

O SZACOWANIU NOŚNOŚCI GRANICZNEJ OŚRODKÓW PLASTYCZNIE ANIZOTROPOWYCH METODĄ STATYCZNIE DOPUSZCZALNYCH PÓL NAPRĘŻEŃ

MICHAŁ BASISTA (WARSZAWA)

Zastosowano twierdzenie statyczne teorii nośności granicznej do oceny obciążenia niszczącego w przypadku ośrodków plastycznie anizotropowych. Analiza dotyczy warunku plastyczności Hilla i płaskiego stanu odkształcenia. Przedstawiono wpływ anizotropii materiału na własności linii nieciągłości naprężeń oraz na zasady konstruowania układów statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Wskazano charakterystyczne cechy metody statycznej wynikające z anizotropii materiału. Podano przykłady oszacowania nośności granicznej równomiernie obciążonego klina, półprzestrzeni poddanej wciskaniu sztywnego stempla oraz pasma przeciannego przez dwa przeciwbieżne stemple.

1. WSTĘP

W teorii nośności granicznej uzyskanie rozwiązań zupełnych obejmujących obciążenie niszczące oraz odpowiadające mu pola naprężenia i prędkości jest w większości przypadków trudne ze względu na nieliniowość występujących równań różniczkowych. Opracowane zostały metody przybliżone oparte na twierdzeniach ekstremalnych, pozwalające oszacować wielkość obciążenia granicznego od góry i od dołu. Jeżeli oszacowania te są dostatecznie bliskie, to z punktu widzenia praktycznych zastosowań, znajomość rozwiązania dokładnego nie jest konieczna.

Twierdzenia teorii nośności granicznej są ogólnie prawdziwe dla ośrodków izotropowych jak i anizotropowych. Zasady wyznaczania górnej i dolnej oceny rzeczywistych obciążeń granicznych mimo że w swej istocie niezmienione, w porównaniu z przypadkiem izotropowym będą jednak wykazywać pewne cechy charakterystyczne, wynikające z przyjętego warunku plastyczności oraz typu anizotropii. Należy na przykład oczekiwać wpływu anizotropii materiału na własności linii nieciągłości oraz na cechy geometryczne, statycznie dopuszczalnych pól naprężeń.

Celem niniejszej pracy, która wiąże się ściśle z [6 i 7], jest zastosowanie twierdzenia o dolnych oszacowaniach do oceny obciążenia niszczącego pierwotnie anizotropowego ośrodka plastycznego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Jak wiadomo, obciążenie, dla którego można znaleźć pole naprężenia spełniające równania równowagi, statyczne warunki brzegowe

i nigdzie nie przekraczające warunku plastyczności, jest mniejsze lub co najwyżej równe obciążeniu powodującemu plastyczny ruch konstrukcji. Każde takie pole określa dolną granicę obciążenia niszczącego i nosi nazwę statycznie dopuszczalnego pola naprężeń. Najczęściej, rozważany ośrodek plastyczny dzieli się na kilka obszarów o nieskomplikowanym kształcie przyjmując, że w każdym z nich panuje jednorodny, prosty stan naprężenia spełniający warunki równowagi wewnętrznej, warunki brzegowe oraz warunek plastyczności. Granicą dwóch sąsiadujących obszarów jest linia nieciągłości naprężeń. Zastąpienie rzeczywistego rozkładu naprężeń w obciążonej konstrukcji układem specjalnie dobranych, statycznie dopuszczalnych, jednorodnych pól naprężenia powoduje, że różniczkowe równania równowagi są automatycznie spełnione. Zbudowany układ pól naprężenia może przy tym wykazywać niewiele podobieństwa do stanu rzeczywistego.

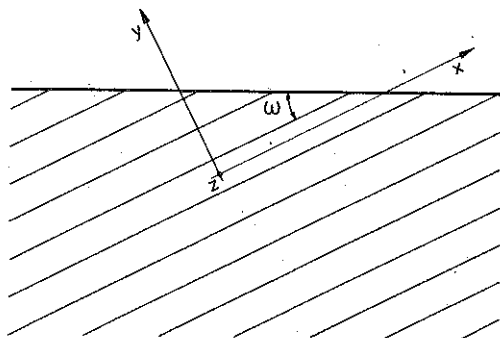
W przypadku materiałów izotropowych metoda statyczna okazała się bardzo efektywna przy rozwiązywaniu wielu zagadnień praktycznych, dla których ustalenie dokładnego rozwiązania było mniej istotne niż szybkie jego oszacowanie [3, 4 i 10]. Omawiana metoda była również zastosowana do oceny nośności granicznej uwarstwionej półprzestrzeni skalnej poddanej wciskaniu stempla i specyficznego warunku plastyczności [5]. Nie ma jednak, jak dotąd, systematycznego opracowania tego tematu dla materiałów anizotropowych.

Analiza, która zostanie przedstawiona w tej pracy, dotyczy ośrodków ortotropowych, uplastyczniających się według kryterium HILLA [1]. Ustalone zostaną własności linii nieciągłości naprężeń w płaskim stanie odkształcenia i porównane z przypadkiem izotropowym. Konsekwencją ortotropii materiału są szczególnie cechy układów statycznie dopuszczalnych pól naprężenia. Zasady ich konstruowania przedstawione będą na przykładach szacowania nośności granicznej klina obciążonego równomiernym ciśnieniem, półprzestrzeni poddanej wciskaniu sztywnego stempla oraz pasma przecinanego przez dwa przeciwbieżne stemple.

2. WARUNEK PLASTYCZNOŚCI

Anizotropia pierwotna, w odróżnieniu od anizotropii wywołanej samym procesem odkształcania plastycznego, jest «wrodzoną» cechą materiału wynikającą z jego budowy molekularnej lub z działań projektowo-konstrukcyjnych (zbrojenie, żebra). Kierunkowość własności wytrzymałościowych takiego materiału jest ujęta przez warunek plastyczności. Powszechnie stosowanym anizotropowym warunkiem plastyczności jest warunek HILLA [1] będący uogólnieniem kryterium Hubera-Misesa dla ośrodków izotropowych.

Rozważmy idealnie sztywno-plastyczny ośrodek ortotropowy, którego uplastycznienie nie zależy od ciśnienia hydrostatycznego. Warunek Hilla odniesiony do głównych kierunków ortotropii x , y , z (rys. 1) ma w przypadku płaskiego stanu odkształcenia następującą postać:



Rys. 1

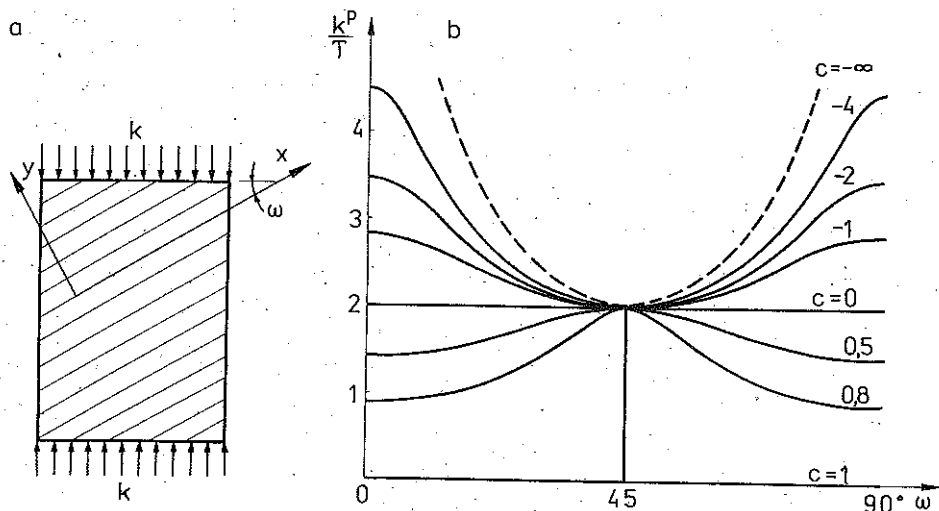
$$(2.1) \quad \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4(1-c)} + \tau_{xy}^2 = T^2, \quad -\infty < c < 1$$

gdzie T oznacza granicę plastyczności na ścinanie w płaszczyźnie płynięcia (x, y) , c jest zaś stałą materiałową zależną od parametrów charakteryzujących ortotropię [1].

Weźmy pod uwagę element obciążony równomiernym jednoosiowym ciśnieniem o intensywności k (rys. 2a). Ciśnienie graniczne powodujące upłastycznienie elementu określone jest wzorem

$$(2.2) \quad k^p = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}$$

i zilustrowane na rys. 2b jako funkcja kąta ω utworzonego przez uprzywilejowane kierunki ortotropii i główne osie tensora naprężenia. Jest widoczne, że dla $\omega = \pm 45^\circ$ każdy materiał ortotropowy zachowuje się tak, jak materiał izotropowy. Jest to znana osobliwość warunku plastyczności Hilla.

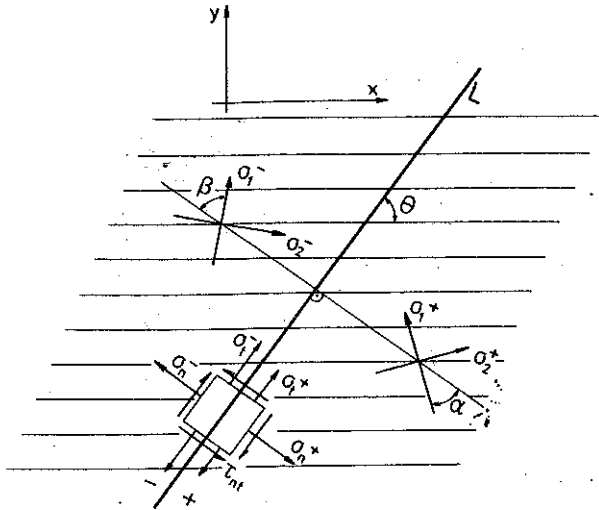


Rys. 2

3. NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ

Metoda szacowania nośności granicznej od dołu polega na wbudowaniu w obciążone elementy konstrukcji układów statycznie dopuszczalnych pól naprężenia powstałych ze złożenia elementarnych, jednorodnych stanów naprężenia. Na wolnych krawędziach oraz na liniach przecięcia takich pól dopuszczalne są silne nieciągłości składowych stanu naprężenia. Te nieciągłości nie mogą być jednak dowolne, gdyż nie mogą naruszać warunków równowagi.

Niech prosta L przedstawiona na rys. 3 będzie linią nieciągłości rozgraniczającą dwa jednorodne pola naprężenia o różnie zorientowanych kierun-



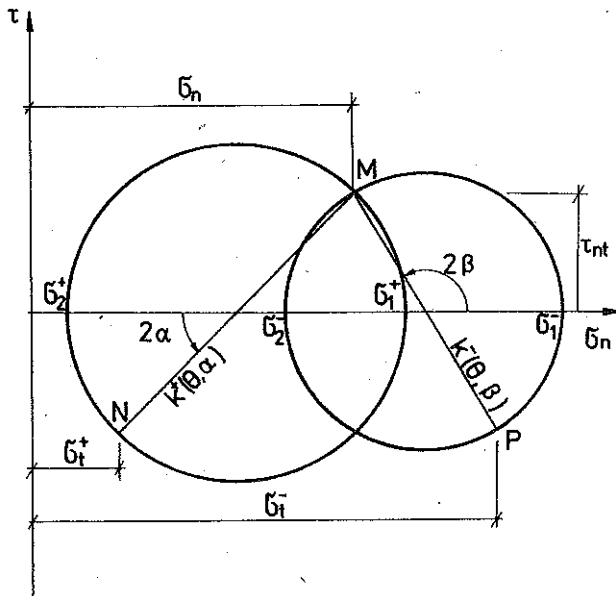
Rys. 3

kach głównych, nie pokrywających się jednak z uprzywilejowanymi kierunkami ortotropii x, y . Załóżmy, że po obu stronach tej linii materiał ortotropowy uległ uplastycznieniu. Stan naprężenia w obu obszarach można odwzorować za pomocą konstrukcji Mohra (rys. 4). Naprężenia σ_n i τ_m odwzorowuje punkt M przecięcia obu kół. Różne długości promieni k^+ (θ, α) i k^- (θ, β) są wynikiem ortotropii materiału. Ciągłość składowych σ_n i τ_m można wyrazić za pomocą następujących równań [3]:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \llbracket \sigma_n \rrbracket &= 0 \rightarrow (\sigma_1^+ + \sigma_2^+) + (\sigma_1^+ - \sigma_2^+) \cos 2\alpha = (\sigma_1^- + \sigma_2^-) + (\sigma_1^- - \sigma_2^-) \cos 2\beta, \\ \llbracket \tau_m \rrbracket &= 0 \rightarrow (\sigma_1^+ - \sigma_2^+) \sin 2\alpha = (\sigma_1^- - \sigma_2^-) \sin 2\beta. \end{aligned}$$

Transformując naprężenia główne σ_1^+, σ_2^+ do układu wyróżnionych kierunków materialnych x, y i wykorzystując otrzymane wzory do warunku plastyczności (2.1), uzyskujemy wzór

$$(3.2) \quad \sigma_1^+ - \sigma_2^+ = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\theta-\alpha)}}$$



Rys. 4

i analogicznie dla obszaru oznaczonego znakiem minus.

Warunek ciągłości τ_m (3.1) przybiera w tym przypadku postać

$$(3.3) \quad \sin^2 2\alpha [1 - c \sin^2 2(\theta - \beta)] = \sin^2 2\beta [1 - c \sin^2 2(\theta - \alpha)].$$

Jest widoczne, że linia nieciągłości dzieląca dwa jednorodne pola naprężenia w płaskim stanie odkształcenia nie jest już dwusieczną kątów między kierunkami naprężeń σ_1^+ i σ_2^- albo σ_1^- i σ_2^+ , jak to miało miejsce w przypadku ośrodków izotropowych. Jej nachylenie zależy od intensywności ortotropii c oraz od wzajemnego położenia kierunków naprężeń głównych i uprzywilejowanych kierunków materiału [5].

Składowa σ_t (rys. 3) zmienia się skokowo przy przejściu przez linię nieciągłości L , co odwzorowano przez punkty P i N na rys. 4. Wielkość skoku, jaką dopuszcza przyjęty warunek plastyczności, określona jest wzorem

$$(3.4) \quad \llbracket \sigma_t \rrbracket = 2T\sqrt{1-c} \left[\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{1-c \sin^2 2(\theta-\alpha)}} - \frac{\cos 2\beta}{\sqrt{1-c \sin^2 2(\theta-\beta)}} \right].$$

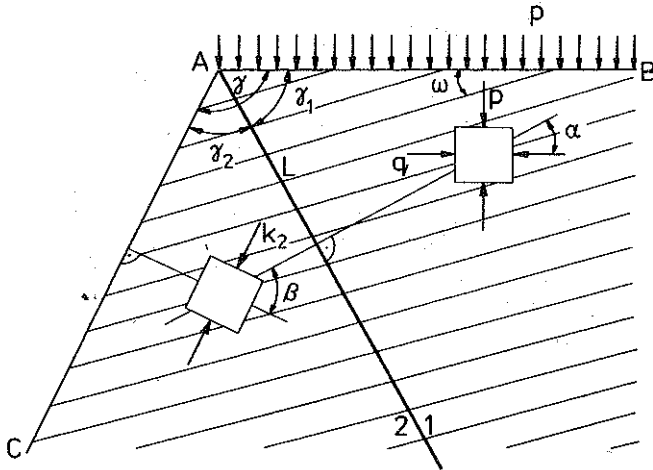
Przyjmując we wzorach (3.3) i (3.4) $c = 0$, otrzymujemy znane wzory dla ośrodka izotropowego [3 i 10]:

$$(3.5) \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \llbracket \sigma_t \rrbracket = 4T \cos 2\alpha.$$

4. NOŚNOŚĆ GRANICZNA KLINA

W celu przedstawienia zasad formułowania układów statycznie dopuszczalnych pól naprężenia w ośrodkach anizotropowych rozważmy kilka pro-

stych przykładów. Nie chodzi tu o dokładne oszacowanie rzeczywistych obciążeń granicznych, lecz o wyniki jakościowe, ilustrujące metodę postępowania i różnice w porównaniu z przypadkiem izotropowym.



Rys. 5

Naroże w kształcie klina o kącie wierzchołkowym γ (rys.5) obciążone jest na jednej krawędzi równomiernie rozłożonym naciskiem p . Uprzywilejowany kierunek materiału tworzy z obciążoną powierzchnią kąt ω . Zadanie polega na wyznaczeniu obciążenia granicznego jako funkcji nachylenia uwarstwień ω oraz intensywności ortotropii c . W tym celu posłużymy się statycznie dopuszczalnym polem naprężenia przedzielonym prostą nieciągłości L . Po obu stronach tej prostej materiał uplastycznia się według kryterium (2.1). Kierunki naprężeń głównych w obszarach 1 i 2 są narzucone przez warunki brzegowe na krawędziach AB i AC . Równowaga na linii nieciągłości wymaga, aby spełnione były zależności

$$(4.1) \quad p = k_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos(\beta - \alpha),$$

$$(4.2) \quad \sin^2 2\alpha [1 - c \sin^2 2(\omega + \gamma)] = \sin^2 2\beta [1 - c \sin^2 2\omega],$$

$$\text{przy czym } \alpha - \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Jeśli po obu stronach L materiał ma być w stanie plastycznym, to zgodnie z (2.1) muszą również zachodzić równości

$$(4.3) \quad p - q = 2T \sqrt{\frac{1 - c}{1 - c \sin^2 2\omega}},$$

$$k_2 = 2T \sqrt{\frac{1 - c}{1 - c \sin^2 2(\omega + \gamma)}}.$$

Rozwiązując układ równań (4.1) – (4.3) otrzymujemy poszukiwaną intensywność obciążenia granicznego:

$$(4.4) \quad p(\omega, c) = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega+\gamma)}} \sin \gamma (\sin \gamma - \cos \gamma \sqrt{\frac{A(\omega, c) - B(\omega, c)}{A(\omega, c) + B(\omega, c)}}),$$

gdzie

$$A(\omega, c) = \sqrt{2+2 \cos 2\gamma} \sqrt{[1-c \sin^2 2(\omega+\gamma)] (1-c \sin^2 2\omega) - c [\sin^2 2\omega + \sin^2 2(\omega+\gamma)]},$$

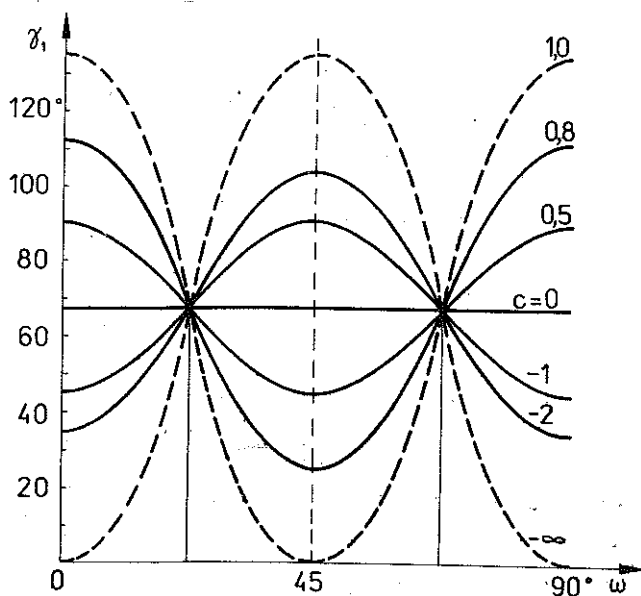
$$B(\omega, c) = \sqrt{1-c \sin^2 2(\omega+\gamma)} + \sqrt{1-c \sin^2 2\omega} \cos 2\gamma.$$

Położenie linii nieciągłości naprężeń określone jest wzorem

$$(4.5) \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} \arccos \frac{B}{A},$$

który dla szczególnego przypadku $\gamma = \frac{3}{4} \pi$ przyjmuje postać

$$(4.6) \quad \gamma_1 = \arccos \frac{\sqrt{1-c \cos^2 2\omega} - \sqrt{\frac{1}{2}(1-c \sin^2 2\omega)}}{\sqrt{2-c} - \sqrt{2(1-c) - \frac{1}{2}c^2 \sin^2 4\omega}}$$



Rys. 6

Rysunek 6 pokazuje, jak nachylenie (4.6) zmienia się w zależności od kąta wewnętrznej orientacji materiału ω . Łatwo zauważyć, że dla pewnych wartości ω anizotropia materiału nie wpływa na położenie linii nieciągłości naprężeń.

Jeśli $\gamma = 90^\circ$, to wzór (4.4) przechodzi w prosty wzór następujący:

$$(4.7) \quad p = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}$$

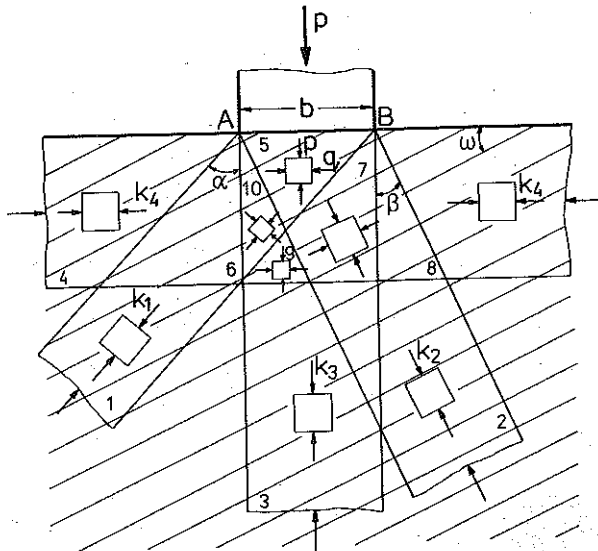
Jest widoczne, że obciążenie graniczne w tym przypadku jest takie samo jak w przykładzie z rys. 2.

Dla materiału izotropowego ($c = 0$) ciśnienie (4.4) osiąga wartość $p = 2T(1 - \cos \gamma)$, a nachylenie linii nieciągłości wynosi $\gamma_1 = \gamma/2$ [4].

5. WCISKANIE STEPLA W PÓLPRZESTRZEŃ

Nieodkształcalny płaski stempel wciskany jest bez tarcia w ortotropową, plastyczną półprzestrzeń w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Nośność graniczną tej półprzestrzeni można oszacować, konstruując układ statycznie dopuszczalnych, nieciągłych pól naprężenia (rys. 7). Określona w analogiczny sposób dolna ocena nośności granicznej półprzestrzeni izotropowej wynosi $5k$ i jest bliska rozwiązaniu zupełnemu $p = k(2 + \pi)$ podanemu przez Prandtla [4].

Rozważmy jednoosiowe, jednorodne pola naprężenia 1, 2, 3, 4 (rys. 7), w których osiągnięty został stan plastyczny zgodnie z warunkiem (2.1). Odpowiadające naprężenia ściskające wynoszą



Rys. 7

$$(5.1) \quad k_1 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega+\alpha)}}, \quad k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega-\beta)}},$$

$$k_3 = k_4 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}.$$

Równość k_3 i k_4 wynika z przyjętego warunku plastyczności. Równania równowagi, statyczne warunki brzegowe oraz warunków plastyczności są w obszarach 1, 2, 3, 4 spełnione z założenia. Cały układ pól z rys. 7 powinien znajdować się w równowadze, a zatem musi spełniać równania następujące:

$$(5.2) \quad pb = k_1 b \cos^2 \alpha + k_2 b \cos^2 \beta + k_3 b,$$

$$k_1 b \sin \alpha \cos \alpha - k_2 b \sin \beta \cos \beta = 0.$$

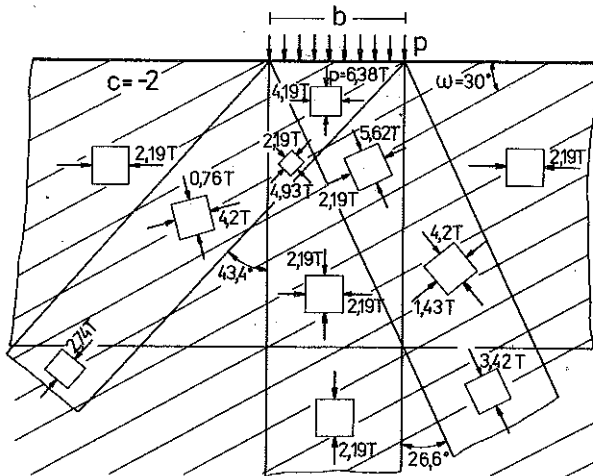
Aby uzyskać lepsze oszacowanie obciążenia granicznego przyjęto, że uplastyczniał się obszar 5, który powstał z superpozycji jenoosiowych stanów 1, 2, 3, 4. Warunek plastyczności przyjmuje tu postać

$$(5.3) \quad p - q = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}.$$

Ponadto tensor naprężenia w tym obszarze stanowi superpozycję tensorów naprężenia w obszarach 1, 2, 3, 4, pierwszy więc niezmiennik tego tensora jest sumą pierwszych niezmienników odpowiednich tensorów składowych:

$$(5.4) \quad p + q = k_1 + k_2 + 2k_3.$$

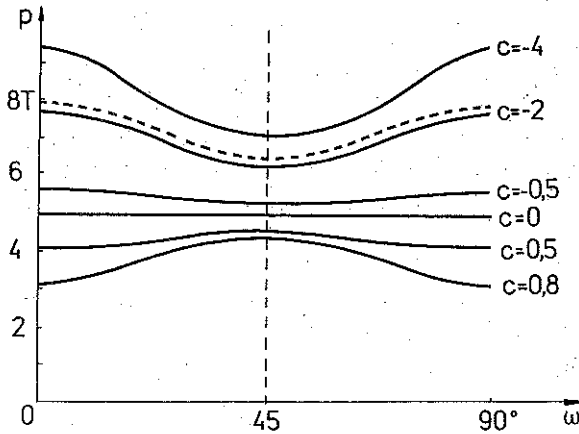
W strefie 9 występuje hydrostatyczny stan naprężenia, gdyż w obszarach 3 i 4 działają wzajemnie prostopadłe naprężenia ściskające o tej samej wartości k_3 . Stan hydrostatyczny nie ma wpływu na kierunki naprężeń



Rys. 8

głównych w obszarach 7 i 10 — w 7 będą one takie same jak w 2, a w 10 takie same jak w 1. Kierunki główne w obszarze 5 wynikają wprost z warunków brzegowych na krawędzi AB .

W przypadku materiału izotropowego rozwiązanie układu równań (5.1) — (5.4) prowadzi do wyniku $\alpha = \beta = 30^\circ$, $p = 5T = 5k$, $q = 3k$; układ pól naprężenia z rys. 7 jest wówczas osiowo-symetryczny [4]. Dla rozważanego ośrodka ortotropowego przykładowe rozwiązanie przedstawia rys. 8. Ze względu na to, że stan naprężenia w polu 5 wyznaczono numerycznie, nie można podać analitycznego wzoru na wartość p . Widoczne jest jednak, że ortotropia materiału zmienia kształt statycznie dopuszczalnych pól naprężenia występujących w tym przykładzie, gdyż położenie pól 1 i 2 jest niesymetryczne względem osi obciążenia. Jedynie w przypadku, gdy $\omega = 0^\circ, 45^\circ$ lub 90° otrzymujemy, tak samo jak w izotropii, układ symetryczny lecz wynika to tylko z założonego warunku plastyczności. Po obliczeniu obciążenia granicznego należy jeszcze określić naprężenia w obszarach 6, 7, 8, 10 i sprawdzić, czy nie został w nich przekroczony warunek plastyczności



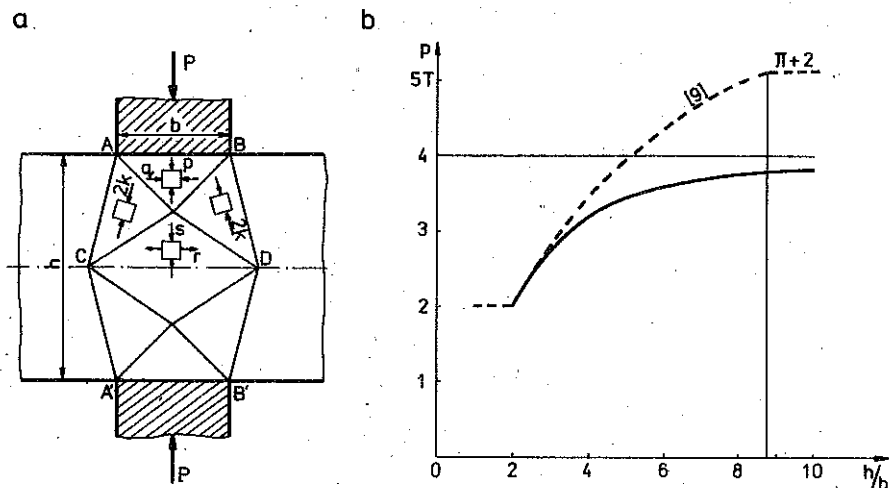
Rys. 9

(rys. 8). Rysunek 9 obrazuje relację między otrzymaną dolną granicą obciążenia niszczącego p , a kątem orientacji wewnętrznej ω przy różnych wartościach parametru c . Dla $c = -2$ oznakowano linią przerywaną krzywą ilustrującą rozwiązanie dokładne uzyskane przez HILLA [1] metodą charakterystyk. Różnice między rozwiązaniem dokładnym a otrzymanym dolnym oszacowaniem są niewielkie i wynoszą około $0,2T$ wobec $0,14T$ dla ośrodka izotropowego.

6. PRZECINANIE PASMA

Rozpatrzmy pasmo z ortotropowego materiału o grubości h , ściskane obustronnie przez dwa zbliżające się do siebie płaskie stemple o szerokości b , przy czym $2b < h$.

W przypadku, gdy materiał pasma jest izotropowy, jedną z możliwych dolnych ocen obciążenia granicznego otrzymuje się stosując złożenie dwóch statycznie dopuszczalnych, trapezowych pól naprężenia zaproponowanych przez WINZERA i CARRIERA [2] (rys. 10a). Nacisk stempli, wynikający z tak przyjętych pól naprężenia wynosi [10]



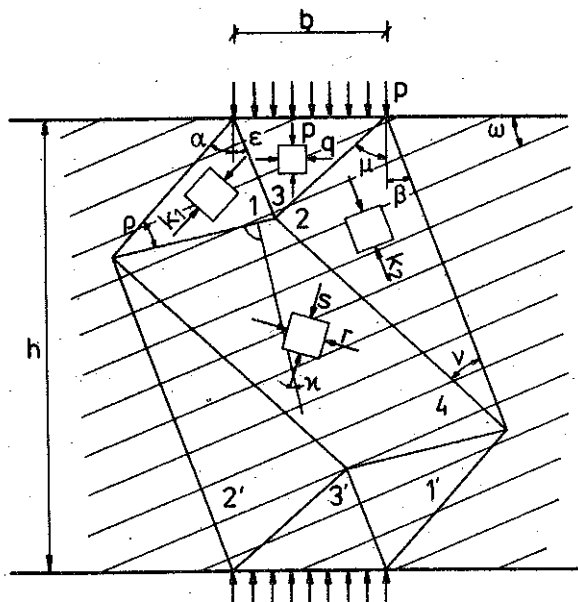
Rys. 10

$$(6.1) \quad p = 2T \left(1 + \frac{(h/b)^2 - 4}{(h/b)^2 + 4} \right)$$

i jest zilustrowany na rys. 10b. Wszystkie części trapezów $ABCD$ i $A'B'CD$ są w stanie plastycznym, cały zaś system pól naprężenia jest symetryczny względem wypadkowej obciążenia. Krzywa narysowana linią przerywaną obrazuje lepsze dolne oszacowanie nośności pasma uzyskane metodą przedłużenia linii poślizgu w obszary sztywne [9].

Dla materiału ortotropowego wydaje się uzasadnione przyjęcie niesymetrycznego ułożenia trapezowych pól naprężeń (rys. 11). Jak wiadomo, w metodzie statycznej muszą być zachowane dwie grupy zależności: warunki równowagi na liniach nieciągłości oraz warunek plastyczności, który nie może być przekroczony w żadnym z pól naprężenia. W analizowanym przykładzie warunki równowagi na nieciągłościach są następujące:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} k_1 \sin^2(\alpha + \varepsilon) &= p \sin^2 \varepsilon + q \cos^2 \varepsilon, \\ k_1 \sin 2(\alpha + \varepsilon) &= (p - q) \sin 2\varepsilon, \\ k_2 \sin^2(\mu + \beta) &= p \sin^2 \mu + q \cos^2 \mu, \\ k_2 \sin 2(\mu + \beta) &= (p - q) \sin 2\mu, \\ k_1 \sin^2 \varrho &= s \cos^2 \kappa - r \sin^2 \kappa, \\ k_1 \sin 2\varrho &= (s + r) \sin 2\kappa, \\ k_2 \sin^2 \nu &= s \cos^2(\alpha + \beta + \varrho + \nu + \kappa) - r \sin^2(\alpha + \beta + \varrho + \nu + \kappa), \\ -k_2 \sin 2\nu &= (s + r) \sin 2(\alpha + \beta + \varrho + \nu + \kappa). \end{aligned}$$



Rys. 11

Ponadto należy uwzględnić równowagę momentów, która dla pasma izotropowego jest spełniona automatycznie ze względu na symetrię przyjętego schematu pól naprężeń, w rozważanym zaś przypadku ortotropowym wyraża się wzorem

$$(6.3) \quad k_1 \sin 2\varrho = k_2 \sin 2\nu.$$

Natomiast założenie, że w obszarach 1, 2, 3, 4 oraz 1', 2', 3' osiągnięty został stan plastyczny, wymaga spełnienia następujących równań:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} k_1 &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega+\alpha)}}, \\ k_2 &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega-\beta)}}, \\ (p-q) &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}, \\ (s+r) &= 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\alpha+\omega+\varrho+\kappa)}}. \end{aligned}$$

Zależności geometryczne układu dostarczają kolejnego związku

$$(6.5) \quad \frac{h}{b} = \frac{\cos \varepsilon \cos \mu \sin(\alpha+\beta) [\sin(\alpha+\varepsilon) \cos(\mu+\beta) - \sin(\mu+\beta) \cos(\alpha+\varepsilon)]}{\sin(\mu+\varepsilon) [\sin \alpha \cos \mu \sin(\alpha+\varepsilon) - \sin \beta \cos \varepsilon \sin(\mu+\beta)]}.$$

Równania (6.2)—(6.5) stanowią podstawowy układ równań dla rozpatrywanego zagadnienia przecinania pasma przy założeniu, że wszystkie obszary są uplastycznione. Podstawiając (6.3)₁ do (6.2)₆ i (6.2)₈ otrzymujemy

$$(6.6) \quad 2\kappa + \alpha + \beta + \varrho + \nu = k\pi, \quad k \in C,$$

a po wprowadzeniu tego wyniku do (6.2)₅ i (6.2)₇ dochodzimy do zależności

$$(6.7) \quad k_1 \sin^2 \varrho = k_2 \sin^2 \nu.$$

Porównując równania (6.3) i (6.7) łatwo można zauważyć, że

$$(6.8) \quad k_1 = k_2 \text{ i } \varrho = \nu,$$

a w konsekwencji

$$(6.9) \quad \alpha = \beta, \quad \mu = \varepsilon, \quad \alpha + \varrho + \varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Oznacza to, że trapezowe pola naprężenia użyte do oszacowania nośności pasma (rys. 11) muszą być, tak samo jak w izotropii, symetryczne względem osi działania obciążenia. Wpływ anizotropii materiału odzwierciedli się w tym, że albo naprężenia k_1 albo k_2 zostaną zredukowane do wartości niższej od odpowiadającej im granicy plastyczności k_1^p lub k_2^p . Wynika stąd wniosek, że po to, aby mogły być spełnione wszystkie równania równowagi założonego układu pól naprężenia, jeden z obszarów 1 lub 2 musi pozostać nieuplastyczniony.

Rozwiązanie podstawowego układu równań (6.2)—(6.5) bez (6.4)₂ nie wydaje się możliwe do uzyskania w sposób analityczny, gdyż pojawiają się wówczas równania przestępne stopnia wyższego niż 4. Poszukiwaną funkcję $p = p(h/b)$ udaje się wyznaczyć stosując następujący algorytm postępowanie «nie wprost». Zakłada się wartości α , znając α oblicza się kąt ε z równania, które powstaje przez podstawienie (6.4)₁ do (6.2)₂, mianowicie

$$(6.10) \quad \sin^4 2\varepsilon (A_1^2 + 4B_1^2) - \sin^2 2\varepsilon (2A_1 C_1 + 4B_1^2) + C_1^2 = 0,$$

gdzie

$$A_1(\alpha, \omega, c) = (c-2) \sin^2 2\alpha + \frac{1}{2} c \sin 4\alpha \sin 4\omega,$$

$$B_1(\alpha, \omega, c) = \frac{1}{2} (c \sin^2 2\omega - 1) \sin 4\alpha,$$

$$C_1(\alpha, \omega, c) = (c \sin^2 2\omega - 1) \sin^2 2\alpha,$$

a następnie z (6.9) wylicza się kąt ϱ . Dokładna analiza wykazuje, że (6.10) jest poprawne dla $\alpha \leq 45^\circ$. Oznacza to, że przyjęte pola naprężenia są efektywne w sensie oceny nośności pasma jedynie w pewnym przedziale wartości h/b . Wielkość tego przedziału zależy od kąta wewnętrznej orientacji materiału oraz od intensywności ortotropii. Skoro znane są kąty α , ε , ϱ , możliwe jest już ustalenie naprężeń w poszczególnych obszarach (rys. 11):

$$k_1^p = k_2 = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2(\omega+\alpha)'}}$$

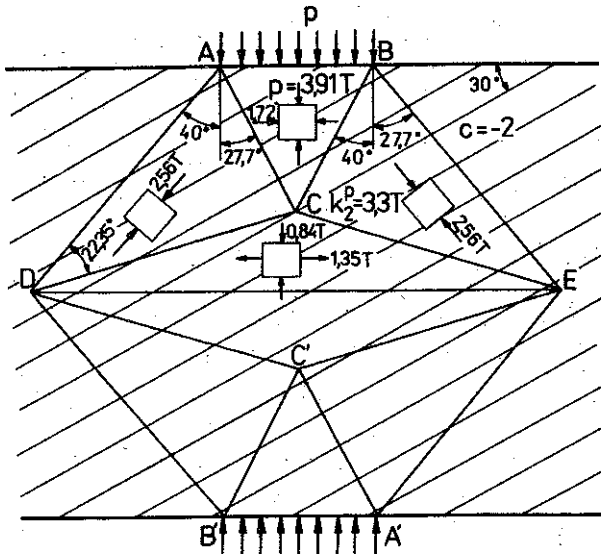
$$(6.11) \quad s = k_1 \sin^2 \varrho [1 + \operatorname{ctg}(\alpha + \varrho) \operatorname{ctg} \varrho],$$

$$r = k_1 \sin^2 \varrho [\operatorname{ctg} \varrho \operatorname{tg}(\alpha + \varrho) - 1] = 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}} - s.$$

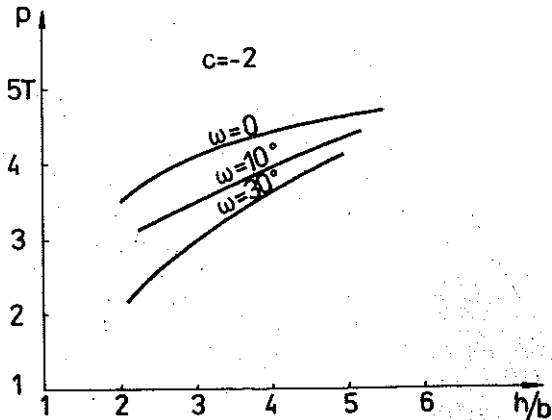
oraz wielkość poszukiwanego granicznego nacisku stempli p :

$$(6.12) \quad p = k_1 \sin^2(\alpha + \varepsilon) [1 + \operatorname{ctg}(\alpha + \varepsilon) \operatorname{ctg} \varepsilon],$$

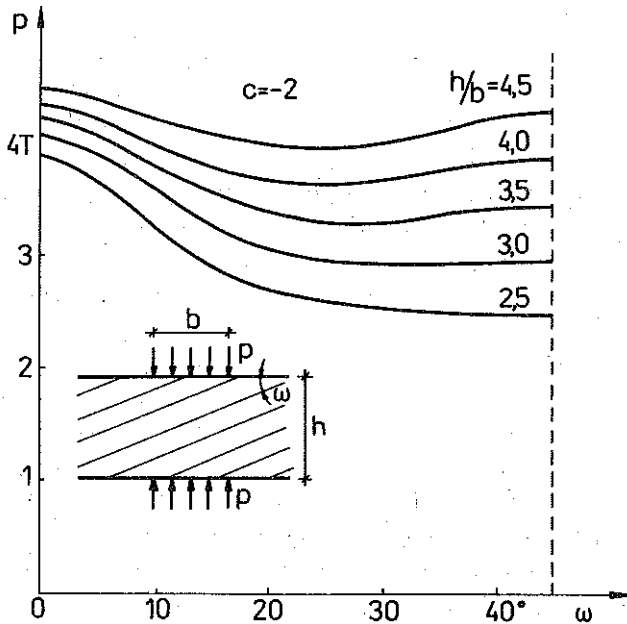
$$q = p - 2T \sqrt{\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\omega}}$$



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

Odpowiadającą wartość parametru h/b oblicza się ze wzoru (6.5), który po uwzględnieniu (6.9) przybiera postać

$$(6.13) \quad \frac{h}{b} = \frac{\operatorname{ctg} \varepsilon + \operatorname{ctg} (\alpha + \varrho)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} (\alpha + \varrho)}$$

Na koniec trzeba jeszcze sprawdzić, czy naprężenie $k_2 = k_1^p$ nie narusza warunku plastyczności dla obszaru 2. Na rys. 12 przedstawiono przykładowe rozwiązanie dla szczególnego kąta wewnętrznego uwarstwienia materiału $\omega = 30^\circ$ przy zachowaniu warunku $k_2 = k_1^p$, co jest równoważne z nieuplastycznieniem trójkątów BCE i $B' C' D$, lecz inaczej układ pól nie byłby statycznie dopuszczalny. Rysunek 13 obrazuje zależność $p = p(h/b)$ dla kilku wartości ω przy danym współczynniku intensywności ortotropii c .

Zależność dolnej oceny nośności granicznej rozpatrywanego pasma od kąta orientacji wewnętrznej materiału przy jednostajnie zmieniającym się stosunku h/b ilustruje rys. 14. Widoczna jest symetria rozwiązania względem prostej $\omega = 45^\circ$. Jest to konsekwencja przyjętego warunku plastyczności (rys. 2b).

7. WNIOSKI

Metoda statycznie dopuszczalnych pól naprężenia jest skuteczna i prosta, gdy ocenia się nośność graniczną elementów konstrukcji wykonanych z materiałów izotropowych. Zachowuje ona swą poprawność i daje pozytywne wyniki również i wówczas, gdy mechaniczne własności ośrodka mają charak-

ter kierunkowy. Przedstawione przykłady dowodzą, że efektywność metody w przypadku ośrodków anizotropowych jest jednak mniejsza, głównie z powodu skomplikowanych związków trygonometrycznych. Niemniej są to zawsze zależności algebraiczne i zbudowanie odpowiednich programów numerycznych nie sprawia trudności.

Anizotropia pierwotna, która odzwierciedla się w warunku plastyczności, wpływa na wartość granicy plastyczności w zależności od kierunku, zmienia rozkład naprężeń w danej konstrukcji, wywołuje inne niż w izotropii własności linii nieciągłości naprężeń [8]. W rezultacie zmienia się kształt układów statycznie dopuszczalnych pól naprężenia, gdyż nie muszą już one być symetryczne względem osi obciążenia, jak to miało miejsce w przypadku izotropowym. Z drugiej strony możliwe jest stosowanie symetrycznych pól trapezowych do zagadnień izotropowych (rys. 12), lecz wówczas nie wszystkie obszary będą w stanie plastycznym, co pociąga za sobą gorszą ocenę nośności granicznej. W przykładzie przecinania ortotropowego pasma symetryczne położenie trapezowych pól naprężenia nie jest przyjęte dowolnie, lecz wynika z warunku równowagi momentów układu. W przypadku materiałów izotropowych nie ma potrzeby sprawdzania tego warunku, gdyż jest on spełniony automatycznie.

Należy podkreślić, że uzyskanie dolnych oszacowań obciążeń granicznych w postaci zamkniętych wzorów jest możliwe jedynie w bardzo prostych przypadkach, takich jak np. stateczność ortotropowej skarpy (rys. 5). W bardziej skomplikowanych zagadnieniach lub przy konstruowaniu złożonych pól naprężeń trzeba stosować przybliżone metody analityczno-graficzne lub programy numeryczne ze względu na występowanie równań przestępnych wysokiego stopnia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford 1956.
2. A. WINZER, G. F. CARRIER, *The interaction of discontinuity surface in plastic fields of stress*, J. Appl. Mech., 261—264, September 1948.
3. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968.
4. W. F. CHEN, *Limit analysis and soil plasticity*, Elsevier, Amsterdam 1975.
5. J. M. BEYNET, A. SAWCZUK, *On statically admissible stress fields in anisotropic solids*, I. Kisiel Anniversary Volume, Wrocław Technical University Press, 1981.
6. M. BASISTA, *Dolna ocena nośności granicznej ośrodków plastycznie anizotropowych w płaskim stanie odkształcenia*. Prace IPPT 2/81.
7. M. BASISTA, A. SAWCZUK, *On lower bound estimations of the collapse load in anisotropic plasticity*, Proc. Coll. C.N.R.S. 319, Villard-de-Lans, 1981 [w druku].
8. J. P. BOEHLER, A. SAWCZUK, *Équilibre limite des sols anisotropes*, J. de Méc., 9, 5—33, 1970.
9. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
10. R. IZBICKI, Z. MRÓZ, *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skal*, PWN, Warszawa 1967.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОЦЕНКЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД МЕТОДОМ СТАТИЧЕСКИ ДОПУСТИМЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе применена статическая теорема теории предельной несущей способности для оценки разрушающей нагрузки в случае пластически анизотропных сред. Анализ касается условия пластичности Хилла и плоского деформационного состояния. Представлено влияние анизотропии материала на свойства линии разрыва напряжений, а также на принципы построения систем статически допустимых полей напряжений. Указаны характеристические свойства статического метода, вытекающие из анизотропии материала. Приведены примеры оценки предельной несущей способности равномерно нагруженного клина, полупространства, подвергнутого вдавливанию жесткого штампа, а также полосы, разрезаемой двумя противоположными штампами.

SUMMARY

ON THE ESTIMATION OF THE LOAD CARRYING CAPACITY OF PLASTICALLY ANISOTROPIC MEDIA BY MEANS OF THE METHOD OF STATICALLY ADMISSIBLE STRESS FIELDS

The paper deals with the application of the lower bound theorem to the collapse load evaluation in plastically anisotropic bodies. The analysis is concerned with the Hill criterion under the conditions of plane strain. Properties of the stress discontinuity line are considered, the rules of constructing simple homogeneous and discontinuous stress fields being considered. Specific features of the lower bound technique in application to anisotropic plasticity are presented. The lower bound estimates of the limit load are given for an uniformly loaded wedge, for a stratified half-space indented by a rigid punch, and for an orthotropic layer cut by two opposite narrow punches.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWÓWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 marca 1982 r.
