \lambda \theta.
 \end{aligned}$$

Wyznaczone na podstawie wzorów (3.11) promienie cylindra są następującymi funkcjami kąta  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
 a(\theta) = & a_0 - \alpha \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_{00}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \times \\
 & \times \left[ B_\lambda - \frac{a_0 c - b_0}{a_0 - b_0 c} - \lambda \frac{a_0 s}{a_0 - b_0 c} \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \right], \\
 (4.2) \quad & \\
 b(\theta) = & b_0 - \alpha \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_{00}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left[ B_\lambda - \lambda \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) dr \right].
 \end{aligned}$$

Wstawienie do wzorów (4.1) i (4.2)  $k(r) = 0$  oraz  $a_0/b_0 = e^{\frac{-\pi c}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}}$  (dla ustalonego  $\lambda$ ) prowadzi do wzorów (3.22) i (3.23) z pracy [3]. Wzory (4.1)

i (4.2) stanowią zatem uogólnienie wzorów (3.22) i (3.23) odnoszących się do ustalonych stosunków  $a_0/b_0$  i stałej granicy plastyczności; odnoszą się bowiem do cylindrów o dowolnym stosunku  $a_0/b_0$  przy zmiennej granicy plastyczności; uwzględniają jednocześnie przypadek  $\lambda = 1$ . W tym sensie przedstawiona praca stanowi uogólnienie pracy [3].

#### PRZYKŁAD 1

Założono granicę plastyczności jako funkcję kąta  $\theta$ :

$$k_\lambda(r) = k_\lambda = \text{const},$$

1a)

$$\sigma_0(\theta) = \sigma_{00} - \bar{\alpha}\sigma_{00} \sum_{\lambda=1}^{\infty} k_\lambda \cos \lambda\theta,$$

gdzie

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_{00}} \alpha.$$

Przyjęto parametr  $B_\lambda$  w następującej postaci:

$$1b) \quad B_\lambda = -a_0 \frac{k_\lambda}{\lambda} \left[ \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) - \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right].$$

Wyznaczone na podstawie wzorów (4.1) pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia nie zależą od  $r$ :

$$\tau_{r\theta_1} = -\frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{k_\lambda}{\lambda} \sin \lambda\theta,$$

1c)

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{k_\lambda}{\lambda} \cos \lambda\theta,$$

$$\sigma_{\theta_1} = -\frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} k_\lambda \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \cos \lambda\theta.$$

Obliczone na podstawie (4.2) promienie cylindra są następującymi funkcjami kąta  $\theta$ :

$$a(\theta) = a_0 + \bar{\alpha}a_0 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{k_\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda\theta,$$

1d)

$$b(\theta) = b_0 + \bar{\alpha}b_0 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{k_\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda\theta.$$

Przyjęto następujące wartości liczbowe:

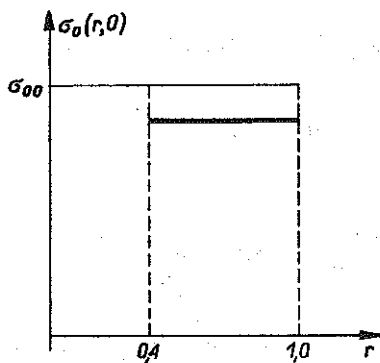
$$a_0 = 0,4, \quad b_0 = 1, \quad k_\lambda = 0 \quad \text{dla} \quad \lambda \neq 2,$$

$$k_2 \bar{\alpha} = 0,15, \quad p_b = 0.$$

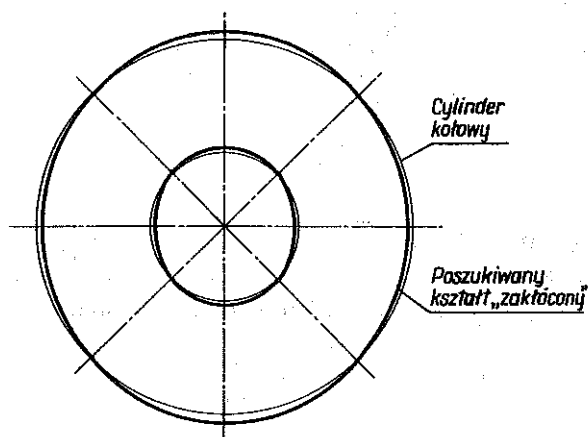
Rysunek 2 przedstawia granicę plastyczności dla  $\theta = 0$ :  $\sigma_0(r, 0)$ . Uzyskany



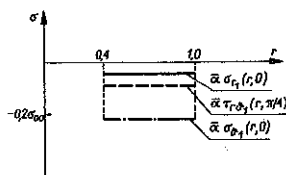
kształt przekroju cylindra obrazuje rys. 3. Na rys. 4 pokazano ekstremalne (ze względu na  $\theta$ ) wartości pierwszych poprawek stanu naprężenia:  $\bar{\alpha}\sigma_{r_1}(r, 0)$ ,  $\bar{\alpha}\sigma_{\theta_1}(r, 0)$ ,  $\bar{\alpha}\tau_{r\theta_1}\left(r, \frac{\pi}{4}\right)$ .



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

## 4.2. Cylinder z jednym z brzegów przekroju w kształcie okręgu

Analiza wzorów (4.2) prowadzi do wniosku, że przez właściwy dobór parametrów  $B_\lambda$  można ukształtować cylinder tak, aby jeden z brzegów jego przekroju był okręgiem. Jeśli przyjąć

$$(4.3) \quad B_\lambda = \lambda \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr,$$

to zewnętrzny brzeg przekroju cylindra będzie okręgiem:  $b(\theta) = b_0$ . Jeśli przyjąć

$$(4.4) \quad B_\lambda = \lambda \frac{a_0 s}{a_0 c - b_0} \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr,$$

to wewnętrzny brzeg przekroju cylindra będzie okręgiem:  $a(\theta) = a_0$ .

## PRZYKŁAD 2

Założono, że granica plastyczności jest następującą funkcją  $r$  i  $\theta$ :

$$2a) \quad \begin{aligned} k_\lambda(r) &= r^k, \\ \sigma_0(r, \theta) &= \sigma_{00} - \bar{\alpha} \sigma_{00} r^k \cos \lambda \theta, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_{00}} \alpha.$$

Ograniczono się do rozważenia cylindrów o stosunku  $a_0/b_0 = e^{\frac{-\pi c}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}}$ . Wyznaczone na podstawie wzorów (4.1) pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia są następującymi funkcjami kąta i promienia:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta_1} &= \frac{2\sigma_{00}}{r\sqrt{3}} \left\{ B_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda}{k^2 + 2k + \lambda^2} \left[ \sqrt{\lambda^2 - 1} \frac{(a_0^k - b_0^k) a_0 b_0}{a_0 - b_0 (-1)^n} \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + a_0^{k+1} (k+1) (-1)^n \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - r^{k+1} (k+1) \right] \right\} \sin \lambda \theta, \\ \sigma_{r_1} &= \frac{2\sigma_{00}}{r\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{\lambda} B_\lambda \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \frac{1}{k^2 + 2k + \lambda^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \left[ a_0^{k+1} (k+1) (-1)^n + (\lambda^2 - 1) \frac{a_0 b_0 (a_0^k - b_0^k)}{a_0 - b_0 (-1)^n} \right] \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$2b) \quad + \left[ -a_0^{k+1} (k+1) (-1)^n + \frac{a_0 b_0 (a_0^k - b_0^k)}{a_0 - b_0} (-1)^n \right] \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \\ - r^{k+1} (k+2 - \lambda^2) + (1 - \lambda^2) r \frac{a_0^{k+1} - b_0^{k+1} (-1)^n}{a_0 - b_0} \left. \right\} \cos \lambda \theta,$$

$$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{r_1} - \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} r^k \cos \lambda \theta.$$

Obliczone na podstawie (4.2) promienie cylindra są następującymi funkcjami kąta  $\theta$ :

$$a(\theta) = a_0 - \bar{\alpha} (-1)^n \frac{B_\lambda}{\lambda} \cos \lambda \theta,$$

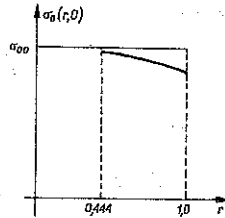
2c)

$$b(\theta) = b_0 - \bar{\alpha} \left\{ \frac{1}{\lambda} B_\lambda + \frac{k+1}{k^2 + 2k + \lambda^2} [a_0^{k+1} (-1)^n - b_0^{k+1}] \right\} \cos \lambda \theta.$$

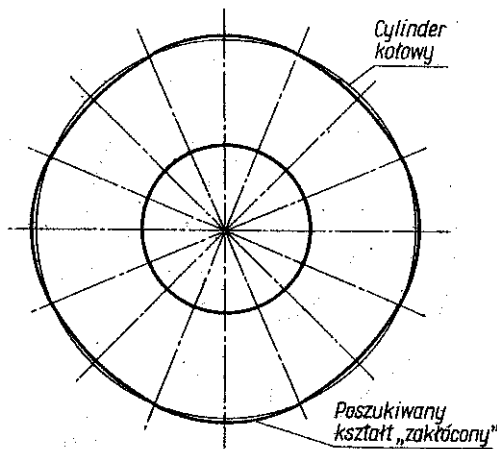
Przyjęto następujące wartości liczbowe:

$$\bar{\alpha} = 0,15, \quad k = 2, \quad n = 1, \quad \lambda = 4, \quad a_0 = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{15}}} = 0,444, \\ b_0 = 1, \quad p_b = 0.$$

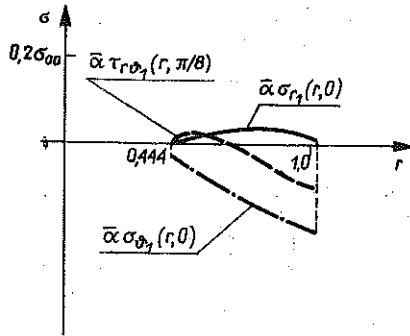
Rysunek 5 przedstawia przebieg granicy plastyczności dla  $\theta = 0$ :  $\sigma_0(r, 0)$ .



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

a) Dla otrzymania wewnętrznego brzegu przekroju cylindra w kształcie okręgu przyjęto  $B_\lambda$  zgodnie ze wzorem (4.4)

$$B_\lambda = 0, \quad a(\theta) = 0,444, \quad b(\theta) = 1 + 0,020 \cos 4\theta.$$

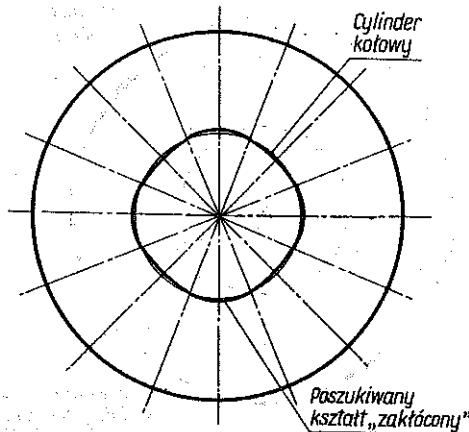
Uzyskany kształt przekroju cylindra przedstawia rys. 6. Na rys. 7 pokazano ekstremalne (ze względu na  $\theta$ ) wartości pierwszych poprawek składowych stanu naprężenia  $\bar{\alpha}\sigma_{r_1}(r, 0)$ ,  $\bar{\alpha}\sigma_{\theta_1}(r, 0)$ ,  $\bar{\alpha}\tau_{r\theta_1}\left(r, \frac{\pi}{8}\right)$ .

b) Dla otrzymania zewnętrznego brzegu przekroju cylindra w kształcie okręgu przyjęto  $B_1$  zgodnie z wzorem (4.3)

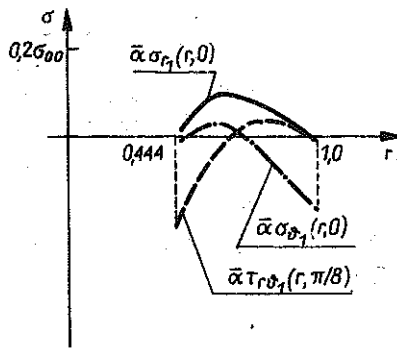
$$B_\lambda = \frac{(k+1)}{k^2 + 2k + \lambda^2} [b_0^{k+1} - a_0^{k+1} (-1)^n]$$

$$a(\theta) = 0,444 + 0,020 \cos 4\theta, \quad b(\theta) = 1.$$

Uzyskany kształt przekroju cylindra obrazuje rys. 8.



Rys. 8



Rys. 9

Na rys. 9 pokazano ekstremalne (ze zględu na  $\theta$ ) wartości pierwszych poprawek składowych stanu naprężenia

$$\bar{\alpha}\sigma_{r_1}(r, 0), \quad \bar{\alpha}\sigma_{\theta_1}(r, 0), \quad \bar{\alpha}\tau_{r\theta_1}\left(r \frac{\pi}{8}\right).$$

#### 4.3. Cylinder o przekroju kołowym

Można postawić pytanie: czy możliwe jest całkowite uplastycznienie cylindra o przekroju kołowym wykonanego z materiału o zmiennej granicy plastyczności.

Wobec (4.3) i (4.4) musi być spełnione równanie:

$$(4.5) \quad B_\lambda = \lambda \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr = \\ = \lambda \frac{a_0 \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0}\right)}{a_0 \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0}\right) - b_0} \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr.$$

Dla dowolnego stosunku  $a_0/b_0$  równanie to spełnia warunek niejednorodności materiału  $k_\lambda(r)$  określony następująco:

$$(4.6) \quad \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr = 0, \\ \int_{a_0}^{b_0} k_\lambda(r) \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr = 0.$$

Dla  $a_0/b_0 = e^{\frac{-n\pi}{\lambda^2 - 1}}$  ( $\lambda \neq 1$ ) oraz dla  $\lambda = 1$  równanie (4.5) jest spełnione dla  $k_\lambda(r)$  określonego w sposób następujący:

$$(4.7) \quad \int_{a_0}^r k_\lambda(r) \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr = 0.$$

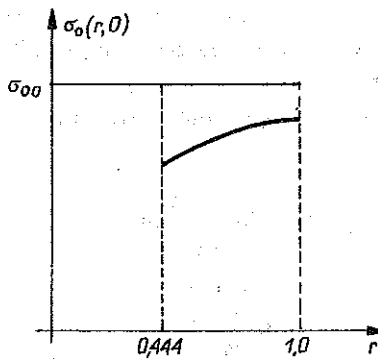
### PRZYKŁAD 3

Założono, że granica plastyczności jest taka sama jak w przykładzie 2:

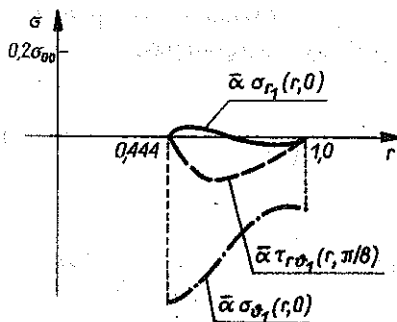
$$(3a) \quad k_\lambda(r) = r^k.$$

Ograniczono się do cylindrów o stosunku promieni  $a_0/b_0 = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}}$ . Wobec (4.7) dla otrzymania cylindra kołowego musi zachodzić równość

$$(3b) \quad \int_{a_0}^{b_0} r^k \cos\left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0}\right) dr = \frac{r}{k^2 + 2k + \lambda^2} [b_0^{k+1} - a_0^{k+1} (-1)^n] = 0 = B_\lambda.$$



Rys. 10



Rys. 11

Równość ta jest spełniona dla  $k = -1$ . Pozostałe wartości liczbowe przyjęto jak w przykładzie 2. Rys. 10 przedstawia granicę plastyczności  $\sigma_0(r, 0)$  dla  $\theta = 0$ . Na rys. 11 pokazano ekstremalne (ze względu na  $\theta$ ) wartości pierwszych poprawek składowych stanu naprężenia  $\bar{\alpha}\sigma_{r_1}(r, 0)$ ,  $\bar{\alpha}\sigma_{\theta_1}(r, 0)$ ,  $\bar{\alpha}\tau_{r\theta_1}\left(r, \frac{\pi}{8}\right)$ .

#### PRZYKŁAD 4

Założono, że granica plastyczności ma postać

$$(4a) \quad k_1(r) = 3 \left( r - \frac{a_0 + b_0}{2} \right),$$

$$\sigma_0(r, \theta) = \sigma_{00} - 3\bar{\alpha}\sigma_{00} \left( r - \frac{a_0 + b_0}{2} \right) \cos \theta,$$

gdzie

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3} \alpha}{2\sigma_{00}}.$$

Warunek otrzymania cylindra kołowego określony równaniem (4.7) jest dla przyjętej postaci niejednorodności granicy plastyczności spełniony:

$$(4b) \quad \int_{a_0}^{b_0} \left( r - \frac{a_0 + b_0}{2} \right) dr = 0.$$

Pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia wyznaczone na podstawie wzorów (4.1) wynoszą:

$$(4c) \quad \tau_{r\theta_1} = \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} \left[ r - (a_0 + b_0) + \frac{a_0 b_0}{r} \right] \sin \theta,$$

$$\sigma_{r_1} = \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} \left[ r - (a_0 + b_0) + \frac{a_0 b_0}{r} \right] \cos \theta,$$

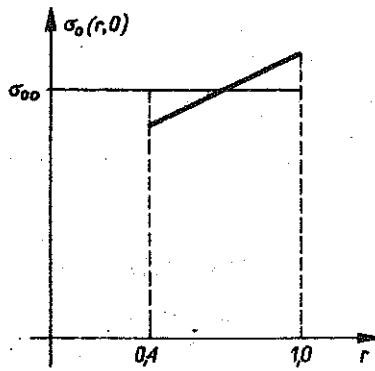
$$\sigma_{\theta_1} = \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} \left[ -r + \frac{a_0 b_0}{r} \right] \cos \theta.$$

Przyjęto następujące wartości liczbowe:

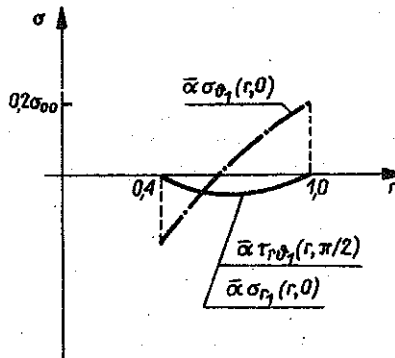
$$a_0 = 0,4, \quad b_0 = 1, \quad \bar{\alpha} = 0,15, \quad p_b = 0.$$

Rys. 12 przedstawia granicę plastyczności  $\sigma_0(r, 0)$  dla  $\theta = 0$ . Na rys. 13 pokazano ekstremalne (ze względu na  $\theta$ ) wartości pierwszych poprawek składowych stanu naprężenia:

$$\bar{\alpha}\sigma_{r_1}(r, 0), \quad \bar{\alpha}\sigma_{\theta_1}(r, 0), \quad \bar{\alpha}\tau_{r\theta_1}\left(r, \frac{\pi}{2}\right).$$



Rys. 12



Rys. 13

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. DOLLAR, Z. KORDAS, *Kształty prętów silnie zakrzywionych poddanych zginaniu z rozciąganiem i ścinaniem, całkowicie uplastycznionych w stadium zniszczenia*, Mech. Teoret. i Stos., **18**, 4, 603–622, 1980.
2. M. GALOS, *Plastyczne skręcanie niejednorodnych prętów o zmiennej średnicy*, Rozpr. Inż., **19**, 1, 89–113, 1971.
3. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inż., **18**, 3, 371–390, 1970.
4. Z. KORDAS, *Problematyka określania kształtów ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, **15**, 7, 1977.
5. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Plasticity under non-homogeneous conditions*, Adv. in Appl. Mech., **7**, 1962, Acad. Press.
6. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *Plastic non-homogeneity: a survey of theoretical and experimental research.*, Proc. Symp. IUTAM, on Non-homogeneity, Pergamon Press, 259–298, 1959.



## РЕЗЮМЕ

## ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА НА ФОРМЫ НЕКРУГОВЫХ СЕЧЕНИЙ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ В СОСТОЯНИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В СТАДИИ РАЗРУШЕНИЯ

В представленной работе ищутся формы цилиндров, изготовленных из материалов с переменным пределом пластичности, подвергнутых действию давления, которые подлежат полной пластичности в стадии разрушения. В связи с принятым методом малого параметра ищутся формы, отличающиеся от круговых. Полученные решения составляют обобщение решений из работы [3], обобщающие для цилиндров с усатновленным отношением радиусов  $a_0/b_0$ , изготовленных для материалов с постоянным пределом пластичности, на случай цилиндров с произвольным отношением радиусов, изготовленных из материала с переменным пределом пластичности. Анализ проблемы приводит тоже к нахождению таких некругогосимметричных распределений предела пластичности, которые обеспечивают полную пластичность круговых цилиндров.

## SUMMARY

## EFFECT OF MATERIAL NONHOMOGENEITY ON THE FORMS OF NONCIRCULAR THICK-WALLED CYLINDER CROSS-SECTIONS FULLY PLASTICIZED AT FAILURE

The paper is aimed at determining the forms of cylinders made of materials of variable yield limit, subject to pressures leading to full plasticization at failure. Due to the perturbation method used in the paper, cross-sections deviating from circular forms are sought for. The results obtained constitute generalizations of those derived in [3] (which concerned the cylinders of fixed ratios of radii  $a_0/b_0$  made of materials of constant yields limits) to the case of cylinders of arbitrary radial ratios and variable yield limits. The analysis performed enables also the determination of such axially non-symmetric yield limit distributions which ensure full plasticization of circular cylinders.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, KRAKÓW.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 października 1982 r.*