

OSIOWOSYMETRYCZNY QUASI-STACJONARNY RUCH TORUSA W OBECNOŚCI ŚCIANKI W PRZYBLIŻENIU STOKESA

ANNA KUCABA-PIĘTAL (RZESZÓW)

Praca dotyczy wyznaczenia ruchu opadającego torusa, który porusza się w kierunku prostopadłym do ścianki, ze stałą prędkością U , przy małej liczbie Reynoldsa. Przepływ jest *quasi*-stacjonarny, osiowosymetryczny oraz mają zastosowanie równania Stokesa. Obliczono współczynnik bezwymiarowej ility i porównano z wynikami otrzymanymi przez Ganatosa, Weinbauma i Pfeffer (1980) [1] dla kuli.

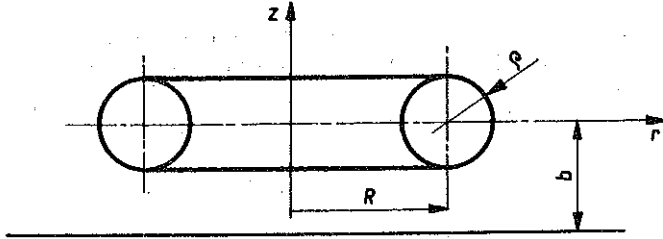
1. WSTĘP

Badania ruchu ciała w pobliżu ścianki rozpoczęto już na początku naszego stulecia. Lorenz (1907) [8] badał poprzeczny ruch kuli pomiędzy dwiema ściankami. Do początków lat siedemdziesiątych powszechnie stosowaną metodą do rozwiązywania tego typu zagadnień była metoda odbić zwierciadlanych. Wymagała ona dobrania takiego układu współrzędnych, aby osią symetrii była ścianka, a jedna ze współrzędnych opisywała brzeg ciała. Narzucało to ograniczenie na klasę badanych obiektów i łownym przedmiotem badań były kule. Rozwiązanie tą metodą rozpatrywanego w pracy zagadnienia wydaje się bardzo trudne ze względu na niemożność znalezienia odpowiedniego układu współrzędnych dla torusa.

GLUCKMAN, PFEFFER i WEINBAUM (1976) [3] oraz LEICHTBERG i PFEFFER i WEINBAUM (1976) [7] zastosowali do wyznaczenia ruchu kuli i układu kul w obecności ścianek, dla których znane jest rozwiązanie metodą odbić, analityczno numeryczną metodę kolokacji. Polega ona na przedstawieniu pola prędkości i ciśnień w postaci sumy zaburzeń pochodzących od ścianki i rozpatrywanego ruchu ciała. Warunek brzegowy na ściance pozwala wyrazić nieznanne współczynniki w wyrażeniu na zaburzenie wywołane ścianką przez szeregi opisujące ruch ciała, stosując odwrotną transformację Fouriera–Bessela. Do wyznaczenia współczynników tych ostatnich wykorzystuje się warunek brzegowy w punktach kolokacji na ciele. Metoda ta została wykorzystana w poniższej pracy. Odwrotna transformacja Fouriera–Bessela, ze względu na niemożność wyznaczenia jej w sposób analityczny dla funkcji toroidalnych, została dokonana numerycznie, co znacznie wydłużyło czas obliczeń. (komputer RIAD 32, 4 godz.)

2. MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE

Rozważany jest quasi-stacjonarny, osiowosymetryczny ruch torusa w lepkiej cieczy, który porusza się ze stałą prędkością U w kierunku prostopadłym do płaszczyzny znajdującej się w danej chwili w odległości b od środka torusa (rys. 1).



Rys. 1. Układ geometryczny problemu

Przyjęto, że liczba Reynoldsa $Re = \frac{avQ}{\mu}$ jest tak mała, że wyrazy bezwładnościowe w równaniu Naviera-Stokesa mogą być zaniedbane, czyli że przepływ opisany jest równaniem Stokesa:

$$(2.1) \quad \mu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

gdzie \mathbf{v} , p są odpowiednio prędkością i ciśnieniem oraz μ współczynnik lepkości.

Warunki brzegowe będą spełnione, jeśli na ścianie

$$(2.2) \quad \mathbf{v} = 0$$

a na torusie

$$(2.3) \quad \mathbf{v} = U; \quad \text{w nieskończoności } \mathbf{v} = 0.$$

Z warunków geometrycznych wynika, że wygodnie jest wprowadzić cylindryczny r, θ, z oraz toroidalny układ współrzędnych ξ, θ, η związany z cylindrycznym wzorami następującymi:

$$(2.4) \quad r = \frac{c \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad z = \frac{c \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}.$$

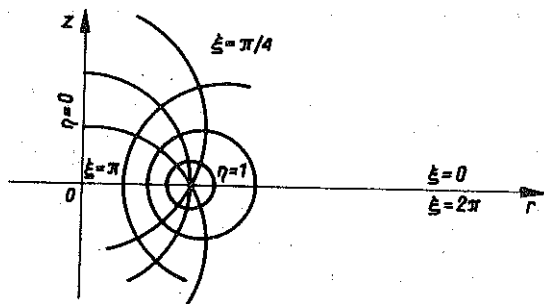
Powierzchnia $\eta = \eta_0$ określa w tym układzie torus o kołowym przekroju, którego promień zewnętrzny wynosi $a = c \operatorname{cosech} \eta_0$ wewnętrzny zaś $R = c \operatorname{coth} \eta_0$.

Ponieważ równania Stokesa (2.1) są liniowe, przeto pole prędkości i ciśnienie można rozłożyć na dwie części

$$(2.5) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_w, \quad p = p_t + p_w.$$

Dla wyznaczenia \mathbf{v}_w, p_w wygodnie jest wprowadzić funkcję prądu:

$$(2.6) \quad \psi_w = \int_0^{\infty} [A(\alpha) e^{\alpha z} + B(\alpha) e^{-\alpha z} + C(\alpha) \alpha z e^{\alpha z} + D(\alpha) \alpha z e^{-\alpha z}] r J_1(\alpha r) d\alpha,$$



Rys. 2. Układ współrzędnych toroidalnych

określającą zaburzenie wywołane obecnością ścianki, spełniająca (2.1), gdzie $A(\alpha), \dots, D(\alpha)$ są nieznanymi funkcjami zmiennej α , J_1 funkcją Bessela pierwszego rzędu, pierwszego rodzaju [2]. Różniczkując (2.6) otrzymujemy v_{wr}, v_{wz} (por. Dodatek).

Część v_t, p_t przedstawia rozwiązanie (2.1) dla osiowosymetrycznego, ustalonego ruchu torusa w kierunku osi symetrii z [4], v_{tr}, v_{tz} są składowymi tej prędkości w cylindrycznym układzie współrzędnych oraz v_{wr}, v_{wz} — składowymi v_w :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} p_t &= \mu U Q / c, \\ v_{tr} &= U (r Q / 2c + \chi), \\ v_{tz} &= U (z Q / 2c + \psi), \end{aligned}$$

gdzie c oznacza stałą układu współrzędnych toroidalnych. Występujące w (2.7) funkcje χ, Q, ψ są postaci [4]

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \chi &= (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_{n-1/2}^1 (\cosh \eta) \sin n\xi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n A'_n (\eta, \xi), \\ Q &= (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_{n-1/2} (\cosh \eta) \sin n\xi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n B'_n (\eta, \xi), \\ \psi &= (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_{n-1/2} (\cosh \eta) \cos n\xi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n C'_n (\eta, \xi). \end{aligned}$$

Ponadto spełnienie równania ciągłości (2.1) nakłada następujący warunek na współczynniki A_n, B_n, C_n :

$$(2.9) \quad \begin{aligned} 5B_n - 0,5(2n-1)B_{n-1} + 0,5(2n+1)B_{n+1} - (n+0,5)(2+3n) + \\ + (4n^2-1)A_n - 0,5(2n-3)(2n-1)A_{n-1} - \\ - (2n-1)C_{n-1} - (2n+1)C_{n+1} + 4nC_n = 0, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe $v_r, v_z = 0$ (2.2) wzdłuż ścianki $z = -b$ będą spełnione, jeśli $v_{wr} = -v_{tr}, v_{wz} = -v_{tz}$ czyli jeśli

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \int_0^{\infty} E(\alpha, -b) \alpha J_1(\alpha r) d\alpha &= -U (r/2 (Q(r, -b)) + \chi(r, -b)) \\ \int_0^{\infty} F(\alpha, -b) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha &= -U (-b/2c (Q(r, -b)) + \psi(r, -b)), \end{aligned}$$

gdzie funkcje $E(\alpha, z_i)$ i $F(\alpha, z_i)$ są następującej postaci (por. Dodatek) dla $z_i = -b$:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} E(\alpha, -b) &= -A(\alpha) \bar{e}^{\alpha b} + B(\alpha) e^{\alpha b} - C(\alpha) (1 - \alpha b) \bar{e}^{\alpha b} + D(\alpha) (1 + \alpha b) e^{\alpha b}, \\ F(\alpha, -b) &= A(\alpha) \bar{e}^{\alpha b} + B(\alpha) e^{\alpha b} - C(\alpha) b \alpha \bar{e}^{\alpha b} - D(\alpha) b e^{\alpha b}. \end{aligned}$$

Występujące tu funkcje $A(\alpha), \dots, D(\alpha)$ znajdują się w (2.6).

Prawa strona równań (2.10) pisana jest już tutaj we współrzędnych cylindrycznych i określa zaburzenie wywołane ruchem torusa "odczuwane" na ścianie $z = -b$. Jest ona jedynie funkcją r . Stosując odwrotną transformację Hankela (ponieważ nieznane funkcje E i F są transformacją tychże zaburzeń), otrzymujemy

$$(2.12) \quad \begin{aligned} E(\alpha, -b) &= - \int_0^{\infty} U t (tQ/2c + \chi) J_1(\alpha t) dt, \\ F(\alpha, -b) &= - \int_0^{\infty} U t (-bQ/2c + \psi) J_0(\alpha t) dt, \\ Q &= Q(t, -b), \quad \chi = \chi(t, -b), \quad \psi = \psi(t, -b). \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.8) można wyrazić E i F przez współczynniki A_n, B_n, C_n i funkcje określające ruch torusa (A'_n, B'_n, C'_n):

$$(2.13) \quad \begin{aligned} E(\alpha, -b) &= \sum_{n=1}^{\infty} [B_n B_n^*(\alpha, -b) + A_n A_n^*(\alpha, -b)] U, \\ F(\alpha, -b) &= \sum_{n=1}^{\infty} [B_n B_n^{**}(\alpha, -b) + C_n C_n^*(\alpha, -b)] U, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_n^*(\alpha, -b) &= - \int_0^{\infty} B'_n(t, -b) t^2 J_1(\alpha t) dt (2c\mu)^{-1}, \\ C_n^*(\alpha, -b) &= \int_0^{\infty} C'_n(t, -b) t J_0(\alpha t) dt, \\ A_n^*(\alpha, -b) &= - \int_0^{\infty} A'_n(t, -b) t J_1(\alpha t) dt, \\ B_n^{**}(\alpha, -b) &= \int_0^{\infty} B'_n(t, -b) t b J_0(\alpha t) dt (2c\mu)^{-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ (por. Dodatek)

$$(2.14) \quad \begin{aligned} E(\alpha, z) &= (1 - \sigma) e^{-\sigma} E(\alpha, -b) + \sigma e^{-\sigma} F(\alpha, -b), \\ F(\alpha, z) &= -\sigma e^{-\sigma} E(\alpha, -b) + (1 + \sigma) e^{-\sigma} F(\alpha, -b), \\ \sigma &= (z + b) \alpha, \end{aligned}$$

wykorzystując więc (2.13) i (2.7) można przedstawić pole prędkości w dowolnym punkcie przepływu (r, z) w postaci

$$(2.15) \quad \begin{aligned} v_r(r, z) &= U \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[B'_n(r, z) \frac{r}{2c} + B_{n1}(r, z) \right] + A_n [A'_n(r, z) + \\ &\quad + A_{n1}(r, z)] + C_{n1}(r, z), \\ v_z(r, z) &= U \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[B'_n(r, z) \frac{z}{2c} + B_{n2}(r, z) \right] + C_n [C'_n(r, z) + \\ &\quad + C_{n2}(r, z)] + A_n A_{n2}(r, z). \end{aligned}$$

Występujące w (2.15) funkcje $B_{n1}, B_{n2}, A_{n1}, A_{n2}, C_{n1}, C_{n2}$ są określone w sposób następujący:

$$(2.16) \quad \begin{bmatrix} B_{n1}(r, z) \\ A_{n1}(r, z) \\ C_{n1}(r, z) \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} U \left((-\sigma) \begin{bmatrix} B_n^*(\alpha, -b) \\ A_n^*(\alpha, -b) \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} B_n^{**}(\alpha, -b) \\ 0 \\ C_n^*(\alpha, -b) \end{bmatrix} \right) e^{-\sigma \alpha} \alpha J_1(\alpha r) d\alpha,$$

$$\begin{bmatrix} B_{n2}(r, z) \\ A_{n2}(r, z) \\ C_{n2}(r, z) \end{bmatrix} = \int_0^{\infty} U \left((1-\sigma) \begin{bmatrix} B_n^*(\alpha, -b) \\ A_n^*(\alpha, -b) \\ 0 \end{bmatrix} + (1+\sigma) \begin{bmatrix} B_n^{**}(\alpha, -b) \\ 0 \\ C_n^*(\alpha, -b) \end{bmatrix} \right) e^{-\sigma \alpha} \alpha J_0(\alpha r) d\alpha$$

i uwzględniają one wpływ ścianki. Zgodnie z (2.5) składowe prędkości v_w pochodzącej z oddziaływania ścianki mogą być teraz wyrażone następującymi wzorami:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} v_{wr}(r, z) &= U \sum_{n=0}^{\infty} B_n B_{n1}(r, z) + A_n A_{n1}(r, z) + C_n C_{n1}(r, z), \\ v_{wz}(r, z) &= U \sum_{n=0}^{\infty} B_n B_{n2}(r, z) + A_n A_{n2}(r, z) + C_n C_{n2}(r, z). \end{aligned}$$

Pole prędkości określone przez nieskończone szeregi (2.15) będzie określone w dowolnym punkcie przepływu po wyznaczeniu współczynników A_n, B_n, C_n . Stosowana metoda kolokacji żąda spełnienia warunku brzegowego (2.3) w skończonej liczbie punktów należących do brzegu torusa. Ze względu na osiową symetrię zagadnienia, każdy punkt reprezentuje okrąg. Jeżeli warunek brzegowy

$$v_r(r, z) = 0, \quad v_z(r, z) = U,$$

jest spełniony w $M+1$ punktach, to ograniczając szeregi (2.15) do M wyrazów i korzystając ze związku (2.8) pochodzącego z równania ciągłości, otrzymuje się układ $3M$ liniowych algebraicznych równań na $3M$ współczynników A_n, B_n, C_n .

3. WYZNACZENIE SIŁ DZIAŁAJĄCYCH NA TORUS

Ze względu na osiową symetrię siła działająca na torus poruszający się w kierunku prostopadłym do ścianki z prędkością Uk , w cylindrycznym układzie współrzędnych ma składowe $(0, 0, -F)$, gdzie

$$(3.1) \quad F = \int_S \mathbf{k} R_n dS,$$

R_n jest zaś wektorem naprężeń w punktach powierzchni torusa związanym z kierunkiem normalnej do powierzchni. Również siła — ze względu na (2.5) — może być przedstawiona w postaci sumy:

$$(3.2) \quad F = F_w + F_t.$$

Do wyliczenia F_w użyto ψ_w (2.6) i wynosi ona (por. Dodatek) $F_w = 0$ natomiast [4]

$$(3.3) \quad F_t = 4\sqrt{2\pi} U c \sum_{n=0}^{\infty} (2nB_n - C_n).$$

Wielkością charakteryzującą wpływ ścianki na siłę oporu F jest współczynnik λ_b :

$$(3.4) \quad \lambda_b = F/F_0,$$

gdzie F_0 oznacza siłę oporu działającą na torus poruszający się w nieograniczonym obszarze z prędkością U , skierowaną wzdłuż osi symetrii.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Obliczono współczynniki λ_b dla kilku położzeń torusa przy różnym stopniu jego wypełnienia k : wielkość k określa się w sposób następujący:

$$(4.1) \quad k = R/a,$$

gdzie R oznacza promień zewnętrzny torusa, a — promień wewnętrzny (rys. 1).

Układ równań otrzymany ze spełnienia warunku brzegowego w $M+1$ punktach torusa został rozwiązany numerycznie. Całki podwójne postaci (2.16) występujące przy obliczaniu macierzy współczynników tegoż układu również zostały policzone numerycznie. Ponieważ funkcja podcałkowa występująca tam jest oscylująca ze względu na zmienne zarówno t jak i α , przeto do obliczeń wybrano metodę całkowania pomiędzy zerami funkcji Bessela. Czas obliczeń na EMC RIAD-32 wynosi dla M punktów M^2 27 minut, dlatego też ograniczono się do obliczeń dla $M_{\max} = 10$.

Dla torusa charakteryzowanego parametrami $a = 1$, $k = k_0$ obliczono λ_b dla tych odległości $b_0 = b/(a+R)$, dla których znane są wyniki λ_b dla kuli [1].

Wartości F_0 użyte do obliczeń λ_b pochodzą z pracy GORENA i O'NEILLA [4]. W tabelicy 1 umieszczono wyniki otrzymane z obliczeń λ_b dla wybranych wielkości a, k , w zależności od ilości użytych punktów kolokacji.

Tablica 1. Zbieżność metody kollokacji dla torusa

M	$a = 1, \quad k = 1,4$			$a = 1, \quad k = 10$		
	$b_0 = 1,13$	$b_0 = 4$	$b_0 = 10$	$b_0 = 1,13$	$b_0 = 4$	$b_0 = 10$
2	1,3782	0,8792	0,9794	1,3437	1,0687	1,0724
4	3,4237	0,9764	0,9987	1,9863	1,1524	1,0726
6	4,8794	1,1963	1,0983	2,2964	1,1629	1,0726
8	5,1263	1,2321	1,1024	2,124	1,1630	—
10	5,2463	1,2397	1,1027	2,3162	1,1630	—

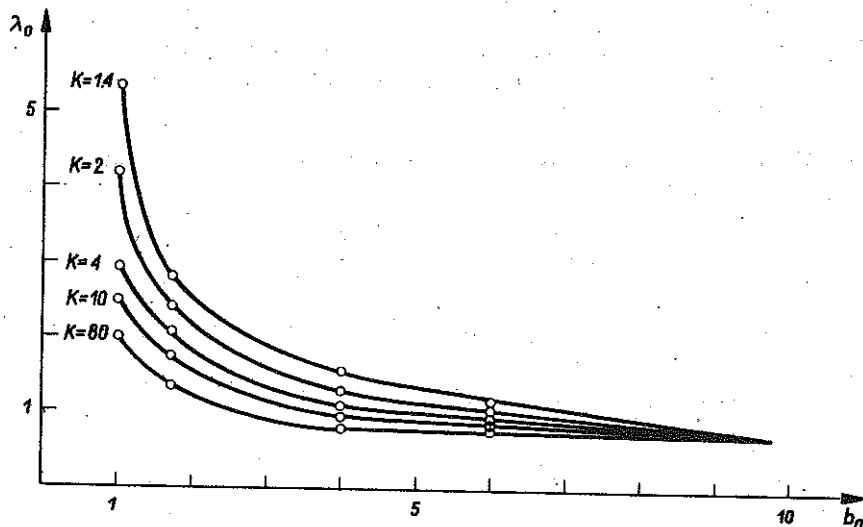
Dla kuli zbieżność metody zależy jedynie od jej odległości od ścianki. W przypadku torusa zależy ona także od stopnia wypełnienia k . W tablicy 2 zawarto zestawienie otrzymanych wyników obliczeń.

Na wykresie 1 zostały przedstawione zależności λ_b od b_0 dla poszczególnych torusów.

Na podstawie przedstawionych obliczeń można stwierdzić, że metoda kollokacji może być stosowana do wyznaczenia siły działającej na torus poruszający się prostopadłe w kierunku ścianki. Charakter zmian λ_b w zależności od odległości od ścianki wykazuje podobieństwo z λ_b dla kuli [1].

Tablica 2. Wyniki obliczeń współczynnika oddziaływania ścianki dla torusa charakteryzowanego parametrami $a = 1, k$ dla odległości od ścianki $b_0 = r/(1+R)$

k/b_0	1,13	1,54	4,0	6,13	10	20
1,4	5,2463	2,5642	1,2397	1,1701	1,1027	1,0573
2,0	4,1623	2,3366	1,2004	1,1653	1,0946	1,0521
4,0	3,0321	2,0654	1,1921	1,1441	1,0857	1,0414
10,0	2,3162	1,7786	1,1630	1,1212	1,0726	1,0299
80,0	2,2464	1,5476	1,1529	1,0866	1,0350	1,0251

Rys. 3. Współczynnik λ_b oddziaływania ścianki dla wybranych torusów

5. DODATEK

I. Składowe prędkości v_w określające zaburzenie przepływu wywołane obecnością ścianki związane są z funkcją prądu Ψ_w (2.6) wzorami następującymi:

$$(5.1) \quad v_{wr}(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} = \int_0^{\infty} E(\alpha, z) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha,$$

$$v_{wz}(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} = \int_0^{\infty} F(\alpha, z) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha.$$

Po wykonaniu różniczkowania i skorzystaniu ze wzoru

$$(5.2) \quad \frac{dJ(x)}{dx} = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x)$$

otrzymuje się

$$(5.3) \quad \begin{aligned} E(\alpha, z) &= -A(\alpha) e^{\alpha z} + B(\alpha) e^{-\alpha z} - C(\alpha)(1+\alpha z) e^{\alpha z} - D(\alpha)(1-\alpha z) e^{-\alpha z}, \\ F(\alpha, z) &= A(\alpha) e^{\alpha z} + B(\alpha) e^{-\alpha z} + C(\alpha) z \alpha e^{\alpha z} + D(\alpha) z \alpha e^{-\alpha z}. \end{aligned}$$

II. Wyrażenia (5.3) napisane dla $z = -b$ oraz $z = c$ tworzą układ czterech równań na określenie funkcji $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ i $D(\alpha)$. Dla $c \rightarrow \infty$ rozwiązaniem są funkcje:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} A(\alpha) &= C(\alpha) = 0, \\ D(\alpha) &= [F(\alpha, -b) - E(\alpha, -b)] e^{-\alpha b}, \\ B(\alpha) &= [F(\alpha, -b) + \alpha b (F(\alpha, -b) - E(\alpha, -b))] e^{-\alpha b}. \end{aligned}$$

Przyjmując otrzymane rozwiązanie (5.4), (5.3) przyjmuje następującą postać:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} E(\alpha, z) &= (1-\sigma) e^{-\sigma} E(\alpha, -b) + \sigma e^{-\sigma} F(\alpha, -b), \\ F(\alpha, z) &= -\sigma e^{-\sigma} E(\alpha, -b) + (1+\sigma) e^{-\sigma} F(\alpha, -b), \end{aligned}$$

gdzie $\sigma = (z+b)\alpha$.

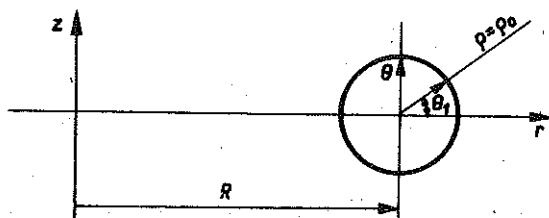
III. Siła działająca na torus pochodząca od zaburzenia wywołanego ścianką może być napisana w postaci

$$(5.6) \quad F_w = \mu\pi \int_S r^3 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{E^2 \Psi_w}{r^2} \right) dS,$$

gdzie dS oznacza element powierzchni S torusa oraz n normalna zewnętrzna do S .

Wykorzystując wzory (2.6), (5.2) i (5.4) znajdziemy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} E^2 \Psi_w &= \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_w = \\ &= \mu\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (E(\alpha, -b) - F(\alpha, -b)) \Big|_{r=1}^{r=\alpha t} e^{-\alpha^2} \alpha r J_1(\alpha r) dt d\alpha. \end{aligned}$$



Rys. 4. Lokalny biegunowy układ współrzędnych

Wygodnie jest wprowadzić lokalny, biegunowy układ współrzędnych ϱ, θ_1 (rys. 4), związany z układem cylindrycznym (r, θ, z) wzorami

$$(5.8) \quad z = \varrho \sin \theta_1, \quad r = R + \varrho \cos \theta_1.$$

W tym układzie F_w ma postać

$$(5.9) \quad F_w = \mu\pi \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \{E(\alpha, -b) - F(\alpha, -b) J_{\nu, (\alpha, t)}^{(\alpha, t)}(R + \varrho_0 \cos \theta_1)(\varrho_0 \sin \theta_1) \times \\ \times e^{-\alpha \varrho_0 \sin \theta_1} [2J_1(\alpha(R + \varrho_0 \cos \theta_1)(\cos \theta_1) + (R + \varrho_0 \cos \theta_1)) J_1(\alpha(R + \\ + \varrho_0 \cos \theta_1)(\sin \theta_1) - J_0(\alpha(R + \varrho_0 \cos \theta_1)(\cos \theta_1))]\} d\alpha dt d\theta_1.$$

Stosując wzór [5]

$$(5.10) \quad \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} J_\mu(\beta x) J_\nu(\gamma x) dx = \frac{\beta^\mu \gamma^\nu}{\Gamma(\nu+1)^2} 2^{-\nu-\mu} \alpha^{-\lambda-\mu} \sum_{m=0}^\infty \times \\ \times \frac{\Gamma(\lambda + \mu + \nu + 2m)}{m! \Gamma(\mu + m + 1)} \times F\left(-m, -\mu - m, 1, \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right) \left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)^m,$$

do (5.9) otrzymujemy

$$(5.11) \quad F_w = \mu\pi \sum_{k=1}^3 F_k, \\ F_k = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\omega^{s_k} t^{l_k}}{\Gamma(s_k)} (2^{-k}) (\sin \theta_1)^{q_k} \sum_{km=0}^\infty C_{km} \sum_{k_0=0}^\infty f_{k_0} \frac{\omega^{wp_k}}{z_0^r k} \cos \theta_1 + \\ + \frac{\omega^{s'_k} t^{l'_k}}{\Gamma(s'_k)} (2^{-k}) (\sin \theta_1)^{p'_k} \sum_{km=0}^\infty C'_{km} \sum_{k_0=0}^m f'_{k_0} \frac{\omega^{wp'_k}}{z_0^r k} d\theta_1 dt,$$

gdzie $\omega = R + \varrho_0 \cos \theta_1$, $z_c = \varrho_0 \sin \theta_1$,

$$C_{km} = \frac{\Gamma(m+l_k)}{m! \Gamma(m+a_k)}, \quad C'_{km} = \frac{\Gamma(m+l'_k)}{m! \Gamma(m+a'_k)},$$

oraz $a_k, l_k, s_k, l'_k, a'_k, l'_k, s'_k, i_k, wp_k, wp'_k, r_k, q_k, p'_k$ oznaczają stałe, f_{k_0}, f'_{k_0} współczynniki szeregu hipergeometrycznego.

Po przekształceniu dostaje się

$$(5.12) \quad F_w = \pi\mu \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^3 f_k(t) c_k \frac{(\cos \theta_1)^{p_k}}{(\sin \theta_1)^{q_k}} d\theta_1 dt = 0,$$

gdzie c_k, p_k, q_k są stałe, ponieważ nie zachodzi przypadek, aby równocześnie p_k i q_k były parzyste.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. GANATOS, R. PFEFFER, S. WEINBAUM, *A strong interaction theory for the creeping motion of a sphere between plane parallel boundaries; Part 1. Perpendicular motion*, J. Fluid Mech., **99**, 739–753, 1980.
2. P. GANATOS, R. PFEFFER, S. WEINBAUM, *A strong interaction theory of a sphere between plane parallel boundaries; Part 2. Parallel motion*, J. Fluid Mech., **99**, 755–783, 1980.
3. M. GLUCKMAN, R. PFEFFER, S. WEINBAUM, *A new technique for treating multiparticle slow viscous flow: axisymmetric flow past spheres and spheroids*, J. Fluid Mech., **50**, 705–740, 1971.
4. L. GOREN, M. O'NEILL, *Asymmetric creeping motion of an open torus*, J. Fluid Mech., **101**, 97–110, 1980.
5. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интервалов, сум, рядов, и произведений*, Изд. Наука, Главная ред. Физ. Мат. Лит., Москва 1971.
6. J. HAPPEL, H. BRENNER, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, 1965.
7. S. LEICHTBERG, R. PFEFFER, S. WEINBAUM, *Stokes flow past finite coaxial dusts of spheres in a circular cylinder*, Int. J. Multiphase Flow, **3**, 147–169, 1976.
8. H. LORENTZ, *Abhand. Theor. Phys.*, **1**, 23.
9. S. MAJUMDAR, M. O'NEILL, *On axisymmetric Stokes flow past a torus*, ZAMP, **28**, 541–550, 1977.

РЕЗЮМЕ

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОРА В ПРИСУТСТВИИ СТЕНКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

Работа касается определения движения падающего тора, который движется в направлении перпендикулярном к стенке с постоянной скоростью U , при малом числе Рейнольдса. Течение квазистационарно и осесимметрично, а также имеют применение уравнения Стокса. Вычислен коэффициент безразмерной силы и сравнен он с результатами, полученными Ганатосом, Вейнбаумом и Пфеффером (1980) [1] для шара.

SUMMARY

AXI-SYMMETRIC QUASI-STATIONARY MOTION OF A TORUS
IN THE PRESENCE OF A WALL; THE STOKES APPROXIMATION

The paper is concerned with motion of a falling torus which moves in the direction perpendicular to a wall, with constant velocity U , at small Reynolds numbers. The flow is assumed to be quasi-stationary and axi-symmetric, consistent with the Stokes equations. The coefficient of dimensionless force is calculated and compared with the results obtained by GANATOS, WEINBAUM and PFEFFER (1980) [1] for a sphere.

POLITECHNIKA RZESZOWSKA
ZAKŁAD SAMOLOTÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 września 1982 r.
