

POWŁOKA WALCOWA ZAMKNIĘTA OBCIĄŻONA ANTYSYMETRYCZNYM UKŁADEM SIŁ SKUPIONYCH STYCZNYCH DO BRZEGU I DO POWIERZCHNI ŚRODKOWEJ

TADEUSZ KACPERSKI i ROBERT MOŁDACH (WARSZAWA)

Przedstawiono analizę zachowania się półnieskończonej powłoki walcowej obciążonej siłami skupionymi stycznymi do swobodnego brzegu i do powierzchni środkowej, działającymi w jednym kierunku wzdłuż obwodu. Wyprowadzono wzory, oparte na równaniach Donnella–Własowa. Przeprowadzono obliczenia numeryczne dla przypadku, gdy powłoka obciążona jest dwiema jednakowymi siłami wprowadzonymi w naprzemianległe punkty obwodu. Wyznaczono składowe przemieszczeń oraz momentów i sił wewnętrznych.

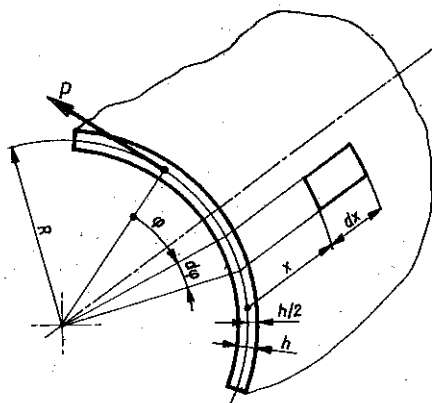
1. WSTĘP

Sformułowane w tytule zadanie można rozwiązać z dostateczną dokładnością dla większości zastosowań technicznych, opierając się na teorii powłok opracowanej przez DONNELLA [1], WŁASOWA [2] lub też na teorii udoskonalonej przez ŁUKASIEWICZA [3]. Postawione zadanie nie zostało jeszcze szczegółowo opisane w literaturze. W pracy [4] analizowane są problemy podobne. Nie zostały jednak podane pełne wyniki oraz wzory dla tego ważnego technicznie przypadku. W pracach [5 i 6] przedstawiono rozwiązania dla półnieskończonej powłoki walcowej zamkniętej obciążonej siłami skupionymi normalnymi do brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej, gdy brzeg tej powłoki jest swobodny lub zamocowany przegubowo. Do rozwiązania tych zadań zostały wykorzystane równania Donnella–Własowa. Dla przypadku opisanego w pracy [5] przeprowadzono badania doświadczalne, których wyniki potwierdziły zadowalającą zgodność z wartościami uzyskanymi z obliczeń numerycznych.

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzorów dla półnieskończonej powłoki walcowej zamkniętej obciążonej siłami skupionymi stycznymi do swobodnego brzegu i do powierzchni środkowej, działającymi w jednym kierunku wzdłuż obwodu. Jako podstawę do wyprowadzenia wzorów dla tak sformułowanego zadania przyjęto również równania Donnella–Własowa.

2. ROZWIĄZANIA TEORETYCZNE

Rozwiązanie powłoki obciążonej jak na rys. 1 sprowadza się do rozwiązania układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu



Rys. 1

$$(1) \quad \begin{aligned} D\Delta\Delta w - \Delta_k \Phi &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $D = (Eh^3)/[12(1-\nu^2)]$ oznacza sztywność powłoki, Δ operator Laplace'a, który dla powłoki walcowej ma postać

$$(2) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Operator Δ_k ma postać

$$(3) \quad \Delta_k = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Przyjęto również następujące oznaczenia:

- w przemieszczenie promieniowe powłoki,
- Φ funkcja naprężeń,
- E moduł Younga,
- h grubość powłoki,
- ν współczynnik Poissona,
- R promień powierzchni środkowej powłoki,
- x odległość rozpatrywanego punktu powłoki od jej swobodnego brzegu,
- φ kąt zawarty pomiędzy rozpatrywanym punktem a płaszczyzną odniesienia.

Dla podanego schematu obciążenia ugięcie powłoki w oraz funkcję naprężeń Φ można przedstawić w postaci następujących szeregów:

$$(4) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin n\varphi,$$

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \sin n\varphi,$$

Korzystając z podstawienia

$$(5) \quad \begin{aligned} w_n &= e^{k \frac{x}{R}}, \\ \Phi_n &= \lambda e^{k \frac{x}{R}}, \end{aligned}$$

oraz z równań i oznaczeń (1)–(4) otrzymuje się układ dwu równań algebraicznych:

$$(6) \quad \begin{aligned} D(k^4 - 2k^2 n^2 + n^4) - \lambda R k^2 &= 0, \\ \lambda(k^4 - 2k^2 n^2 + n^4) + E h R k^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (6) uzyskuje się następującą postać równania charakterystycznego:

$$(7) \quad (k^2 - n^2)^4 + 4k^4 k^2 = 0,$$

gdzie

$$(8) \quad k^2 = \frac{R}{h} \sqrt{3(1 - \nu^2)},$$

oraz zależność pomiędzy funkcją naprężeń Φ_n i ugięciem w_n

$$(9) \quad \lambda = \frac{\Phi_n}{w_n} = \pm 2i k^2 \frac{D}{R},$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$.

Rozwiązując równanie charakterystyczne (7) ustalono, że znak plus we wzorze (9) odpowiada nieparzystym pierwiastkom, a znak minus parzystym.

Pierwiastki k_1, \dots, k_8 równania charakterystycznego (7) określone są ogólnym wzorem

$$(10) \quad k_{1 \dots 8} = \frac{\alpha}{2} \left[[\pm] 1 (\pm) \sqrt{\xi + \delta} \pm i ([\pm] 1 (\pm) \sqrt{\xi - \delta}) \right],$$

gdzie

$$(11) \quad \delta = \frac{2n^2}{\alpha^2},$$

$$\xi = \sqrt{1 + \delta^2}.$$

We wzorze (10) znaki występujące w jednakowych nawiasach należy przyjmować takie same.

Ugięcie w_n oraz funkcja naprężeń Φ_n określone są wzorami

$$w_n = \sum_{j=1}^8 A_j e^{k_j \frac{x}{R}},$$

(12)

$$\Phi_n = \sum_{j=1}^8 \lambda A_j e^{k_j \bar{x}}$$

Ponieważ rozpatrywana jest półnieskończona powłoka walcowa oraz ze względu na charakter funkcji $e^{k_j \bar{x}}$, przyjmuje się za równe zero stałe A_j odpowiadające pierwiastkom k_j , których część rzeczywista jest większa od zera. Nie można bowiem spodziewać się sytuacji, w której przemieszczenia i naprężenia będą rosły w sposób wykładniczy wraz ze wzrostem x . Mając to na uwadze, otrzymujemy

$$A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0,$$

$$k_1 = \frac{\kappa}{2} (b + ia),$$

$$k_2 = \frac{\kappa}{2} (b - ia),$$

$$k_3 = \frac{\kappa}{2} (d + ic),$$

$$k_4 = \frac{\kappa}{2} (d - ic),$$

gdzie

$$a = 1 - \sqrt{\xi - \delta},$$

$$b = 1 - \sqrt{\xi + \delta},$$

$$c = -(1 + \sqrt{\xi - \delta}),$$

$$d = -(1 + \sqrt{\xi + \delta}).$$

Siły wewnętrzne w rozważanej powłoce wyrażają się przez ugięcie w i funkcję naprężeń Φ . Znajomość ugięcia w pozwala na określenie momentów zginających i sił tnących oraz pozostałych przemieszczeń u i v . Natomiast siły błonowe uzyskuje się korzystając z funkcji naprężeń.

Siły i momenty wewnętrzne zaznaczone są na elementarnym wycinku powłoki walcowej przedstawionym na rys. 2. Można je wyrazić w postaci następujących związków fizycznych:

$$M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{v}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$M_{\varphi\varphi} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

(15)
[cd.]

$$M_{x\varphi} = -(1-\nu) \frac{D}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi},$$

$$Q_{xx} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} \right),$$

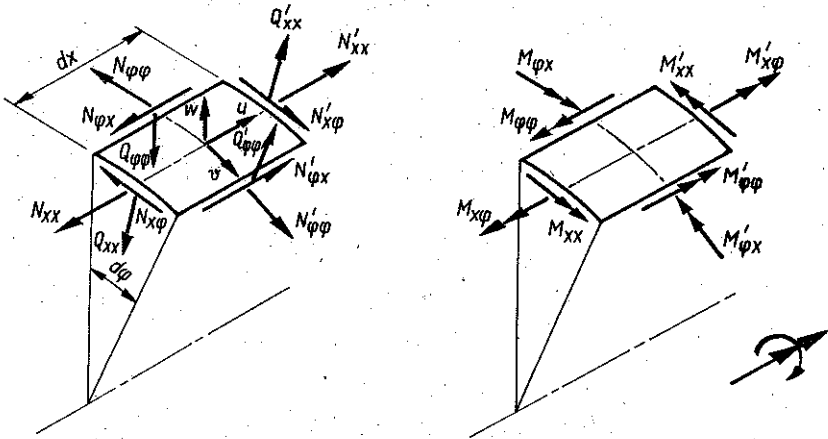
$$Q_{\varphi\varphi} = -\frac{D}{R} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right),$$

$$N_{xx} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2},$$

$$N_{\varphi\varphi} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$N_{x\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \varphi}.$$

Przemieszczenia u i v zaznaczone na rys. 2 są związane z ugięciem w zależnościami



Rys. 2

(16)

$$R^4 \Delta \Delta u = -R^3 \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + R \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2},$$

$$R^4 \Delta \Delta v = -R^2 (2+\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} - \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3}.$$

Podstawiając (4) do (15) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= -\frac{D}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{k_j \frac{x}{R}} (k_j^2 - vn^2) \sin n\varphi, \\
 M_{\varphi\varphi} &= -\frac{D}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{k_j \frac{x}{R}} (vk_j^2 - n^2) \sin n\varphi, \\
 M_{x\varphi} &= -\frac{D}{R^2} (1-v) \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{j=1}^4 A_j e^{k_j \frac{x}{R}} k_j \cos n\varphi, \\
 Q_{xx} &= -\frac{D}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{k_j \frac{x}{R}} k_j (k_j^2 - n^2) \sin n\varphi, \\
 Q_{\varphi\varphi} &= -\frac{D}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{j=1}^4 A_j e^{k_j \frac{x}{R}} (k_j^2 - n^2) \cos n\varphi, \\
 N_{xx} &= \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sum_{j=1}^4 \lambda A_j e^{k_j \frac{x}{R}} \sin n\varphi, \\
 N_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \lambda A_j e^{k_j \frac{x}{R}} k_j^2 \sin n\varphi, \\
 N_{x\varphi} &= \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{j=1}^4 \lambda A_j e^{k_j \frac{x}{R}} k_j \cos n\varphi.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Przyjmując

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 B_j e^{k_j \frac{x}{R}} \cos n\varphi, \\
 v &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 C_j e^{k_j \frac{x}{R}} \sin n\varphi.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

i korzystając z równań (16) otrzymuje się następujące związki pomiędzy stałymi B_j i C_j a stałą A_j :

$$\begin{aligned}
 B_j &= -\frac{vk_j^2 + n^2}{(k_j^2 - n^2)^2} k_j A_j, \\
 C_j &= \frac{n^2 - (2+v)k_j^2}{(k_j^2 - n^2)^2} n A_j.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Z warunków brzegowych można wyznaczyć dla każdej harmonicznej n stałe A_1, A_2, A_3, A_4 . Element wycięty na brzegu powłoki w otoczeniu punktu wprowadzenia siły P pozostaje w równowadze pod działaniem tej siły oraz sił wewnętrznych. Na swobodnym brzegu powłoki $x=0$ siły wewnętrzne powinny być równe zero. Z warunku tego wynika, że dla $x=0$

$$N_{xx} = 0, \quad M_{xx} = 0,
 \tag{20}$$

$$(20) \quad N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R} = P\delta(\varphi),$$

[cd.]

$$Q_{xx} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{R\partial\varphi} = 0,$$

gdzie $\delta(\varphi)$ jest funkcją Diraca.

Podstawiając do równań (20) związki fizyczne (15), otrzymujemy

$$(21) \quad \begin{aligned} N_{xx} &= -\left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right]_{x=0} = 0, \\ M_{xx} &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]_{x=0} = 0, \\ N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R} &= \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \varphi} - (1-\nu) \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right]_{x=0} = P\delta(\varphi), \\ Q_{xx} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{R\partial\varphi} &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 \varphi} \right]_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Po wstawieniu do równań (21) zależności (12) otrzymuje się dla każdej harmonicznej $n \geq 1$ układ czterech równań algebraicznych z niewiadomymi stałymi A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$(22) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 (-1)^j A_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 A_j (k_j^2 - \nu n^2) &= 0, \\ \sum_{j=1}^4 A_j k_j ((-1)^j 2ix^2 + 1 - \nu) &= -\frac{mPR^2}{\pi Dn}, \\ \sum_{j=1}^4 A_j k_j (-k_j^2 + n^2 (2-\nu)) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie m jest liczbą punktów rozstawionych na obwodzie w jednakowej podziałce obciążonych siłami P . W obliczeniach przy rozwiązywaniu układu równań (22) oraz we wzorach (17) n przyjmuje wartości kolejnych wielokrotności m (jeśli np. $m = 2$, to $n = 2, 4, 6, \dots$).

Po rozwiązaniu dla kolejnych harmonicznych układu równań (22) siły i momenty wewnętrzne oblicza się ze wzorów (17), ugięcie w ze wzoru (4) a pozostałe przemieszczenia u i v ze wzorów (18). Nie jest to jednak rozwiązanie pełne, gdyż uwzględnia jedynie wyższe harmoniczne obciążenia, to znaczy gdy $n \geq 1$. Przyjęto, że dla zerowej harmonicznej, czyli dla obciążenia brzegu równomiernym wydatkiem tnącym $p_0 = mP/2\pi R$, jedynymi

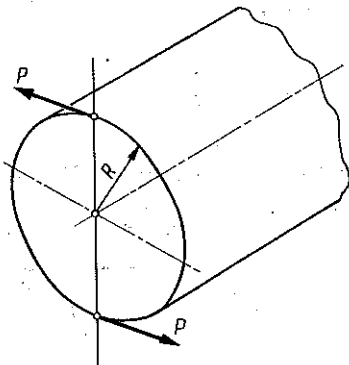
różnymi od zera wielkościami są przemieszczenie u , które wyraża się przez skrócenie względne Θ oraz siła wewnętrzna $N_{x\varphi}$. W rozpatrywanym przypadku wielkości te są następujące:

$$(23) \quad \Theta = \frac{mP(1+\nu)}{\pi EhR^2},$$

$$N_{x\varphi} = \frac{mP}{2\pi R}.$$

3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

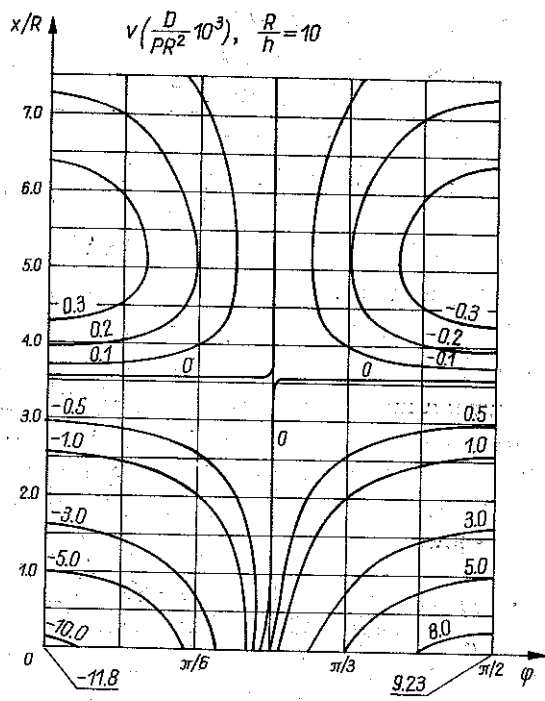
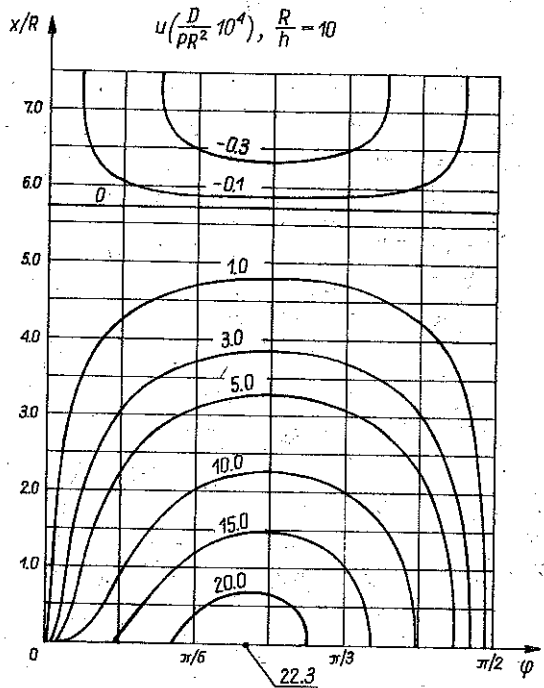
Wykonano obliczenia numeryczne rozpatrywanej powłoki w przypadku obciążenia jej brzegu jednakowymi siłami P wprowadzonymi w dwa naprzemianległe punkty obwodu ($m = 2$) (rys. 3). Do obliczeń przyjęto $R/h = 10$

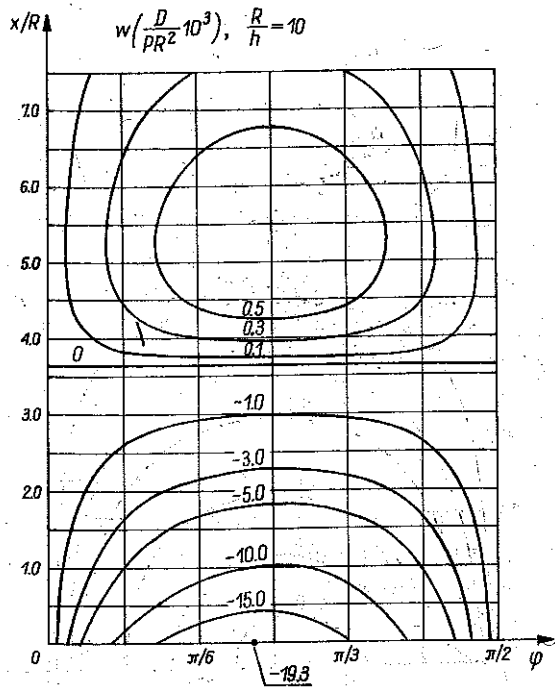


Rys. 3

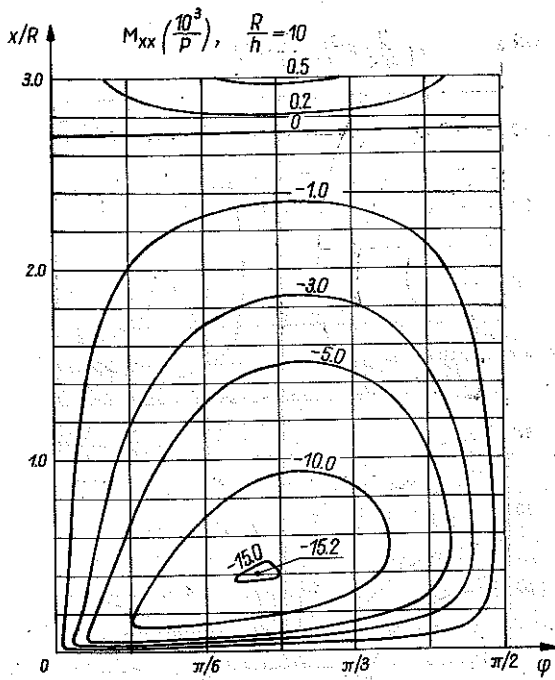
oraz $\nu = 0,3$. W przypadku obliczania składowych przemieszczeń zadowalającą dokładność udało się uzyskać po uwzględnieniu 20 wyrazów szeregu, to znaczy gdy $n = 40$. Natomiast obliczając składowe siły i momenty wewnętrznych uwzględniono maksymalnie 100 wyrazów szeregu, to znaczy gdy $n = 200$, co odpowiadało w przybliżeniu granicy możliwości obliczeniowych minikomputera o 16-bitowym słowie maszynowym. Okazało się bowiem, że dla $n > 200$ macierz układu równań (22) przy danej długości słowa maszynowego staje się osobliwa. W niektórych przypadkach nie pozwoliło to na uzyskanie dokładnych wyników w pobliżu brzegu powłoki, na przykład w obszarze $x/R < 0,1$. Tam gdzie było to możliwe ekstrapolowano wykresy.

Rezultaty obliczeń zostały przedstawione w wielkościach i współrzędnych bezwymiarowych, co może ułatwić wykorzystanie ich do obliczeń powłok o proporcjach wymiarowych $R/h = 10$, gdy $\nu = 0,3$. Dla powłok o innych parametrach konieczne jest wykonanie odpowiednich obliczeń według wzorów. Wielkości przemieszczeń oraz siły i momenty wewnętrznych w powłokach

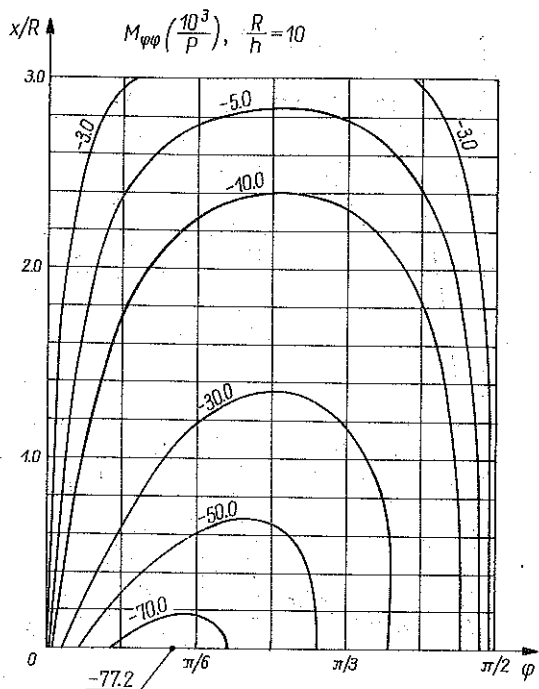




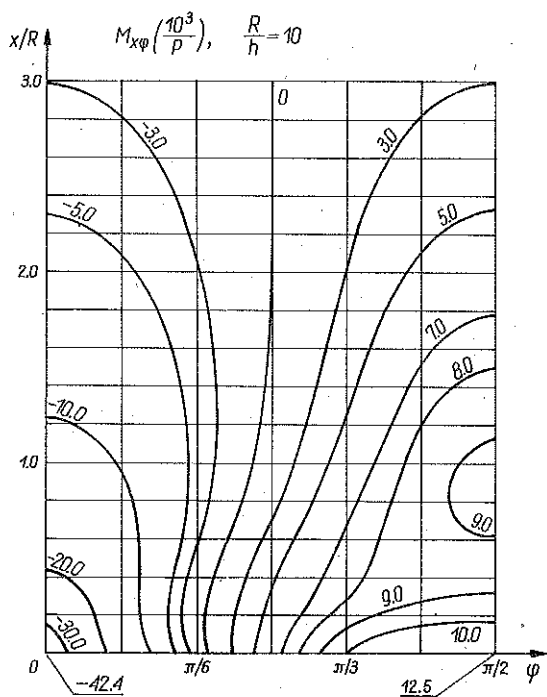
Rys. 6



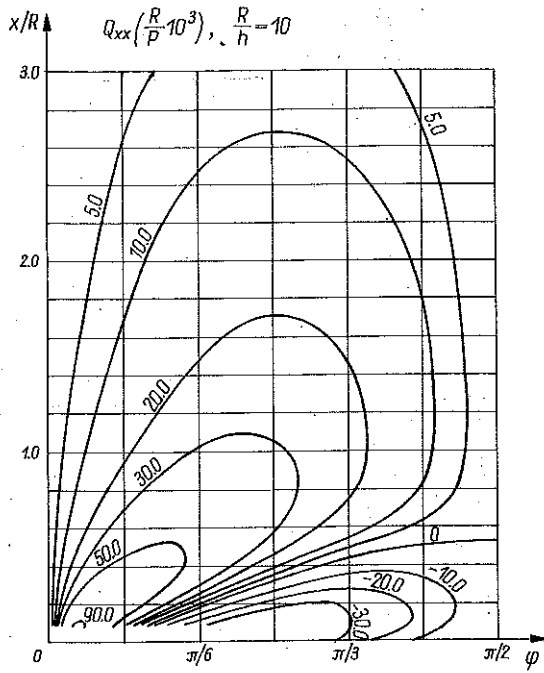
Rys. 7



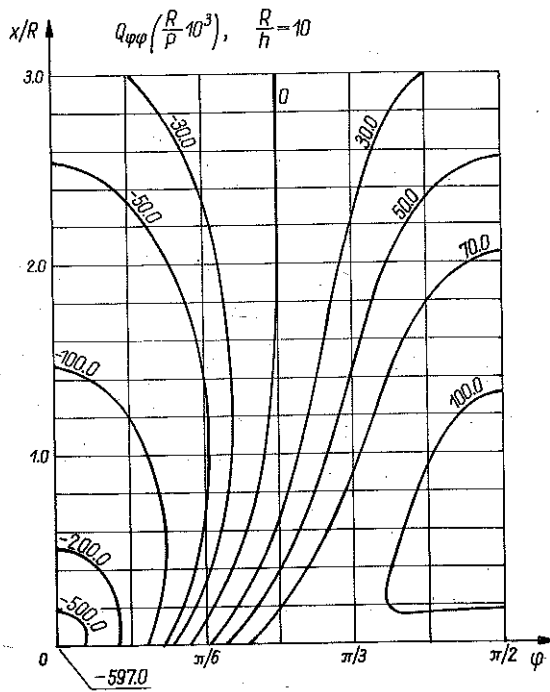
Rys. 8



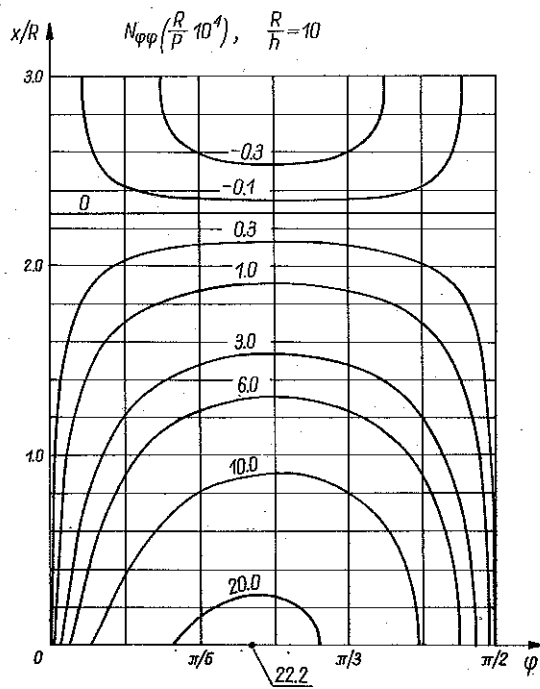
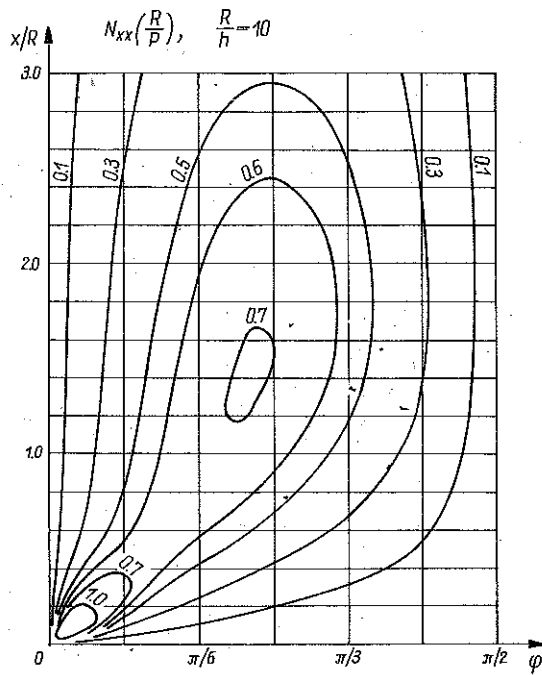
Rys. 9

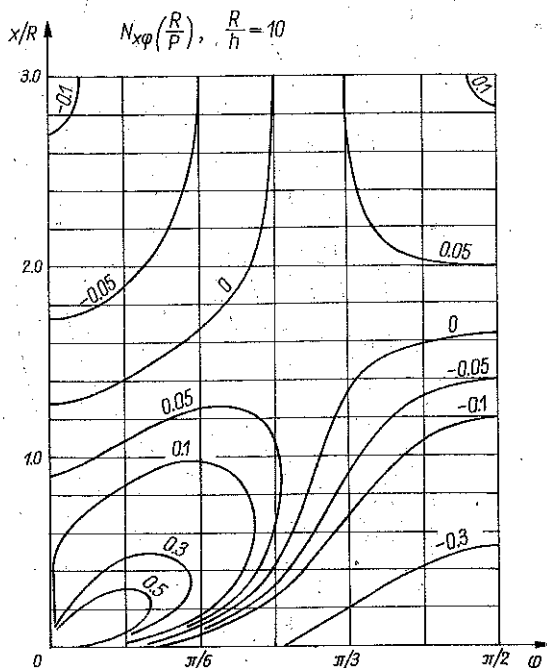


Rys. 10



Rys. 11





Rys. 14

cienkich zanikają wolniej ze wzrostem x/R niż w powłokach grubych. Rysunki 4, 5, 6 przedstawiają wykresy przemieszczeń u , v , w , a rysunki 7—14 podają wartości momentów i sił wewnętrznych M_{xx} , $M_{\varphi\varphi}$, $M_{x\varphi}$, Q_{xx} , $Q_{\varphi\varphi}$, N_{xx} , $N_{\varphi\varphi}$, $N_{x\varphi}$. Zostały one sporządzone przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych ($n > 1$) dla $\varphi \in (0, \pi/2)$. W pozostałych ćwiartkach wykresy są odpowiednio symetryczne lub antysymetryczne zgodnie z charakterem funkcji $\cos 2\varphi$ lub $\sin 2\varphi$, o czym decydują wzory (4), (17) i (18).

Okazuje się, że w przypadku obciążenia dwiema siłami ($m = 2$) największe ugięcie w_{\max} daje się przedstawić w postaci następującego wzoru:

$$(24) \quad w_{\max} \approx 0,67 \frac{PR}{Eh^2} \sqrt{\frac{R}{h}}$$

4. WNIOSKI

Maksymalne ugięcie w_{\max} maleje wraz ze wzrostem liczby obciążonych punktów m mimo, że sumaryczne obciążenie powłoki mP rośnie. Dla porównania dla identycznej powłoki obciążonej parą sił ($m = 2$) wzdłuż promienia współczynnik we wzorze (24) wynosi 2,29, jest więc tylko 3,42 razy większy

niż w obliczanym przypadku, choć jak się wydaje powłoka jest obciążona wtedy w sposób o wiele bardziej niekorzystny, gdyż siły wprowadzane są prostopadle do powierzchni środkowej. Jak wynika z przedstawionych wykresów przemieszczenia obwodowe v oraz promieniowe w są tego samego rzędu, natomiast deplanacja przekroju u jest od nich o rząd mniejsza. Maksymalna wartość ugięcia w występuje na brzegu dla $\varphi \approx 40^\circ$. Spośród sił błonowych dominujące znaczenie mają N_{xx} oraz $N_{x\varphi}$, które średnio o 2 do 3 rzędów przekraczają wartość $N_{\varphi\varphi}$. Moment $M_{\varphi\varphi}$ osiąga największą wartość na brzegu dla $\varphi \approx 25^\circ$, M_{xx} zaś dla $\varphi \approx 40^\circ$ w pewnej odległości od brzegu, w rozważanym przypadku dla proporcji $x/R = 0,4$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. H. DONNELL, *Stability of thin walled tubes under torsion*, NACA Report 749, 1933.
2. В. В. Власов, *Общая Теория Оболочек*, Москва-Ленинград, 1949.
3. S. ŁUKASIEWICZ, *Uzupełnienie równań technicznej teorii powłok*, Rozpr. Inżyn., **11**, 1, 1963.
4. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
5. T. KACPERSKI, *Powłoka walcowa zamknięta obciążona siłami skupionymi normalnymi do brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej*, Rozpr. Inżyn., **25**, 2, 1977.
6. T. KACPERSKI, *Powłoka walcowa zamknięta obciążona siłami skupionymi normalnymi do przegubowo zamocowanego brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej*, Rozpr. Inżyn., **32**, 3, 1984.

РЕЗЮМЕ

ЗАМКНУТАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА НАГРУЖЕННАЯ АНТИСИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ КАСАТЕЛЬНЫХ К ГРАНИЦЕ И К СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Представлен анализ поведения полубесконечной цилиндрической оболочки, нагруженной сосредоточенными силами касательными к свободной границе и к срединной поверхности, действующими в одном направлении вдоль периметра. Выведены формулы, опирающиеся на уравнения Доннелла-Власова. Проведены численные расчеты для случая, когда оболочка нагружена двумя одинаковыми силами, введенными в противоположащие точки периметра. Определены составляющие перемещений, а также моментов и внутренних сил.

SUMMARY

CLOSED CYLINDRICAL SHELL LOADED BY AN ANTISYMMETRIC SYSTEM OF CONCENTRATED FORCES TANGENT TO THE BOUNDARY AND TO THE MIDDLE SURFACE

A semi-infinite cylindrical shell is loaded by concentrated forces tangent to the free boundary and to the middle surface, acting in the same direction around the periphery.

The formulae derived are based on the Donnell-Vlasov equations. Numerical calculations are performed for the particular case of two equal forces applied to two opposite points of the boundary. Displacements and internal forces acting in the shell are determined.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

oraz

POLSKA AKADEMIA NAUK

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1984 r.
