

## DRGANIA BELKI NIESKOŃCZENIE DŁUGIEJ WYWOŁANE LOSOWĄ SERIĄ SIŁ RUCHOMYCH

PAWEŁ ŚNIADY (WROCŁAW)

W pracy rozpatruje się drgania belki nieskończenie długiej spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera obciążonej nieskończonym ciągiem sił skupionych poruszających się w jednym kierunku z jednakową prędkością. Przyjęto, że siły oraz wzajemne odległości między nimi są zmiennymi losowymi. Podano rozwiązanie ogólne dla wartości oczekiwanej i funkcji korelacyjnej ugięcia belki, gdy odległości między siłami tworzą niestacjonarny i skorelowany zbiór zmiennych losowych oraz wyprowadzono wzory dla przypadków szczególnych.

### 1. WSTĘP

Częstym zjawiskiem w konstrukcjach inżynierskich jest występowanie drgań wywołanych poruszającym się obciążeniem. Zagadnienie to występuje m. in. w dynamice mostów, szyn kolejowych, dróg, pasów startowych lotnisk itd. Z tego powodu problematyka ta podejmowana była w wielu pracach, a bogaty przegląd literatury zawiera znana monografia FRYBY [1]. W większości wypadków problem drgań konstrukcji wywołanych ruchomym obciążeniem rozpatruje się w kategoriach deterministycznych. Stosunkowo nieliczne są prace, w których stosuje się podejście probabilistyczne. FRYBA [2] rozpatrywał drgania losowe belki swobodnie podpartej wywołane ruchem pojedynczej siły, KNOWLES [3] drgania belki nieskończenie długiej obciążonej siłą skupioną, której położenie na belce określa proces stochastyczny Wienera, natomiast TUNG [4 i 5] — drgania mostów poddanych działaniu ruchu drogowego.

W niniejszej pracy rozpatruje się drgania belki nieskończenie długiej spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera obciążonej nieskończonym ciągiem sił skupionych poruszających się w jednym kierunku z jednakową prędkością. Przyjęto, że wielkość sił oraz wzajemne odległości między nimi są zmiennymi losowymi. Praca zawiera rozwiązanie ogólne dla wartości oczekiwanej i funkcji korelacyjnej ugięcia belki, gdy odległości między siłami tworzą niestacjonarny i skorelowany zbiór zmiennych losowych. Opierając się na rozwiązaniu ogólnym wyprowadzono wzory szczegółowe, gdy tzw. strumień sił spełnia następujące warunki: 1) jest stacjonarny i nieskorelowany,

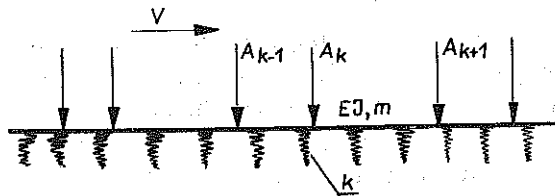
2) niestacjonarny o harmonicznie zmiennej intensywności sił i nieskorelowany, 3) stacjonarny i skorelowany, przy czym funkcja korelacyjna jest wykładniczo malejąca wraz z odległością między punktami. Podano również oszacowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla strumienia nieskorelowanego. Otrzymane rozwiązania mogą być wykorzystane m. in. w analizie drgań nawierzchni drogowej obciążonej ruchem drogowym.

## 2. ROZWIĄZANIE OGÓLNE

Niech drgania belki nieskończenie długiej spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera opisuje równanie

$$(2.1) \quad EJ \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + kw(x, t) + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t),$$

gdzie  $EJ$  oznacza sztywność belki na zginanie,  $k$  sztywność podłoża,  $m$  masę jednostkową belki,  $w(x, t)$  przemieszczenie pionowe belki oraz  $F(x, t)$  obciążenie będące procesem stochastycznym. Przyjęto, że belka obciążona jest ciągiem sił skupionych poruszających się w jednym kierunku ze stałą prędkością  $v$  (rys. 1). Siły oraz odległości między nimi są zmiennymi losowymi. Funkcję  $F(x, t)$  można przedstawić w postaci



Rys. 1

$$(2.2) \quad F(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta[x - (x_k + vt)],$$

gdzie  $\delta$  oznacza deltę Diraca.

Siły  $A_k$  ( $k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) są niezależnymi zmiennymi losowymi, niezależnymi również od miejsca położenia, o jednakowych charakterystycznych probabilistycznych, przy czym przyjmuje się, że znane są wartości  $E[A_k] = E[A] = \text{const}$  i  $E[A_k^2] = E[A^2] = \text{const}$ . Niech  $\lambda(x, t)$  oznacza intensywność rozkładu sił czyli wartość oczekiwaną ilości sił na jednostkę długości belki w punkcie  $x$  i w chwili  $t$ . Funkcja  $\lambda(x, t)$  musi mieć postać

$$(2.3) \quad \lambda(x, t) = \lambda(x - vt)$$

co wynika z faktu, że spełnia ona równanie ciągłości [6]:

$$(2.4) \quad \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Wprowadźmy nową zmienną

$$(2.5) \quad \xi = x - vt.$$

Niech  $N(\xi_i, \xi_j)$  i  $dN(\xi)$  oznaczają odpowiednio ilość sił w przedziałach  $(\xi_i, \xi_j)$  i  $(\xi, \xi + d\xi)$ .

Zakłada się, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że na odcinku o długości  $d\xi$  znajduje się siła, jest proporcjonalne do  $d\xi$ , a prawdopodobieństwo znajdowania się więcej niż jednej siły jest wielkością pomijalnie małą, a więc zakłada się

$$(2.6) \quad \begin{aligned} P\{dN(\xi) = 1\} &= \lambda(\xi) d\xi + o(d\xi), \\ P\{dN(\xi) = 0\} &= 1 - \lambda(\xi) d\xi + o(d\xi), \\ P\{dN(\xi) > 1\} &= o(d\xi). \end{aligned}$$

Z powyższych związków wynikają zależności

$$(2.7) \quad \begin{aligned} E[dN(\xi)] &= \lambda(\xi) d\xi, \\ E[dN^2(\xi)] &= \lambda(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

Korelację między dwoma punktami  $\xi_1, \xi_2$  określa gęstość dwuwymiarowa  $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ , a więc

$$(2.8) \quad E[dN(\xi_1) dN(\xi_2)] = \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

a stąd wynika funkcja korelacyjna

$$(2.9) \quad f(\xi_1, \xi_2) = \varphi(\xi_1, \xi_2) - \lambda(\xi_1) \lambda(\xi_2).$$

Dla strumienia nieskorelowanego ( $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ ) prawdopodobieństwo, że na odcinku  $(\xi_i, \xi_j)$  znajduje się  $n$  sił określa wzór

$$(2.10) \quad P\{N(\xi_i, \xi_j) = n\} = \frac{A^n(\xi_i, \xi_j)}{n!} e^{-A(\xi_i, \xi_j)},$$

gdzie

$$A(\xi_i, \xi_j) = \int_{\xi_i}^{\xi_j} \lambda(\tau) d\tau.$$

Niech  $H(\xi, \xi_0)$  oznacza dynamiczną funkcję wpływu, tzn. przemieszczenie ustalone belki w punkcie  $\xi$  od poruszającej się ze stałą prędkością siły jednostkowej znajdującej się w punkcie  $\xi_0$  układu ruchomego (2.5). Stąd przemieszczenie belki wywołane serią sił ruchomych określa wzór

$$(2.11) \quad w(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi_0) H(\xi, \xi_0) dN(\xi_0).$$

Wykonując na równaniu (2.11) operację wartości oczekiwanej i wykorzystując wzór (2.7) otrzymuje się

$$(2.12) \quad E[w(\xi)] = E[A] \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi, \xi_0) \lambda(\xi_0) d\xi_0.$$

Przy wyznaczaniu funkcji korelacyjnej ugięcia belki  $w(\xi)$  wykorzystuje się wzory (2.7) i (2.9). Otrzymamy

$$(2.13) \quad K_{ww}(\xi_1, \xi_2) = E^2[A] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi_1, \xi_3) H(\xi_2, \xi_4) f(\xi_3, \xi_4) d\xi_3 d\xi_4 + \\ + E[A^2] \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi_1, \xi_0) H(\xi_2, \xi_0) \lambda(\xi_0) d\xi_0.$$

Przyjmując  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , ze wzoru (2.13) otrzymuje się wyrażenie na wariancję

$$(2.14) \quad \sigma_w^2(\xi) = K_{ww}(\xi, \xi) = E^2[A] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi, \xi_1) H(\xi, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) \times \\ \times d\xi_1 d\xi_2 + E[A^2] \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\xi, \xi_0) \lambda(\xi_0) d\xi_0.$$

Dla belki opisanej równaniem (2.1) funkcja wpływu  $H(\xi, \xi_0)$  ma postać (np. [7])

$$(2.15) \quad H(\xi, \xi_0) = \frac{1}{4\sqrt{EJk}} e^{\varepsilon(\xi-\xi_0)} \left[ \frac{\cos \delta(\xi-\xi_0)}{\varepsilon} - \frac{\sin \delta(\xi-\xi_0)}{\delta} \right] \quad \text{dla } \xi \leq \xi_0, \\ \frac{1}{4\sqrt{EJk}} e^{-\varepsilon(\xi-\xi_0)} \left[ \frac{\cos \delta(\xi-\xi_0)}{\varepsilon} + \frac{\sin \delta(\xi-\xi_0)}{\delta} \right] \quad \text{dla } \xi \geq \xi_0,$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2\sqrt{\frac{k}{EJ} - \frac{mv^2}{EJ}}}}{2} = \frac{a\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_{kr}}\right)^2}}{2},$$

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{\frac{k}{EJ} - \frac{mv^2}{EJ}}} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{v}{v_{kr}}\right)^2},$$

$$a = \sqrt{2\sqrt{\frac{k}{EJ}}}, \quad v_{kr} = \sqrt{\frac{4kEJ}{m^2}}.$$

### 3. ROZWIĄZANIA SZCZEGÓLWE

Opierając się na wzorach (2.12) i (2.14) i wykorzystując funkcję wpływu (2.15), wyprowadzono wzory na wartość oczekiwaną i wariancję ugięcia

belki dla następujących przypadków szczególnych, gdy strumień sił jest: 1) stacjonarny i nieskorelowany, 2) niestacjonarny i nieskorelowany, a funkcja intensywności ma postać  $\lambda(\xi) = \lambda_1 + \lambda_2 \sin p\xi$ , 3) stacjonarny i skorelowany, przy czym korelacja maleje wykładniczo wraz z odległością między punktami.

PRZYPADEK I. Przyjęto, że  $\lambda(\xi) = \lambda = \text{const}$  i  $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ .

Wartość oczekiwana i wariacyjna ugięcia wynoszą

$$(3.1) \quad E[w(\xi)] = \frac{E[A]\lambda}{k},$$

$$\sigma_w^2(\xi) = \frac{E[A^2]\lambda}{32k\sqrt{EJk}} \frac{1}{\varepsilon} \left( 5 + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \right).$$

Jak wynika ze wzorów (3.1) zarówno wartość oczekiwana jak i wariancja przemieszczenia są stałe na całej długości belki.

PRZYPADEK II. Przyjęto, że  $\lambda(\xi) = \lambda_1 + \lambda_2 \sin p\xi$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) i  $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ , a więc strumień jest niestacjonarny o harmoniczej funkcji intensywności i nieskorelowany.

Odpowiednie wzory mają postać

$$(3.2) \quad E[w(\xi)] = \frac{E[A]\lambda_1}{k} + \frac{E[A]\lambda_2}{4\sqrt{EJk}\delta} \sin p\xi \left[ \frac{2\delta - p}{\varepsilon^2 + (\delta - p)^2} + \frac{2\delta + p}{\varepsilon^2 + (\delta + p)^2} \right],$$

$$\sigma_w^2(\xi) = \frac{E[A^2]\lambda_1}{32k\sqrt{EJk}\varepsilon} \left( 5 + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \right) + \frac{E[A^2]\lambda_2}{16EJk\varepsilon\delta^2} \sin p\xi \left\{ \frac{2(\varepsilon^2 + \delta^2)}{4\varepsilon^2 + p^2} + \frac{\delta^2 - \varepsilon^2 + \delta(2\delta - p)}{4\varepsilon^2 + (2\delta - p)^2} + \frac{\delta^2 - \varepsilon^2 + \delta(2\delta + p)}{4\varepsilon^2 + (2\delta + p)^2} \right\}.$$

W tym przypadku wartość oczekiwana i wariancja zmieniają się wzdłuż długości pręta w sposób harmoniczny podobnie jak funkcja intensywności.

PRZYPADEK III. Niech strumień sił jest stacjonarny i skorelowany, przy czym funkcja korelacyjna jest wykładniczo malejąca wraz z różnicą odległości między punktami, a więc ma postać

$$(3.3) \quad f(\xi_1, \xi_2) = \sigma^2 e^{-\alpha|\xi_1 - \xi_2|}.$$

Po podstawieniu (3.3) do (2.14) otrzymuje się

$$(3.4) \quad \sigma_w^2(\xi) = \frac{E[A^2]\lambda}{32k\sqrt{EJk}} \frac{1}{\varepsilon} \left( 5 + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \right) + \frac{\sigma^2 E^2[A]}{32k\sqrt{EJk}}$$

$$\frac{2(5\varepsilon^2 + \delta^2)\alpha [(\varepsilon + \alpha)^2(\varepsilon^2 + \alpha^2 + 2\delta^2) + 2\delta^2(\delta^2 - \varepsilon\alpha)] + 16\varepsilon^3 \{(\varepsilon^2 + \delta^2)(2\varepsilon + \alpha) - \varepsilon^3 [(\varepsilon + \alpha)^2 + \delta^2]^2 [(\varepsilon - \alpha)^2 + \delta^2]\}}{\varepsilon^3 [(\varepsilon + \alpha)^2 + \delta^2]^2 [(\varepsilon - \alpha)^2 + \delta^2]} - \frac{2\varepsilon^2 \alpha [(\varepsilon + \alpha)^2 + \delta^2]}{\varepsilon^3 [(\varepsilon + \alpha)^2 + \delta^2]^2 [(\varepsilon - \alpha)^2 + \delta^2]}.$$

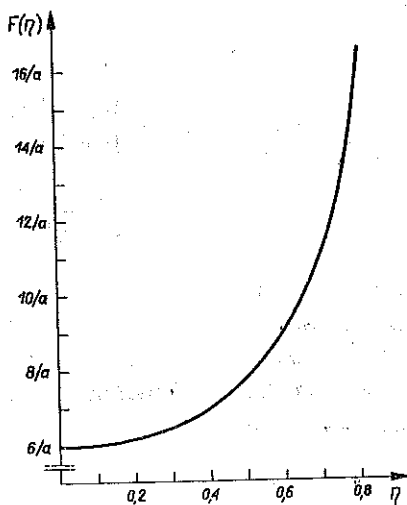
W szczególnym przypadku, gdy wzajemna korelacja nie zależy od odległości między punktami, a więc gdy  $\alpha = 0$  ze wzoru (3.4), otrzymuje się

$$(3.5) \quad \sigma_w^2(\xi) = \frac{E[A^2] \lambda}{32k \sqrt{EJk}} \frac{1}{\varepsilon} \left( 5 + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \right) + \frac{\sigma^2 E^2[A]}{k^2} \varepsilon.$$

We wzorach (3.1), (3.2) i (3.4) występuje wyrażenie

$$(3.6) \quad 2F(v) = \frac{1}{\varepsilon} \left( 5 + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} \right) = \frac{2}{a \sqrt{1-\eta^2}} \left( 5 + \frac{1+\eta^2}{1-\eta^2} \right),$$

w którym parametr  $\eta = v/v_{kr}$  określa stosunek prędkości sił do prędkości krytycznej belki. Na rysunku 2 przedstawiono wykres funkcji  $F(v)$  zależnie od zmiany parametru  $\eta$ , który zawarty jest w przedziale  $[0, 1)$ . Wykres funkcji  $F(v)$  odzwierciedla w odpowiedniej skali zmianę wariancji ugięcia belki dla strumienia stacjonarnego i nieskorelowanego zależnie od prędkości poruszania się sił. W przypadku  $\eta = 0$  otrzymuje się rozwiązanie dla belki obciążonej statycznie siłami, których położenie na belce jest losowe.



Rys. 2

#### 4. OSZACOWANIE FUNKCJI GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIENSTWA

Niech  $p(w, \xi)$  i  $\varphi(u, \xi)$  oznaczają odpowiednio funkcję gęstości prawdopodobieństwa i funkcję charakterystyczną zmiennej losowej  $w$  ( $\xi$ ). Między funkcjami tymi zachodzą związki

$$(4.1) \quad p(w, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuw} \varphi(u, \xi) du,$$

$$\varphi(u, \xi) = E [e^{iuw(\xi)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuw} p(w, \xi) dw.$$

Wykorzystując wzór (2.11), funkcję charakterystyczną  $\varphi(u, \xi)$  można przedstawić w postaci

$$(4.2) \quad \varphi(u, \xi) = E \left[ \exp \left\{ iu \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi_0) H(\xi, \xi_0) dN(\xi_0) \right\} \right].$$

Założmy, że odległości między siłami tworzą zbiór zmiennych niezależnych, a więc  $f(\xi_1, \xi_2) = 0$ . W tym przypadku funkcja ugięcia belki, jak wynika ze wzoru (2.11), jest sumą nieskończonej wielu niezależnych zmiennych losowych. Stosując metodę półniezmienników [8], które określone są wzorem

$$(4.3) \quad \ln \varphi(u, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k(\xi)}{k!} (iu)^k$$

i postępując podobnie jak w przypadku «szumu śrutowego» [9] (a także [10]), otrzymuje się

$$(4.4) \quad \eta_k(\xi) = E [A^k] \int_{-\infty}^{\infty} H^k(\xi, \xi_0) \lambda(\xi_0) d\xi_0$$

oraz funkcję gęstości prawdopodobieństwa w postaci szeregu

$$(4.5) \quad p(w, \xi) = \sigma_w^{-1}(\xi) \theta^0 - \frac{\eta_3(\xi) \sigma_w^{-4}(\xi) \theta^3}{3!} + \frac{\eta_4(\xi) \sigma_w^{-5}(\xi) \theta^4}{4!} + \frac{\eta_5(\xi) \sigma_w^{-6}(\xi) \theta^5}{5!} + \frac{\eta_6(\xi) \sigma_w^{-7}(\xi) \theta^6}{72} + \dots,$$

gdzie

$$\theta^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n}{dz^n} \left[ \exp \left( -\frac{z^2}{2} \right) \right],$$

$$z = \frac{w(\xi) - \eta_1(\xi)}{\sigma_w(\xi)}, \quad \sigma_w^2(\xi) = \eta_2(\xi), \quad E[w(\xi)] = \eta_1(\xi).$$

Jeżeli  $\lambda(\xi) \rightarrow \infty$  dla wszystkich  $\xi$  w taki sposób, że iloczyny  $\lambda(\xi) E[A^k]$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) mają wartości skończone, to półniezmienniki  $\eta_k(\xi)$  dążą do zera ( $\eta_k(\xi) \rightarrow 0$ ) dla  $k = 3, 4, \dots$ , a funkcja gęstości prawdopodobieństwa ugięcia belki (4.5) dąży do rozkładu normalnego. Stąd wynika wniosek, że dla nieskończonej gęstej serii sił o nieskończonej małych amplitudach funkcja gęstości prawdopodobieństwa dąży do rozkładu normalnego.

## 5. WNIOSKI

W pracy wyprowadzono na drodze analitycznej wzory na wartość oczekiwaną i funkcję korelacyjną ugięcia belki nieskończenie długiej, obciążonej strumieniem losowych sił poruszających się ze stałą prędkością, których wzajemne odległości tworzą zbiór zmiennych losowych.

Pokazano, że jeśli nieskorelowany strumień sił dąży do nieskończenie gęstej serii sił o nieskończenie małych amplitudach, to funkcja gęstości prawdopodobieństwa ugięcia dąży do rozkładu normalnego. Jak wynika ze wzoru (3.1) wartość oczekiwana ugięcia belki obciążonej strumieniem stacjonarnym nie zależy od sztywności belki i prędkości ruchu sił i jest równa ugięciu statycznemu belki obciążonej równomiernie na całej długości, pomimo że przemieszczenie od pojedynczej siły zależy od tych parametrów. Przedstawiony sposób wyznaczania charakterystyk probabilistycznych może być stosowany w analizie drgań takich dźwigarów nieskończenie długich jak płyty i powłoki poddane obciążeniu omówionemu w tej pracy.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. FRYBA, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Academia, Prague 1972.
2. L. FRYBA, *Non-stationary response of a beam to a moving random force*, J. Sound and Vibr., 46, 3, 1976.
3. J. K. KNOWLES, *On the dynamic response of a beam to randomly moving load*, Trans. of ASME, J. Appl. Mech., 35, series E, 1, 1968.
4. C. C. TUNG, *Random response of highway, bridges to vehicles loads*, Proc. of ASCE, J. Engng. Mech. Division, 93, EM5, Oct. 1967.
5. C. C. TUNG, *Response of highway bridges to renewal traffic loads*, Proc. of ASCE, J. Engng. Mech. Division, 95, EM1, Feb. 1969.
6. F. ASHTON, *The theory of road traffic flow*, London 1966.
7. P. ŚNIADY, *Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem*, Pr. N. Inst. Inż. Łąd. Pol. Wr., 21, 5, Wrocław 1976
8. M. FISZ, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1967.
9. S. O. RICE, *Mathematical analysis of random noise*, Bell. Syst. tech. J., 23, 282, 1944.
10. J. B. ROBERTS, *The response of linear vibratory systems to random impulses*, J. Sound and Vibr., 24, 2, 1965.

## РЕЗЮМЕ

## КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ БАЛКИ ВЫЗВАННЫЕ СЛУЧАЙНОЙ СЕРИЕЙ ПОДВИЖНЫХ СИЛ

В работе рассматриваются колебания бесконечно длинной балки, находящейся на упругом основании типа Винклера, нагруженной бесконечной последовательностью сосредоточенных сил, движущихся в одном направлении с одинаковой скоростью. Принято, что величина сил и взаимные расстояния между ними являются случайными переменными. Дается общее решение для математического ожидания и вариации прогиба балки, когда расстояния между силами образуют нестационарное и коррелированное множество случайных переменных, а также выведены формулы, определяющие перечисленные probabilistic characteristics для избранных частных случаев.



## SUMMARY

**RANDOM DYNAMIC RESPONSE OF AN INFINITE BEAM TO A TRAIN OF MOVING FORCES**

An infinite beam resting on a Winkler-type elastic foundation is subjected to vibration under an infinite train of concentrated forces moving at a constant velocity. The force and their spacing are assumed to be random variables. The general solutions for the expected value and variance of beam deflections are given in the case when the distances between the forces constitute a non-stationary and correlated sets of random variables; the formulae are derived determining the probabilistic characteristics mentioned above in a number of particular cases.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA  
INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1982 r.*

---