

O FALACH PRZYSPIESZENIA W OŚRODKU SPRĘŻYSTOPLASTYCZNYM Z PAMIĘCIĄ DYSKRETNĄ

P. G U E L I N (GRENOBLE) i W. K. N O W A C K I (WARSZAWA)

Celem pracy jest określenie prędkości rozprzestrzeniania się fal przyspieszenia w sprężysto-plastycznym ośrodku ciągłym. W rozważaniach przyjęto model ośrodka sprężystoplastycznego z pamięcią dyskretną. Użyte równania konstytutywne charakteryzują nieodwracalność ewolucji elementu materialnego — model ciała z histerezą materiałową. Rozważano rozprzestrzenianie się fal płaskich dla przypadku kinematyki bezobrotowej jak też obrotowej. Rozważania przeprowadzono w układzie współrzędnych konwekcyjnych w zakresie skończonych deformacji.

Ostatnie dwa paragrafy są poświęcone zagadnieniom początkowo-brzegowym oraz zagadnieniom płaskich jednowymiarowych fal w przecie i fal kulistych w grubościennej powłoce sferycznej. Podano przykłady numeryczne.

1. WSTĘP

Zagadnienia rozprzestrzeniania się fal niesprężystych są związane z działaniem intensywnych obciążeń dynamicznych na elementy konstrukcji, przy czym intensywność naprężenia jest na tyle duża, że może spowodować ich odkształcenia plastyczne. Pierwsze prace związane z powyższą tematyką ukazały się już w latach czterdziestych, lecz ich rozkwit przypada na lata sześćdziesiąte. Wiele zagadnień zwłaszcza jednowymiarowych, zostało już szczegółowo zbadanych. Istnieje szereg monografii przedstawiających w sposób ogólny teorię uderzenia w niesprężystych ośrodkach ciągłych. Należy tutaj wymienić pionierskie monografie W. GOLDSMITHA [12] z 1960 r. oraz CH. A. RACHMATULINA i J. A. DEMIANOWA [24] z 1961 r. Szeroki przegląd prac z zakresu rozprzestrzeniania się fal w ciałach niesprężystych podano w monografii [19]. W ostatnich latach pojawiło się wiele prac związanych z dynamiką konstrukcji niesprężystych, zwłaszcza w zakresie skończonych deformacji. Ze względu na szybki rozwój technik obliczeniowych stało się możliwe rozwiązanie licznych problemów. Opracowano szereg metod numerycznego całkowania równań cząstkowych *quasi*-liniowych i nieliniowych (por. np. prace [1, 14 i 21]).

Badania związane z propagacją fal w trójwymiarowych ośrodkach niesprężystych były zapoczątkowane w 1960 r. przez J. MANDELA [16 i 17]. Były one kontynuowane w latach następnych przez wielu badaczy, np. [2, 4, 18, 20, 23 i 25–27]. We wszystkich wspomnianych badaniach istnieją punkty wspólne. Przede wszystkim w pracach tych rozróżnia się zagadnienia propagacji fal sprężystych i fal plastycznych, frontów „fal obciążenia” plastycznego lub „fal odciążenia”. Analiza fal przyspie-

szenia polega na dwukrotnym wykorzystaniu związków ciągłości HADAMARDA [13] z jednoczesnym wykorzystaniem równań ruchu i równań konstytutywnych ośrodka.

W niniejszej pracy natomiast zbadano wpływ dysypacji spowodowanej histerezą materiałową na prędkość propagacji fal. Wydaje się, że jest interesujące rozważenie przypadków dowolnych obciążeń cyklicznych w zagadnieniach dynamicznych związanych z propagacją fal naprężenia. W procesach falowych, zwłaszcza tam gdzie następują liczne odbicia fal, zmiany naprężeń występują bardzo często w zakresie przejściowym między sprężystością i plastycznością, przy istnieniu efektów wzmocnienia materiału.

Układ pracy jest następujący. Wychodząc od układu nieskończenie wielu modeli reologicznych [22] składających się z elementów sprężystych i suwaków ciernych, zaproponowano równania konstytutywne opisujące sprężystoplastyczne zachowanie się ośrodka ciągłego, uwzględniające histerezą materiałową. Następnie omówiono zagadnienia związane z określeniem prędkości fal przyspieszenia w ciałach niesprężystych w zakresie małych deformacji [16 i 17]. Rozwinięto je na przypadek fal przyspieszenia w zakresie skończonych deformacji, w ośrodku sprężystoplastycznym z histerezą materiałową. Rozważania przeprowadzono w układzie współrzędnych kowekcyjnych, w którym sformułowano równania konstytutywne. Przeprowadzono szczegółową analizę prędkości propagacji płaskich fal w przypadku przyjęcia kinematyki bezobrotowej i obrotowej. Przeanalizowano również przypadek propagacji fal sferycznych. Dwa ostatnie paragrafy pracy są poświęcone zagadnieniom początkowo-brzegowym; zagadnieniom płaskich jednowymiarowych fal w przecie oraz fal kulistych w grubościennej powłoce sferycznej. Rozważania te poparto przykładami numerycznymi.

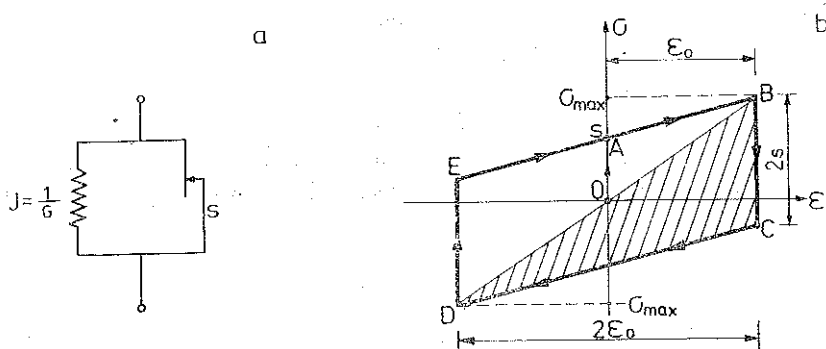
2. RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE

W rozważaniach przyjmujemy model składający się z nieskończonej ilości połączonych szeregowo elementów złożonych ze sprężyny i suwaka ciernego. Model ten charakteryzuje się dwiema interesującymi własnościami termomechanicznymi: 1) nieistnienie trajektorii odwracalnych (każda możliwa droga jest nieodwracalna); 2) istnienie pewnej klasy dróg obciążeń cyklicznych pozwalających na powrót do stanu początkowego (powrót modelu do stanu początkowego może być osiągnięty przez dużą liczbę prawie symetrycznych cykli, których amplitudy powoli zmniejszają się).

Przyjmujemy, że każdy element rozważanego modelu składa się ze sprężyny i elementu ciernego — połączonych równolegle (rys. 1a). Model jest scharakteryzowany przez dwa parametry:

- 1) granica s , począwszy od której suwak zaczyna się poruszać;
- 2) sztywność sprężyny G , będącą symbolem modułu (lub też przez jego odwrotność $J=1/G$).

Jeżeli poddamy rozważany element obciążeniu cyklicznemu, zawartemu między σ_{\max} i $-\sigma_{\max}$, to zmiana naprężenia σ jako funkcja odkształcenia ϵ jest zobrazowana

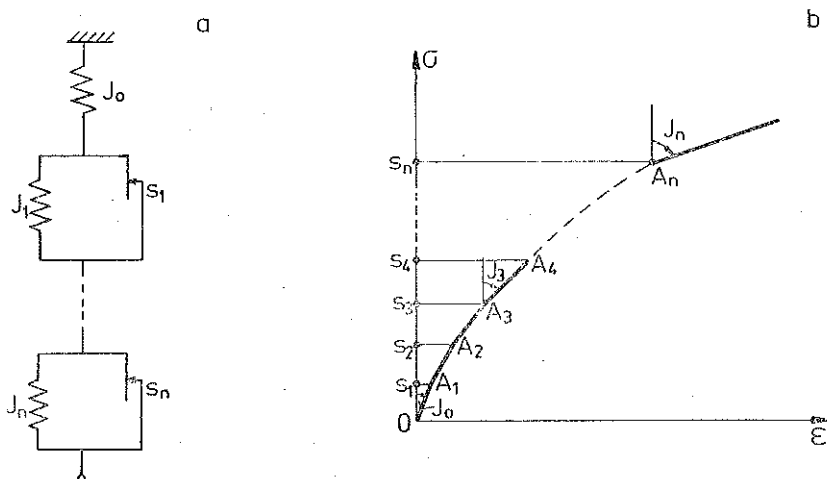


Rys. 1. a) Model symboliczny. b) Wykres naprężenia σ jako funkcja odkształcenia ϵ

na rys. 1b. Należy zwrócić uwagę na fakt, że w trakcie obciążenia cyklicznego, dla naprężenia zmieniającego się w granicach od σ_{max} do $-\sigma_{max}$, (cykl $BCDE$), każdy z trójkątów opisujących połowę cyklu -- $ABCD$ (zakreskowanego) oraz $ADEB$ mają boki dwa razy większe od odpowiednich boków trójkąta pierwszego obciążenia -- ΔOAB .

Zauważmy również, że w takim typie modelu symbolicznego nie występuje czas, ponieważ nie występuje on we własnościach obydwu elementów konstytutywnych.

Jeżeli n par elementów równolegle połączonych sprężyn i suwaków jest ułożonych szeregowo i uporządkowanych względem wzrastającej granicznej wartości s_i ($i=1, \dots, n$), to wykres pierwszego rozciągania ma postać linii łamanej (rys. 2b).

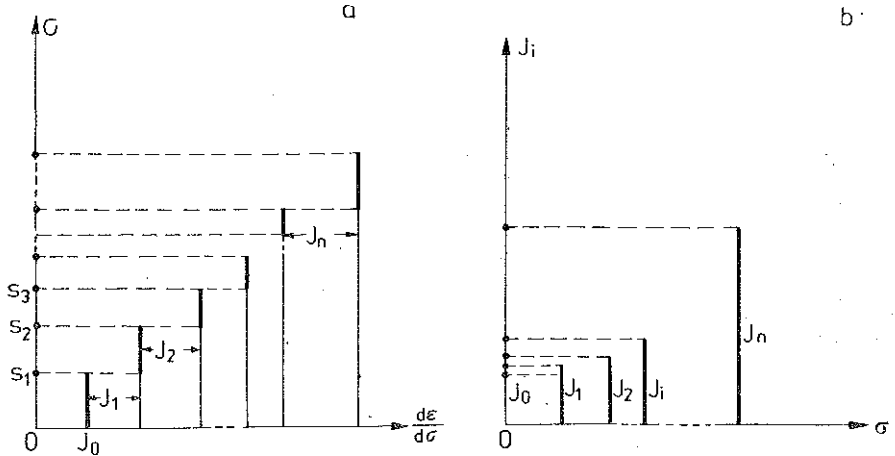


Rys. 2. Układ n par elementów równolegle połączonych sprężyn i suwaków

Odcinek OA_1 odpowiada wartości granicznej $s=0$, tzn. odpowiada elementowi, którego granica s jest równa zero oraz sprężyna ma sztywność G_0 (odkształcalność $J_0=1/G_0$). Punkty A_i ($i=1, \dots, n$) odpowiadają położeniom suwaków mających odpowiednio granice s_i ($i=1, \dots, n$). Wykres przedstawiający zmianę σ jako funkcję

$d\epsilon/d\sigma$ jest postaci następujących po sobie odcinków równoległych do osi naprężenia σ , mających jako odcięte odpowiednio wartości $J_0, J_0+J_1, \dots, J_0+J_1+\dots+J_i, \dots, J_0+\dots+J_{n-1}, J_n$ (rys. 3a).

Można scharakteryzować ten wykres „schodkowy” przez spektrum wartości granicznych naprężenia, stanowiące spektrum odcinków widma; każdy i -ty odcinek widma ma jako odciętą granicę s_i i jako wysokość odpowiadającą miarę odkształcalności J_i (rys. 3b).



Rys. 3. a) Wykres σ jako funkcji $d\epsilon/d\sigma$. b) Spektrum wartości granicznych naprężenia

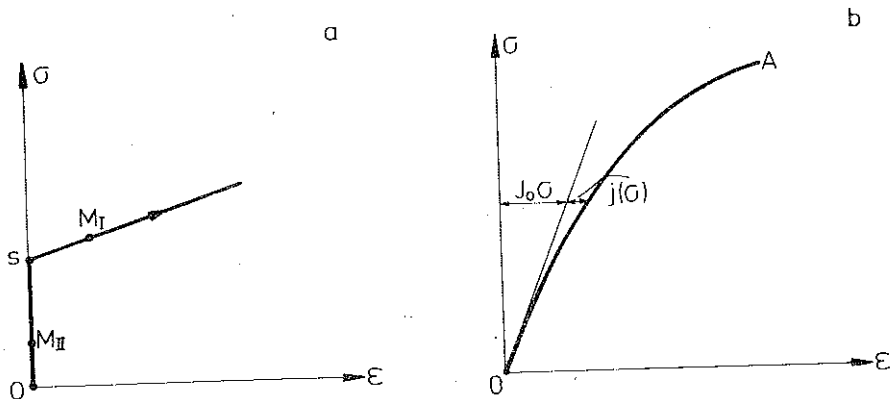
Rozważmy obecnie nieskończenie dużą ilość elementów sprężyna-suwak cierny, włącznie z dodatkową pojedynczą sprężyną (element z wartością graniczną $s=0$). Jeżeli wiele elementów sprężyna-suwak ułożonych szeregowo ma tę samą wartość graniczną, to są one równoważne jednemu elementowi sprężyna-suwak, który ma tę samą wartość graniczną oraz odkształcalność równą sumie odkształcalności poszczególnych sprężyn.

Oznaczmy przez $j''(s)$ miarę podatności zbioru elementów, których wartość graniczna jest zawarta między s i $s+ds$. Obecnie spektrum granic naprężeń modelu symbolicznego jest spektrum ciągłym a nie jak poprzednio, w przypadku skończonej liczby elementów, spektrum odcinków widma.

Rozważmy przypadek deformacji układu nieskończenie wielu elementów zgrupowanych szeregowo, poddanych naprężeniom zmiennym periodycznie. Przyjmijmy, że układ jest w stanie spoczynku. Gdy przyłożymy do niego naprężenie σ rosnące monotonicznie, to wówczas element, którego wartość graniczna jest $s=0$, wydłuża się o $\epsilon_0 = \sigma J_0$. Inne elementy, w których naprężenie σ przekroczyło wartość graniczną s ($\sigma > s$) wydłużają się o

$$\epsilon_s^r = \int_0^{\sigma} (\sigma - s) j''(s) ds;$$

natomiast pozostałe elementy nie odkształcają się, tzn. $\epsilon_s^H = 0$ (por. diagram $\sigma - \epsilon$ na rys 4a dla pojedynczego elementu sprężyna-suwak poddanego pierwszemu



Rys. 4. a) Diagram $\sigma = \sigma(\epsilon)$ dla pojedynczego elementu sprężyna-suwak poddanego procesowi obciążenia b) Dla modelu złożonego z nieskończonej ilości elementów połączonych szeregowo

obciążeniu) Zatem całkowitą odkształcenie nieskończonego zbioru elementów wynosi

$$(2.1) \quad \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_s^I + \epsilon_s^{II} = \sigma J_0 + \int_0^\sigma (\sigma - s) j''(s) ds.$$

Podajmy model, złożony z nieskończonej ilości elementów połączonych szeregowo, zmianom naprężenia (na rys. 4b krzywa OA), począwszy od stanu zerowego. Wzór (1.1) daje nam wówczas

$$(2.2) \quad \epsilon = \sigma J_0 + [(\sigma - s) j'(s)]_0^\sigma - \int_0^\sigma (-j'(s) ds),$$

czyli

$$(2.3) \quad \epsilon = \sigma J_0 + \int_0^\sigma j'(s) ds,$$

przy wykorzystaniu warunków $j(0) = j'(0) = 0$.

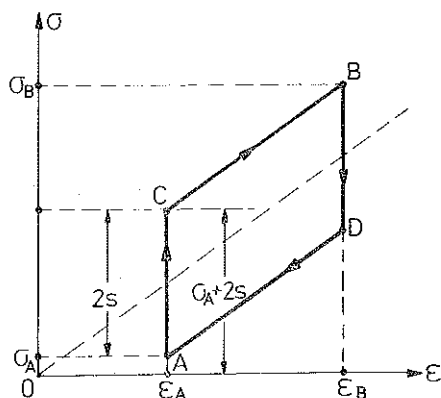
W rezultacie otrzymamy

$$(2.4) \quad \epsilon = \sigma J_0 + j(\sigma) = E(\sigma).$$

Założmy z kolei, że naprężenie σ zmienia się periodycznie między dwiema wartościami ekstremalnymi σ_A i σ_B (por. rys. 5, na którym przedstawiono cykl opisany przez pojedynczy element sprężyna-suwak, gdy cały układ jest poddany obciążeniu periodycznemu).

Całkowite odkształcenie układu poddanego obciążeniu periodycznemu jest równe sumie odkształcenia elementu składającego się z pojedynczej sprężyny $\epsilon_0 = (\sigma - \sigma_A) J_0$, odkształcenia elementu o wartości granicznej s , którego suwak zaczyna się poruszać, tzn. dla którego $\sigma - \sigma_A > 2s$ (por. punkty odcinka CB) oraz

$$\epsilon_s^I = (\sigma - \sigma_A - 2s) J.$$



Rys. 5. Cykl opisany przez pojedynczy element sprężyna-suwak.

Dla zbioru elementów odpowiadających temu warunkowi mamy

$$\varepsilon_s^I = \int_0^{\frac{\sigma - \sigma_A}{2}} (\sigma - \sigma_A - 2s) j''(s) ds.$$

Oczywiście elementy, które nie osiągnęły swej wartości granicznej, dla których $\sigma - \sigma_A < 2s$ (punkty odcinka AC), nie są odkształcone ($\varepsilon_s^{II} = 0$).

Całkowite odkształcenie układu jest więc równe

$$(2.5) \quad \varepsilon = \varepsilon_A + (\sigma - \sigma_A) J_0 + \int_0^{\frac{\sigma - \sigma_A}{2}} (\sigma - \sigma_A - 2s) j''(s) ds.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$(2.6) \quad j'(s) = \int_0^s j''(s) ds, \quad j(s) = \int_0^s j'(s) ds$$

oraz

$$(2.7) \quad E(x) = xJ_0 + 2j\left(\frac{x}{2}\right),$$

to otrzymamy wzór

$$(2.8) \quad \varepsilon = \varepsilon_A + E(\sigma - \sigma_A).$$

Dla układu teoretycznego, złożonego z nieskończonej ilości elementów, funkcja $E(\sigma - \sigma_A)$ jest zdefiniowana wzorami (2.6) i (2.7) przez spektrum $j''(s)$. Natomiast w przypadku rzeczywistego ciała sprężysto-plastycznego, którego własności mechaniczne są zgodne z własnościami proponowanego modelu, funkcja E jest określona na podstawie doświadczenia. Jest ona określona przy wykorzystaniu wzoru (2.8).

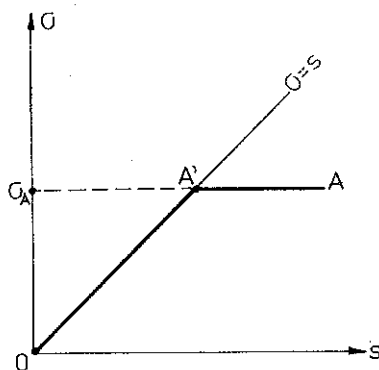
Wówczas spektrum wartości granicznych naprężenia (dla ciała rzeczywistego) otrzymujemy z wykresu $\sigma = \sigma(\epsilon)$. Różniczkując dwukrotnie funkcję (2.7) otrzymamy

$$(2.9) \quad E''(x) = \frac{1}{2} j'' \left(\frac{x}{2} \right).$$

Zatem spektrum $j''(s)$ jest postaci

$$(2.10) \quad j''(s) = 2E''(2s).$$

Stan modelu (rys. 4b) może być przedstawiony na wykresie $s = s(\sigma)$ (rys. 6). Odcinek OA' przedstawia stan mechaniczny elementów (sprężyna suwak), których



Rys. 6. Stan mechaniczny elementów

wartość graniczna została osiągnięta ($\sigma = s$), natomiast prosta $A'A$ reprezentuje stan mechaniczny elementów, które nie osiągnęły swej wartości granicznej i przynoszą one naprężenia równe naprężeniom rzeczywistym σ_A .

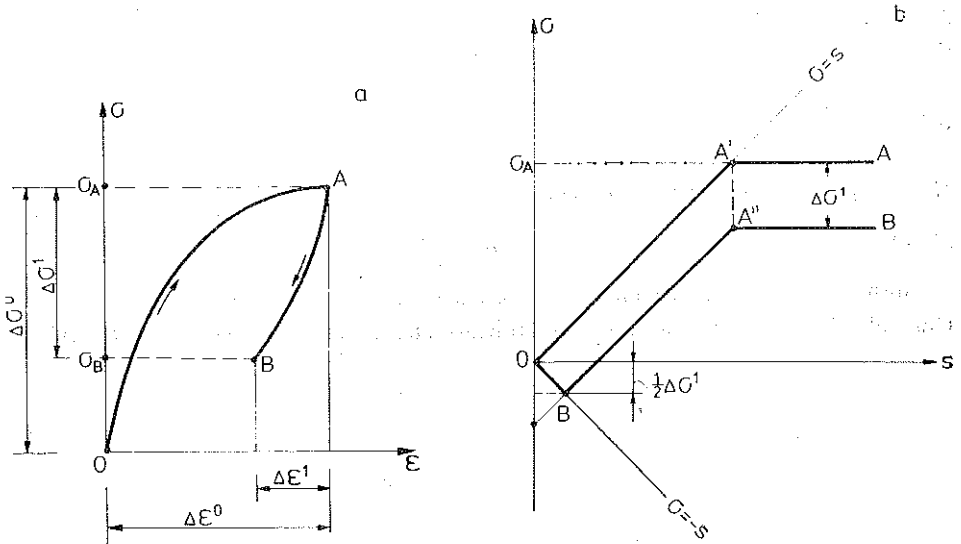
Rozważmy obecnie przypadek procesu odciążenia. Załóżmy, że naprężenie, osiągnąwszy stan $\sigma = \sigma_A$, zaczyna maleć (rys. 7a). Aktualny stan mechaniczny osiągnięty przez model (punkt B) na wykresie $\sigma = \sigma(s)$ (rys. 7b) jest reprezentowany przez linię łamaną $OB'A''B$.

Podobnie jak dla pierwszego obciążenia, w trakcie odciążenia od punktu A , zmiana odkształcenia $\Delta \epsilon^1$ jest sumą odkształcenia pojedynczej sprężyny $\Delta \epsilon_0 = \Delta \sigma^1 J$ (oraz odkształcenia elementów, których wartość graniczna jest mniejsza od $1/2 \Delta \sigma^1$ (rys. 7b). Zatem odkształcenie całkowite $\Delta \epsilon^1$ jest postaci

$$(2.11) \quad \Delta \epsilon^1 = \Delta \sigma^1 J_0 + \int_0^{\frac{\Delta \sigma^1}{2}} \left(\frac{\Delta \sigma^1}{2} - s \right) j''(s) ds.$$

Po scałkowaniu, wykorzystując oznaczenia (2.6) i (2.7), otrzymamy

$$(2.12) \quad \Delta \epsilon^1 = 2E \left(\frac{\Delta \sigma^1}{2} \right).$$



Rys. 7. Proces odciążenia

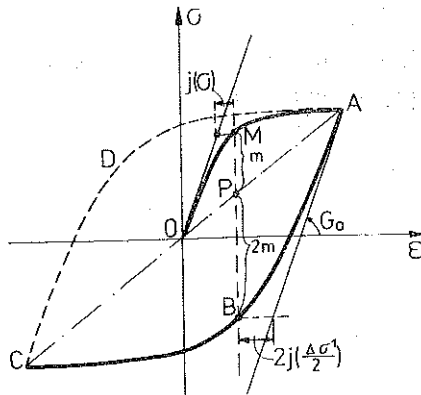
Jeżeli wprowadzić w (2.8) oznaczenia

$$\Delta \varepsilon^0 = |\varepsilon - \varepsilon_A|, \quad \Delta \sigma^0 = |\sigma - \sigma_A|,$$

to wzór ten przyjmie postać

$$(2.13) \quad \Delta \varepsilon^0 = E (\Delta \sigma^0).$$

Z porównania (2.12) i (2.13) widać, że gałąź krzywej AB można otrzymać z gałęzi OA przez jednokładność w stosunku 2 (jest to reguła MASINGA [8]). Reguła ta jest zobrazowana na rys. 8. Każda z połówek cyklu ABC oraz CDA jest jednokładna w stosunku 2 do krzywej obciążenia w pierwszym cyklu OMA . Mamy więc $\overline{PB} = 2\overline{MP}$.



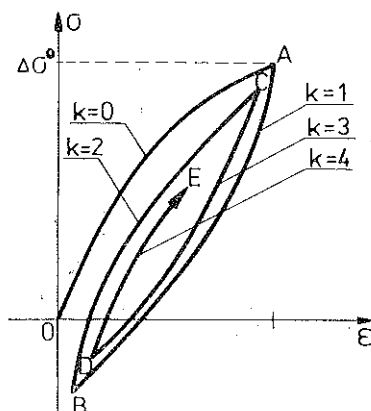
Rys. 8. Reguła Masinga [8]

Należy zauważyć, że moduł styczny w otoczeniu na prawo od wszystkich punktów inwersji jest taki sam, jak moduł styczny na początku pierwszego obciążenia i równy G_0 .

Wprowadzimy pojęcie pamięci dyskretnej [8]. Możemy zaobserwować, że w punkcie inwersji A (rys. 7a) model odnajduje swoje własności, które posiadał w punkcie O w stanie początkowym. Z rys. 7b widać również, że model zachował w pamięci stan inwersji $(\sigma_A, \varepsilon_A)$ i to dzięki punktowi A'' diagramu linii stanu mechanicznego. Stan ten będzie zachowany przez model tak długo, aż $\Delta\sigma^1 = |\sigma - \sigma_A| = \sigma_A - \sigma$ nie przekroczy wartości $2\Delta\sigma^0 = 2|\sigma_A - \sigma_0| = 2\sigma_A$.

Rozważmy obecnie dwa różne przypadki obciążeń cyklicznych.

Przypadek A. Rozważmy przypadek ewolucji cyklicznej takiej, że kolejne cykle mają coraz to mniejszą amplitudę: $2\Delta\sigma^0 > \Delta\sigma^1 > \Delta\sigma^2 > \dots$ (przypadek przedstawiony na rys. 9). Oznaczmy kolejne gałęzie cyklu przez k_0, k_1, \dots . W przypadku takiego



Rys. 9. Kolejne cykle $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (przypadek A)

cyklu, dzięki diagramowi $\sigma - s$, można określić ciąg dyskretny stanów odniesienia σ_R^k dla poszczególnych punktów inwersji. Na rys. 10 a,b,c i d, przedstawiono linie stanu mechanicznego modelu dla kolejnych gałęzi obciążenia cyklicznego $k_i, i=1, \dots, 4$. Kolejne stany odniesienia σ_R^k przedstawiają kolejne punkty załamania linii stanu mechanicznego (por. rys. 10a,b,c i d). I tak (rys. 10d) otrzymamy

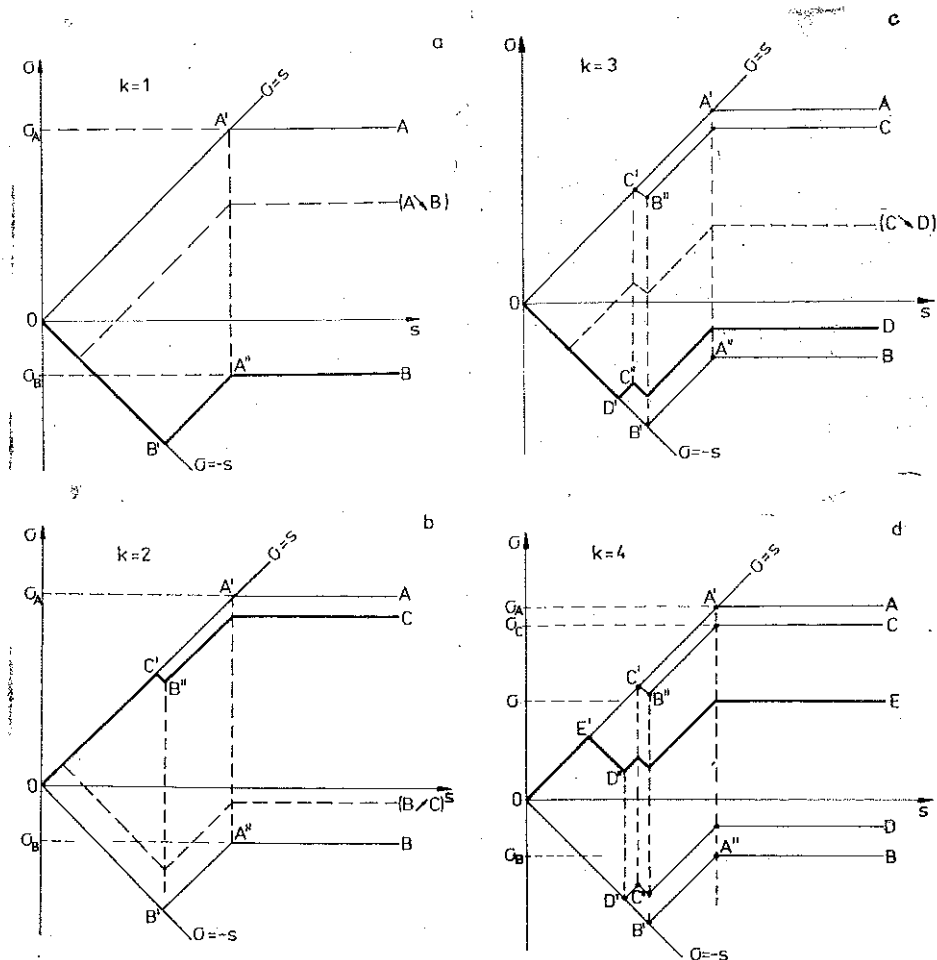
$$\sigma_R^0 = 0, \quad \sigma_R^1 = \sigma_A, \quad \sigma_R^2 = \sigma_B, \quad \sigma_R^3 = \sigma_C, \quad \sigma_R^4 = \sigma_D.$$

Odpowiednie odkształcenia ε_R^k odczytujemy z wykresu 9. Aktualne wielkości naprężenia i odkształcenia są określone następującymi wzorami:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \sigma &= \sigma_R^k + (-1)^k \Delta\sigma^k, \\ \varepsilon &= \varepsilon_R^k + (-1)^k \Delta\varepsilon^k. \end{aligned}$$

Związek między naprężeniem σ i odkształceniem ε jest zdefiniowany jak poprzednio (wzory (2.12) i (2.13))

$$(2.15) \quad \Delta\varepsilon^k = \omega E (\Delta\sigma^k / \omega),$$



Rys. 10. Linie stanu mechanicznego modelu dla kolejnych gałęzi obciążenia cyklicznego k_i ($i=1, \dots, 4$)

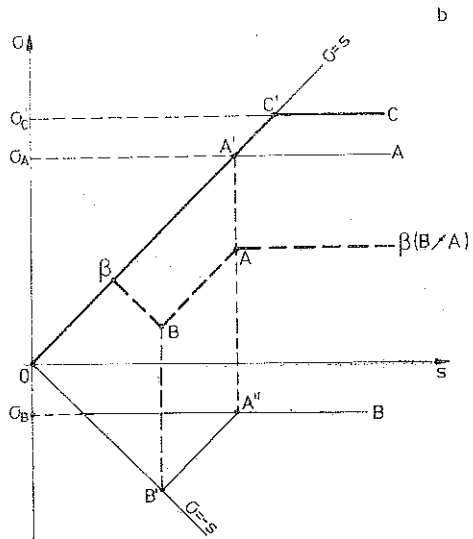
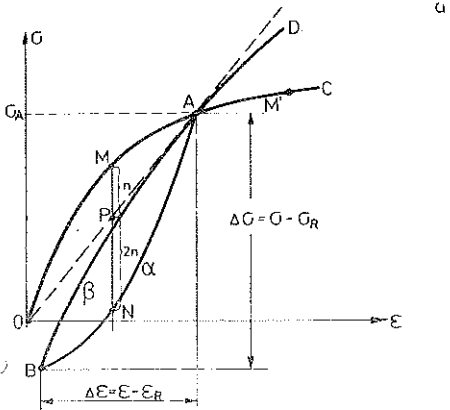
gdzie ω jest parametrem m Masinga i przybiera wartość

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \omega &= 1 && \text{dla pierwszego cyklu, jeżeli } k=0; \\ \omega &= 2 && \text{dla } n\text{-tego cyklu, jeżeli } k>0. \end{aligned}$$

W rozważanym przypadku (tzw. prostej ewolucji cyklicznej) w celu określenia zależności między naprężeniem σ i odkształceniem ε wystarczyło użycie jedynie reguły Masinga.

Przypadek B. Rozważmy inny przypadek ewolucji cyklicznej. Przyjmijmy, że po pierwszym obciążeniu wzdłuż drogi OA do wartości σ_A — odciążenie wzdłuż drogi AB (rys. 11) w modelu powiększono naprężenie o intensywności większej od σ_A . Wiadomo, że gałęzie ewolucji cyklicznej $A\alpha B$ i $B\beta A$ można otrzymać przez jednokładność w stosunku $\omega = \pm 2$, ze środkiem w punkcie P , przy czym $\overrightarrow{PN} =$

$= -2\vec{PM}$. Jeżeli użyć jedynie reguły Masinga, to po przekroczeniu naprężenia σ_A otrzymalibyśmy drogę $B\beta AD$. Taka ewolucja nie odpowiada jednak rzeczywistym własnościom materiału. Jeżeli naprężenie wzdłuż drogi $B\beta A$ rośnie ponad punkt A , to powinno ono rosnać wzdłuż drogi AC (która została otrzymana w przypadku prostego obciążenia monotonicznego OAC), a nie wzdłuż drogi AD , będącej przedłużeniem łuku $B\beta A$. Droga $B\beta AC$ jest złożona z dwóch odcinków: $B\beta A$ i AC . Zatem do poprawnego określenia cyklu $OAA\beta AC$ należy, oprócz reguły Masinga, wykorzystać algorytm opierający się na pojęciu pamięci dyskretnej. Koncepcja



Rys. 11. Drugi przypadek ewolucji cyklicznej (przypadek B)

pamięci dyskretnej może być wprowadzona w następującej formie. Stan A zwany stanem inwersji musi być „zapamiętany” wzdłuż drogi $AaB\beta A$ i może być „wymazany”, jeżeli obciążenie będzie rosnać wzdłuż drogi AC . W takim przypadku

cała droga $AaB\beta A$ jest zapamiętana. Z diagramu $\sigma = \sigma(s)$ może być wysnuty odpowiedni algorytm. W trakcie poprawnego opisu zależności naprężenia σ od odkształcenia ε rola algorytmu polega na „wymazaniu” z linii stanu mechanicznego punktów załomu A i B (rys. 11b). Otrzymamy zatem związek pierwotny

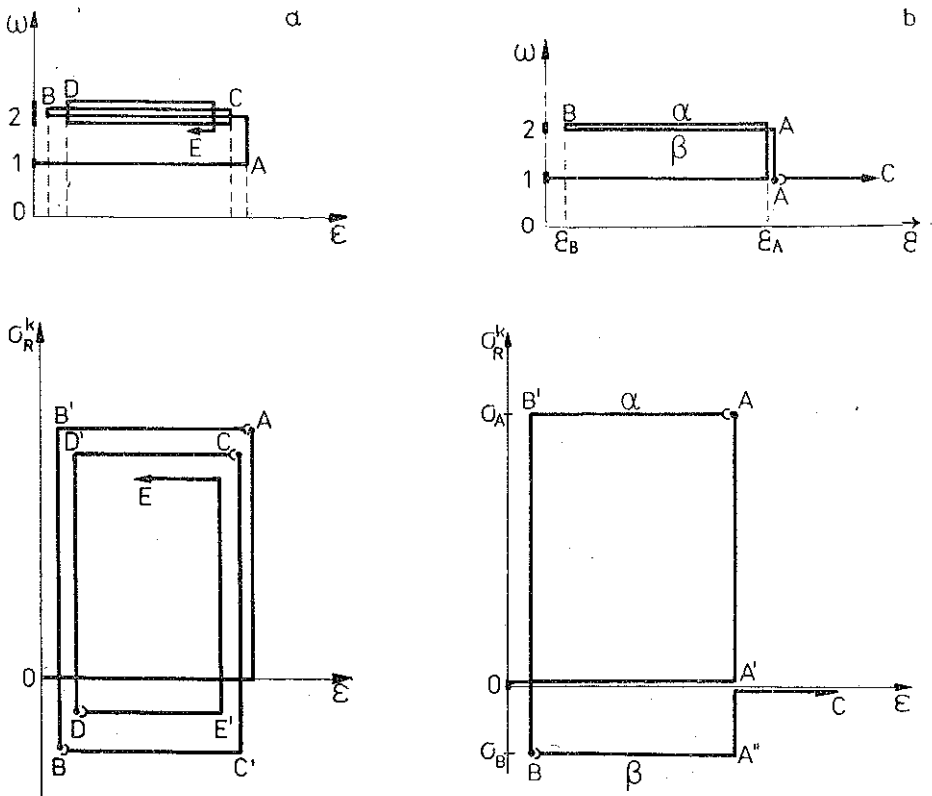
$$(2.17) \quad \Delta \varepsilon^0 = E(\Delta \sigma^0), \quad k=0, \quad \omega=1,$$

czyli zależność (2.13).

Jeżeli będziemy rozważali przypadek obciążenia monotonicznego o dużej amplitudzie, przekraczającej ewolucję cykliczną, takiego, że $2\Delta\sigma^0 < \Delta\sigma^1 < \Delta\sigma^2 \dots$, to dzięki algorytmowi, opartemu na diagramie $\sigma = \sigma(s)$, punkty załamań na linii stanu mechanicznego są kolejno wymazywane.

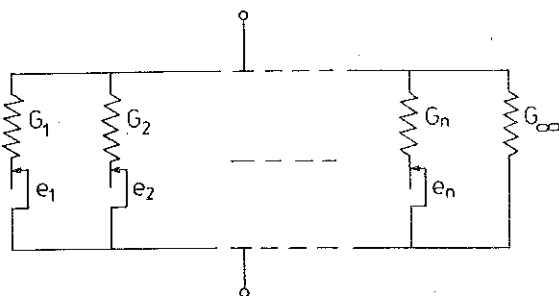
Zmianę parametru ω oraz kolejne stany naprężenia σ_R^k (stany odniesienia, odcinkowo stałe w trakcie dowolnej ewolucji cyklicznej) dla przypadku obciążenia cyklicznego A pokazano na rys. 12a; natomiast dla przypadku B (dla poprawnej drogi obciążenia AC) na rys. 12b.

Należy zauważyć, że model symboliczny składający się z równolegle połączonych elementów (sprężyna i suwak cierny połączone szeregowo, rys. 13) prowadzi do rezultatów podobnych do przedstawionych na modelu poprzednim. Korzystne jest



Rys. 12. Wykres parametru ω oraz kolejne stany naprężenia σ_R^k , a) przypadek A, b) przypadek B

tutaj wprowadzenie oprócz wartości granicznej naprężenia s , granicznej wartości odkształcenia e , począwszy od której suwak w danym elemencie zaczyna się poruszać ($e=s/G$). Ostatni element składa się jedynie ze sprężyny, której sztywność oznaczono przez G_∞ .



Rys. 13. Model symboliczny składający się z elementów połączonych równolegle

Przeprowadzimy rozumowanie w sposób analogiczny do przypadku modelu szeregowego o nieskończonej ilości elementów, oznaczając przez $g''(\varepsilon)$ funkcję definiującą miarę sztywności $g''(s)$ *de* elementów, których graniczne odkształcenia są zawarte między e i $e+de$. Zauważmy, że dla pierwszego obciążenia monotonicznego, wzdłuż drogi OA (rys. 11) zależność $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ jest taka, że mamy

$$(2.18) \quad -\sigma''(\varepsilon) = g''(\varepsilon) \geq 0, \quad g''(0) = 0,$$

czyli krzywa $\sigma(\varepsilon)$ jest wypukła względem osi ε .

Z definicji modelu równoległego (wzdłuż drogi OA) naprężenie σ jest sumą dwóch składowych σ_1 i σ_2 odpowiednio związanych z parą sprężyna-suwak cierny, który nie porusza się albo który się porusza. Wyraża się to przez relację

$$(2.19) \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

gdzie dla elementów, których granica e nie została osiągnięta

$$(2.20) \quad \sigma_1 = G_\infty \varepsilon + \int_0^\infty \varepsilon g''(e) de;$$

dla elementów, których granica e została osiągnięta

$$(2.21) \quad \sigma_2 = \int_0^e \varepsilon g''(e) de.$$

Zatem

$$(2.22) \quad \sigma(\varepsilon) = G_\infty \varepsilon + \int_0^e \varepsilon g''(e) de + \int_e^\infty \varepsilon g''(e) de.$$

Po scałkowaniu, wykorzystując warunki

$$(2.23) \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0,$$

otrzymamy

$$(2.24) \quad \sigma = G_0 \varepsilon - g(\varepsilon) = S(\varepsilon).$$

We wzorach tych wprowadzono oznaczenie

$$(2.25) \quad G_0 = G_\infty + \int_0^\infty g''(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Zatem droga OA jest określona przez podanie g . Wzór (2.24) jest podobny w formie do wzoru (2.4). Przeprowadzając identyczne obliczenia dla przypadku drogi AaB (rys. 11) otrzymamy

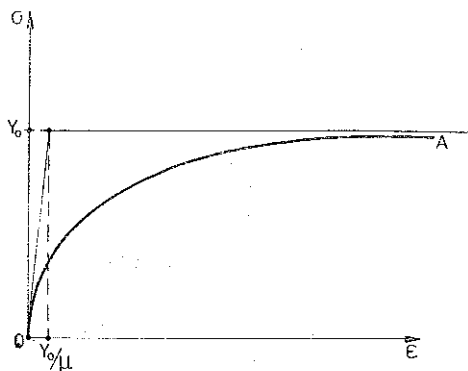
$$(2.26) \quad \sigma - \sigma_A = 2G_0 \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_A}{2} \right) - 2g \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_A}{2} \right) = 2S \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_A}{2} \right)$$

lub też

$$(2.27) \quad \Delta\sigma^1 = 2S \left(\frac{\Delta\varepsilon^1}{2} \right),$$

analogiczny w formie do wzoru (2.15) (tutaj $k=1$, $\omega=2$).

Otrzymamy identyczne wyniki dla kolejnych cykli. Zatem możemy przypuszczać, że nie jest ograniczające przyjęcie wykresu $\sigma(\varepsilon)$, mającego aspekt rodzaju krzywej



Rys. 14. Wykres $\sigma = \sigma(\varepsilon)$

sprężysto-plastycznej (rys. 14). W tym celu można wybrać prostą definicję dla drogi OA , np. za pomocą funkcji tangensa hiperbolicznego,

$$(2.28) \quad \sigma(\varepsilon) = Y_0 \operatorname{th} \left(\varepsilon \frac{\mu}{Y_0} \right),$$

gdzie Y_0 odgrywa rolę granicy plastyczności przy czystym ścinaniu, μ rolę modułu ścinania. Należy zwrócić uwagę na fakt, że wartość Y_0 zostaje osiągnięta przez model jedynie po nieskończonej dłużej czasie.

Oczywiście równoważne jest przyjęcie w rozważaniach definicji różniczkowej postaci

$$(2.29) \quad \frac{d\sigma}{dt} = \mu \left[1 - \left(\frac{\sigma}{Y_0} \right)^2 \right] \frac{d\varepsilon}{dt}$$

ze względu na fakt, że własności powrotu do stanu początkowego pozwalają przyjąć $\sigma(0)=0$ i $\varepsilon(0)=0$. Równanie (2.29) możemy również napisać w innej postaci

$$(2.30) \quad \frac{d\sigma}{dt} \mu = \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(-\frac{\mu}{Y_0^2} \right) \left(\sigma \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \sigma.$$

Aby można było przy użyciu równania (2.28) opisać drogę obciążenia taką jak $OM\alpha B\beta AC$ (rys. 11), należy równanie to uogólnić w następujący sposób:

$$(2.31) \quad \Delta\sigma = \omega Y_0 \operatorname{th} \left(\Delta\varepsilon \frac{\mu}{\omega Y_0} \right),$$

przy czym $\omega=1$ lub $\omega=2$ pod warunkiem, że będzie spełniona reguła następująca:

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \sigma_R^0 &= 0, & \omega &= 1 \quad \forall M \in OA, \\ \sigma_R^1 &= \sigma_A, & \omega &= 2 \quad \forall a \in AB, \\ \sigma_R^2 &= \sigma_B, & \omega &= 2 \quad \forall \beta \in BA, \\ \sigma_R^3 &= 0, & \omega &= 1 \quad \forall M' \in AC. \end{aligned}$$

Podobnie, jak poprzednio, różniczkowa postać równania (2.31) jest następująca:

$$(2.33) \quad \frac{d\Delta\sigma}{dt} = \mu \left[1 - \left(\frac{\Delta\sigma}{\omega Y_0} \right)^2 \right] \frac{d\Delta\varepsilon}{dt}$$

lub też jej równoważna

$$(2.34) \quad \frac{d\Delta\sigma}{dt} = \mu \frac{d\Delta\varepsilon}{dt} + \left(-\frac{\mu}{(\omega Y_0)^2} \right) \left(\Delta\sigma \frac{d\Delta\varepsilon}{dt} \right) \Delta\sigma,$$

przy czym

$$(2.35) \quad \frac{d\varepsilon_R^k}{dt} = 0, \quad \frac{d\sigma_R^k}{dt} = 0.$$

Postać różniczkowa jednowymiarowego równania konstytutywnego (2.30) sugeruje proste uogólnienie na przypadek zależności tensorowych. Możemy zatem równanie to napisać w postaci

$$(2.36) \quad \mathcal{L}\sigma = \mu \underline{\mathcal{D}} + \left(-\frac{\mu}{Y_0^2} \right) (\sigma \underline{\mathcal{D}}) \sigma$$

oraz równanie (2.34) w postaci

$$(2.37) \quad \mathcal{L}\sigma = \mu \underline{\mathcal{D}} + \left(-\mu/(\omega Y_0)^2 \right) [(\sigma - \sigma_R) \underline{\mathcal{D}}] (\sigma - \sigma_R),$$

gdzie \mathcal{L} oznacza symbol pochodnej obiektywnej. Oznaczając przez Φ wewnętrzną dysypację,

$$(2.38) \quad \Phi = (\sigma - \sigma_R) \underline{\mathcal{D}}$$

oraz prace α_0 parametr

$$(2.39) \quad \alpha_0 = -\mu / (\omega Y_0)^2,$$

otrzymamy z (2.37) równanie postaci

$$(2.40) \quad \mathcal{L}\sigma = \mu \underline{\mathcal{D}} + \alpha_0 \Phi (\sigma - \sigma_R).$$

Możemy w dalszym ciągu rozważyć schemat równań, którego część izotropowa jest zdefiniowana przez równanie

$$(2.41) \quad \frac{\partial}{\partial t'} (\text{tr } \sigma) = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \underline{\mathcal{D}},$$

(gdzie λ i μ są stałymi Lamégo) oraz część dewiatorowa (zdefiniowana w układzie współrzędnych konwekcyjnych) przez

$$(2.42) \quad \mathcal{L}\bar{\sigma} = 2\mu \underline{\mathcal{D}} + \alpha_0 \bar{\Phi} (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R),$$

gdzie oznaczono

$$(2.43) \quad \bar{\Phi} = \text{tr} (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R) \underline{\mathcal{D}}.$$

Przyjmujemy w rozważaniach warunek płynięcia Hubera-Misesa:

$$(2.44) \quad J'_2 = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 = Y_0^2.$$

Przy odpowiednim wyborze trzech wartości λ , μ , α_0 równania konstytutywne (2.40) opisują zachowanie się materiału, niewrażliwe na zmianę czasu ewolucji, równania nie uwzględniające lepkości materiału. W związku z powyższym w dalszych badaniach, związanych z propagacją fal, nie będzie się wprowadzać rozróżnienia między powolnymi wymuszeniami dynamicznymi oraz wymuszeniami typu uderzeniowego. Proponowany schemat konstytutywny jest prawie sprężysty w zakresie bardzo małych odkształceń i prawie plastyczny w zakresie deformacji dostatecznie dużych. Zatem nie obrazuje on materiału, który jest całkowicie sprężysty ani całkowicie plastyczny. Odpowiada to wspomnianej własności modelu o nieistnieniu odwracalnych trajektorii obciążenia.

3. FALE PRZYSPIESZENIA W CIAŁACH STAŁYCH

W analizie fal przyspieszenia wykorzystuje się metodę HADAMARDA [13] — warunków zgodności na powierzchniach nieciągłości. Można rozróżnić cztery rodzaje powierzchni nieciągłości w zależności od stanu materiału (E — sprężysty, P — plastyczny):

- 1) fale sprężyste $E \rightarrow E$,
- 2) fale plastyczne $P \rightarrow P$,

3) fronty „fal” odciążenia $P \rightarrow E$,

4) fronty „fal” obciążenia $E \rightarrow P$.

Rozważmy ruch powierzchni S względem stanu początkowego ciał. Niech $\varphi(a^i, t)$ będzie funkcją współrzędnych Lagrange'a a^i oraz czasu t , która pozostaje ciągła przy przejściu przez powierzchnię S , lecz niektóre jej pierwsze pochodne względem a^i oraz t są nieciągłe na S . Pochodne te nie są od siebie niezależne, są powiązane związkami zgodności kinematycznej.

Związki zgodności kinematycznej HADAMARDA [13] (por. również [16]) można przedstawić w postaci

$$(3.1) \quad \left[\left[\frac{\partial \varphi(a^i, t)}{\partial t} \right] \right] \otimes \mathbf{n}(a^i, t) + \Omega(a^i, t) |[\text{grad } \varphi(a^i, t)]| = 0,$$

gdzie $\Omega(a^i, t)$ jest prędkością poruszania się powierzchni S (prędkością fali) w stosunku do ośrodka w konfiguracji odniesienia, \mathbf{n} jest wektorem jednostkowym normalnej do S zorientowanej w kierunku propagacji powierzchni; $|[\Psi]| = \Psi^+ - \Psi^-$ oznacza nieciągłość funkcji Ψ przy przejściu przez S ; symbol \otimes oznacza iloczyn tensorowy.

Zajmiemy się wyłącznie badaniem fal przyspieszenia, tj. fal nieciągłości rzędu drugiego (ciągłość przemieszczeń i prędkości; natomiast nieciągłość przyspieszenia).

3.1. Fale przyspieszenia w anizotropowym ośrodku sprężystym

Przypomnijmy pokrótce klasyczny problem propagacji fal w ośrodku sprężystym, ponieważ wynika z niego w sposób prosty analiza fal plastycznych. Jeżeli oznaczymy przez ξ przemieszczenie punktu materialnego, przez \mathbf{v} jego prędkość i przez γ przyspieszenie, to tensor deformacji będzie miał postać (małe odkształcenia sprężyste)

$$(3.2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial a_i}.$$

Równanie ruchu jest postaci

$$(3.3) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_j} - \rho \gamma_i = 0,$$

gdzie ρ oznacza masę objętościową, $\gamma_i = \dot{v}_i$ oraz σ_{ij} tensor naprężenia. Równania konstytutywne są postaci

$$(3.4) \quad \sigma_{ij} = L_{ijkl} \varepsilon_{hk},$$

gdzie L_{ijkl} oznaczają współczynniki sprężystości, które spełniają następujące warunki symetrii:

$$(3.5) \quad L_{ijkl} = L_{jilk} = L_{lkih} = L_{khil}.$$

Metoda badania fal przyspieszenia polega na dwukrotnym zastosowaniu związków zgodności Hadamarda (3.1): do pola prędkości v i do pola naprężenia σ . Otrzymamy zatem dwa następujące równania:

$$(3.6) \quad [[\dot{\phi}_k]] n_h + \Omega [v_{k,h}] = 0, \quad [[\dot{\sigma}_{ij}]] n_j + \Omega [[\sigma_{ij,j}]] = 0.$$

Równania te wraz z równaniem ruchu (3.3) oraz dzięki symetrii (3.5) prowadzą do następującego równania:

$$(3.7) \quad B_{ik} [[\gamma_k]] = \rho \Omega^2 [[\gamma_i]],$$

gdzie oznaczono $B_{ik} = L_{ijk} n_j n_h$.

Jak łatwo zauważyć, wielkości $\rho \Omega^2$ są wartościami własnymi macierzy $B = [B_{ik}]$, wektory $[[\gamma]]$ są odpowiadającymi im wektorami własnymi. Z symetrii macierzy L_{ijk} względem par indeksów hk i ij wynika, że macierz B jest macierzą symetryczną. Zatem jej trzy wartości własne są rzeczywiste i wektory własne są ortogonalne. Ponadto wartości własne są dodatnie, skąd wynika, że trzy prędkości propagacji fal Ω są rzeczywiste. Możemy zatem stwierdzić, że dla każdego kierunku normalnej do powierzchni fali w stosunku do ośrodka (macierz B zależy od tego kierunku) istnieją trzy możliwe prędkości Ω i odpowiadające im wektory $[[\gamma]]$ są ortogonalne.

W przypadku izotropowego ciała sprężystego mamy

$$(3.8) \quad B_{ik} = (\lambda + \mu) n_i n_k + \mu \delta_{ik}.$$

Jeżeli obierzemy kierunek $0a^1$ równoległy do normalnej do fali ($n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$), to macierz B będzie miała jedynie niezerowe elementy głównej diagonal, równe odpowiednio $B_{11} = \lambda + 2\mu, B_{22} = B_{33} = \mu$. Zatem jeden z kierunków głównych jest prostopadły do fali, dla którego $\rho \Omega^2 = \lambda + 2\mu$ (fala podłużna); dwa pozostałe są dowolne w płaszczyźnie stycznej do fali, dla których $\rho \Omega^2 = \mu$ (fala poprzeczna).

3.2. Fale przyspieszenia w ośrodkach plastycznych

Zakładamy istnienie potencjału plastycznego $f(\sigma_{hk})$ identycznego z warunkiem plastyczności; tak więc deformacja plastyczna jest zdefiniowana za pomocą wzoru następującego:

$$(3.9) \quad de_{ij}^p = g \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk} \right) \quad \text{dla} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk} > 0,$$

gdzie g jest funkcją dodatnią współrzędnych tensora σ .

Równania Prandtl-Reussa (przy założeniu, że $\varepsilon_{,j} = \varepsilon_{,j}^e + \varepsilon_{,j}^p$ oraz oznaczeniu $\partial f / \partial \sigma_{ij} = f_{,ij} = f_{,ji}$) przyjmują postać

$$(3.10) \quad v_{ij} = M_{ijk} \dot{\sigma}_{hk} + g f_{,ij} f_{,hk} \dot{\sigma}_{hk},$$

gdzie v_{ij} oznacza prędkość deformacji $v_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i})$ oraz gdzie M_{ijk} ma te same własności symetrii co L_{ijk} . Równanie (3.10) można napisać również w postaci

$$(3.11) \quad v_{ij} = M_{ijk}^* \dot{\sigma}_{hk},$$

gdzie

$$(3.12) \quad M_{ijk}^* = M_{ijk} + g f_{ij} f_{hk}.$$

Należy zauważyć, że $f_{ij} f_{hk}$ mają te same własności symetrii co macierz L_{ijk} (por. (3.5)). Zatem macierz M_{ijk}^* ma wszystkie własności macierzy współczynników sprężystości L_{ijk} i w związku z tym można wykorzystać wszystkie wyniki analizy fal sprężystych. Mianowicie, dla każdego kierunku normalnej do powierzchni fali istnieją trzy możliwe prędkości fal i odpowiadające im wektory $[[\gamma]]$ są ortogonalne względem siebie.

W identyczny sposób z przypadkiem sprężystym, możemy otrzymać analogiczne wzory do (3.7):

$$(3.13) \quad B_{ik}^{(p)} |[\gamma_k]| = \rho \Omega^2 |[\gamma_i]|,$$

gdzie obecnie

$$(3.14) \quad B_{ik}^{(p)} = B_{ik} - r a_i a_k,$$

przy czym

$$(3.15) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{g} + L_{mnrs} f_{mn} f_{rs}, \quad a_i = L_{ijmn} f_{mn} n_j.$$

J. MANDEL [16] wykazał, że prędkości fal plastycznych $\Omega_{(p)}^i$ są rzeczywiste i w stosunku do prędkości fal sprężystych podłużnych i poprzecznych znajdują się w następujących przedziałach:

$$(3.16) \quad \Omega_3^{(p)} \leq \Omega_3 \leq \Omega_2^{(p)} \leq \Omega_2 \leq \Omega_1^{(p)} \leq \Omega_1,$$

gdzie Ω_i są prędkościami fal sprężystych (przy założeniu, że $\Omega_1 \geq \Omega_2 \geq \Omega_3$).

Widać zatem, że prędkość trzech fal plastycznych, dla określonego kierunku normalnej do powierzchni fali, są przedzielone przez prędkości fal sprężystych i co najwyżej są im równe.

W przypadku gdy ośrodek w chwili początkowej jest izotropowy i wzmocnienie jest również izotropowe oraz gdy w zakresie deformacji plastycznych objętość ciała nie zmienia się ($\sum_i f_{ii} = 0$), prędkości propagacji fal plastycznych są następujące [16]:

$$(3.17) \quad \Omega_2^{(p)} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Jest to prędkość propagacji poprzecznych fal sprężystych (odpowiada ten przypadek neutralnej fali poprzecznej) oraz

$$(3.18) \quad \Omega_3^{(p)} \leq \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \leq \Omega_1^{(p)} \leq \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Zagadnienie określenia prędkości frontów „fal” obciążenia plastycznego jak też frontów „fal” odciążenia było badane szczegółowo w pracy [16] (por. również [25]).

Z badań tych wynika, że prędkość fal obciążenia $\Omega^{(od)}$ nie jest mniejsza od odpowiedniej prędkości fal plastycznych i nie jest większa od prędkości fal sprężystych:

$$(3.19) \quad \Omega_i^{(pl)} \leq \Omega_i^{(od)} \leq \Omega_i, \quad i=1, 2, 3,$$

natomiast fale obciążenia plastycznego mogą się propagować z różnymi prędkościami. Mogą one być nawet większe od fal sprężystych podłużnych Ω_1 :

$$(3.20) \quad \Omega_3 \leq \Omega_3^{(ob)} \leq \Omega_2^{(pl)}, \quad \Omega_2 \leq \Omega_2^{(ob)} \leq \Omega_1^{(pl)}, \quad \Omega_1 \leq \Omega_1^{(ob)}.$$

4. PRĘDKOŚĆ PROPAGACJI FAL W OŚRODKU SPRĘŻYSTOPLASTYCZNYM W ZAKRESIE SKOŃCZONYCH DEFORMACJI

Badania nad propagacją fal w trójwymiarowych ośrodkach niesprężystych, rozpoczęte w 1960 r. przez J. MANDELA [16 i 17] były kontynuowane w latach 70-tych przez T. C. T. TINGA [26] dla przypadku ośrodków anizotropowych, przez W. K. NOWACKIEGO [20] w przypadku fal w gruntach sprężysto-plastycznych, B. RANIECKIEGO [25] w przypadku fal prostych w metalach (dla procesu izotermicznego i adiabatycznego), R. DZIĘCIELAKA [5] oraz R. KUČA i W. K. NOWACKIEGO [15] w przypadkach sprężystego ośrodka konsolidującego.

Dalsze badania w tym kierunku dotyczyły ośrodków niesprężystych z uwzględnieniem skończonych deformacji. Należy tutaj zacytować następujące nazwiska: M. M. BALABAN, A. E. GREEN, P. M. NAGHDI [2], Y. d'ESCATHA [4], J. R. WILLIS [27], M. PIAU [23] i V. H. NGUYEN [18].

Obecnie już należące do klasycznych, wszystkie te badania mają wiele punktów wspólnych. W pierwszym rzędzie w pracach tych rozróżnia się zagadnienia propagacji fal plastycznych i propagacji frontów „fal obciążenia” plastycznego oraz frontów „fal obciążenia” (sprężystego). Z drugiej strony, głównym celem jest otrzymanie zależności pomiędzy prędkościami fal sprężystych i prędkości fal plastycznych. Nieliczne są natomiast prace dotyczące zmian amplitudy fal sprężysto-plastycznych zarówno podłużnych jak i poprzecznych.

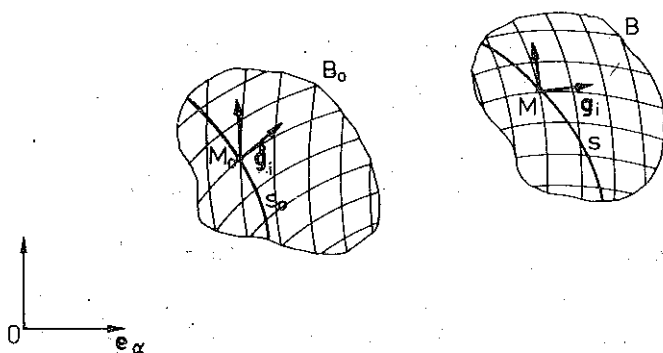
We wszystkich tych pracach pierwszy etap analizy polega zawsze na dwukrotnym zastosowaniu związków zgodności kinematycznej Hadamarda (dla pola prędkości oraz dla pola naprężenia które, to pola zakłada się, że są polami ciągłymi, natomiast o nieciągłych pochodnych), z jednoczesnym wykorzystaniem równań ruchu ośrodka, przy danych równaniach konstytutywnych.

W pracy P. GUELIN, W. K. NOWACKI [9] zbadano wpływ dysypacji spowodowanej histerezą materiałową na prędkość rozprzestrzeniania się fal przyspieszenia. Wielokrotnie już wykorzystywane w analizie różnych przypadków *quasi*-statycznych wzięcie pod uwagę dowolnych obciążeń cyklicznych jest szczególnie interesujące w zagadnieniach rozprzestrzeniania się fal. Zmiany naprężeń występują bardzo często w zakresie przejściowym między sprężystością i plastycznością przy istnieniu efektów wzmocnienia materiału. Weźmy pod uwagę bardzo prosty przypadek obciążeń cyklicznych. Rozważmy próbę rozciągania-ściskania próbek ze stali „inox”. Zakładamy bardzo małe odkształcenia zmieniające się okresowo między

dwiema wartościami ε_1 i ε_2 z prędkością deformacji rzędu 10^{-3} s^{-1} . W tych warunkach doświadczeń można natychmiast zauważyć [6, 7 i 28], że większa część „życia” próbki jest scharakteryzowana przez okresowe odnowienie własności mechanicznych: pewien rodzaj „stanu równowagi” lub też „stan stacjonarny” jest reprezentowany przez ustalony powtarzalny cykl histerezy — np. 9500 razy na 10.000 możliwych cykli przed zniszczeniem próbki. To odnowienie własności mechanicznych, trwających podczas 95% „życia” próbki zasugerowało użycie w badaniach równań konstytutywnych opierających się na obrazowym przedstawieniu w postaci nieskończonych szeregów modeli symbolicznych, składających się z elementów sprężystych oraz suwaków ciernych. Tak więc w pracy [9] wybrano ten opis zachowania się materiału, oparty na badaniach doświadczalnych, w których obserwuje się periodyczne odnowienie własności mechanicznych materiału poddanego obciążeniom cyklicznym [28].

Zbadamy problem rozprzestrzeniania się fal przyspieszenia w nieograniczonym izotropowym ośrodku trójwymiarowym. Rozważania przeprowadzimy w układzie współrzędnych konwekcyjnych.

Niech S oznacza położenie fali w przestrzeni w chwili t oraz S_0 jej położenie w chwili t_0 (rys. 15). W celu identyfikacji punktów materialnych wybierzemy trzy



Rys. 15. Propagacja powierzchni nieciągłości w układzie współrzędnych konwekcyjnych g_i

liczby ξ^k odpowiadające poszczególnym współrzędnym kartezjańskim punktów materialnych w B^0 , tj. $\dot{x}^\alpha = \dot{x}^\alpha(\xi^k)$. Ruch punktu materialnego M jest opisany przez $x^\alpha = x^\alpha(\xi^k, t)$, a jego aktualne położenie (w konfiguracji B) jest określone następująco:

$$(4.1) \quad \overline{OM}(\xi^k, t) = x^\alpha(\xi^k, t) \mathbf{e}_\alpha = \dot{x}^\alpha(\xi^k, 0) \mathbf{e}_\alpha + u^\alpha(\xi^k, t) \mathbf{e}_\alpha,$$

gdzie \mathbf{e}_α są wzajemnie ortogonalnymi wektorami bazy w układzie nieruchomym.

Wektory bazy w układzie konwekcyjnym są następujące:

$$(4.2) \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i(\xi^k, t) = \frac{\partial x^\alpha(\xi^k, t)}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \xi^i}(\xi^k, t),$$

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \dot{\mathbf{g}}_i(\xi^k, 0) = \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_\alpha,$$

odpowiednio w konfiguracji aktualnej B i początkowej B^0 . Kontrawariantne wektory bazy są zdefiniowane jako: $\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$, gdzie g^i jest kontrawariantnym tensorem metrycznym.

Prędkość punktu materialnego M określimy w następujący sposób:

$$(4.3) \quad \mathbf{v}(\xi^k, t) = \frac{dx^a(\xi^k, t)}{dt} \mathbf{e}_a \equiv \frac{\partial x^a(\xi^k, t)}{\partial t} \mathbf{e}_a = v_i(\xi^k, t) \mathbf{g}^i = v^i(\xi^k, t) \mathbf{g}_i.$$

Przyspieszenie punktu materialnego jest określone wzorem

$$(4.4) \quad \Upsilon = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi^k, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x^a(\xi^k, t)}{\partial t^2} \mathbf{e}_a = \frac{\partial(v_i \mathbf{g}^i)}{\partial t} = \frac{\partial(v^i \mathbf{g}_i)}{\partial t}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$(4.5) \quad \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial t} = v^j_{,i} \mathbf{g}_j \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial t} = -v^i_{,j} \mathbf{g}^j,$$

otrzymamy

$$(4.6) \quad \Upsilon = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - v_k v^k_{,i} \right) \mathbf{g}^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k v^i_{,k} \right) \mathbf{g}_i,$$

gdzie przecinkiem oznaczono pochodną kowariantną.

Tensor deformacji w układzie współrzędnych konwekcyjnych $(M, \mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j)$ jest postaci

$$(4.7) \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [g_{ij}(\xi^k, t) - g_{ij}(\xi^k, 0)] \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j.$$

Prędkość odkształcenia \mathcal{D} będzie wyrażona wzorem

$$(4.8) \quad \underline{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j + \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j,$$

a prędkość obrotów będzie wynosiła

$$(4.9) \quad \underline{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j - \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j.$$

Równanie ruchu, które jest zdefiniowane w układzie współrzędnych $(0, \mathbf{e}_a)$ przybiera w układzie współrzędnych konwekcyjnych postać

$$(4.10) \quad \rho \Upsilon = \sigma^{ij}_{,j} \mathbf{g}_i,$$

gdzie ρ oznacza masę objętościową w konfiguracji aktualnej.

Zasada zachowania masy ma postać

$$(4.11) \quad \rho g(t) = \rho_0 g(0), \quad g = (\det |g_{ij}|)^{\frac{1}{2}},$$

przy czym ρ_0 oznacza masę objętościową w konfiguracji początkowej.

Równania konstytutywne (3.8) i (3.9), przyjmując np., że operator \mathcal{L} oznacza

$$(4.12) \quad \mathcal{L}\sigma = \dot{\sigma} - L\sigma - \sigma L^T, \quad \text{gdzie} \quad L = \underline{\mathcal{D}} + \Omega$$

(pochodna Oldroyda), przybierają w składowych kontrawariantnych tensora naprężenia — następującą postać:

$$(4.13) \quad \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} = B^{ijmi} \mathcal{D}_{mi},$$

gdzie

$$(4.14) \quad B^{ijmi} = \lambda g^{ij} g^{mi} + \mu (g^{im} g^{ji} + g^{il} g^{jm}) + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{ij} \Delta \bar{\sigma}^{mi} - 2g^{jm} \sigma^{il}.$$

Związki zgodności kinematycznej Hadamarda (3.1) dla pola prędkości \mathbf{v} przyjmują postać ($\varphi \rightarrow \mathbf{v}$)

$$(4.15) \quad \left[\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] \right] \otimes \mathbf{n} + \omega [[\text{grad } \mathbf{v}]] = 0$$

ub też w składowych

$$(4.16) \quad \left[\left[\frac{\partial (v_m \mathbf{g}^m)}{\partial t} \right] \right] \otimes n_l \mathbf{g}^l + \omega [[v_{m,l} \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^l]] = 0.$$

Wykorzystując (4.4) oraz fakt, że na froncie fali przyspieszenia wektory bazy \mathbf{g}^l są ciągle, otrzymamy

$$(4.17) \quad [[\gamma_m]] (\mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^l) n_l + \omega [[v_{m,l}]] \mathbf{g}^m \otimes \mathbf{g}^l = 0;$$

stąd otrzymamy równanie

$$(4.18) \quad [[\gamma_m]] n_l + \omega [[v_{m,l}]] = 0$$

lub też

$$(4.19) \quad [[\gamma^x]] g_{xm} n_l + \omega [[\mathcal{D}_{ml} + \Omega_{ml}]] = 0.$$

Równania Hadamarda (3.1) dla składowych kontrawariantnych tensora naprężenia Cauchy'ego σ przybiorą postać ($\varphi \rightarrow \sigma = \sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$) oraz gard $\sigma = \sigma_{,k}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k$,

$$(4.20) \quad \left[\left[\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \right] \right] \otimes n_k \mathbf{g}^k + \omega [[\sigma_{,k}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k]] = 0.$$

Ponieważ

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) &= \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \sigma^{ij} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) = \\ &= \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j + \sigma^{ij} v_{,i}^r \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_j + \sigma^{ij} v_{,j}^s \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_s, \end{aligned}$$

oraz z faktu, że na fali przyspieszenia \mathbf{g}_i oraz σ^{ij} są ciągłe, otrzymamy

$$(4.22) \quad \left[\left[\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} \right] \right] \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes n_k \mathbf{g}^k + \sigma^{ij} \llbracket v_{,i}^r \rrbracket \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_j \otimes n_k \mathbf{g}^k + \\ + \sigma^{ij} \llbracket v_{,j}^s \rrbracket \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_s \otimes n_k \mathbf{g}^k + \omega \llbracket \sigma_{,k}^{ij} \rrbracket \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^k = 0.$$

Wykorzystując równania (4.8) i (4.9) oraz mając na uwadze fakt, że $v_{,r}^i = g^{im} v_{m,r}$ i $v_{,s}^j = g^{jm} v_{m,s}$, otrzymamy

$$(4.23) \quad \left[\left[\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} \right] \right] n_k + \sigma^{rj} \llbracket \mathcal{D}_{mr} + \Omega_{mr} \rrbracket g^{im} n_k + \sigma^{is} \llbracket \mathcal{D}_{ms} + \Omega_{ms} \rrbracket g^{im} n_k + \omega \llbracket \sigma_{,k}^{ij} \rrbracket = 0.$$

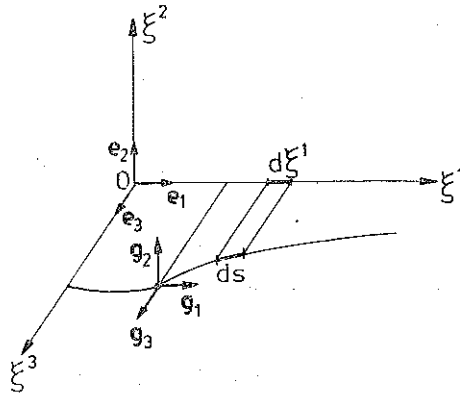
Uwzględniając równania ruchu (4.10) równania Hadamarda dla pola naprężenia prowadzą do postaci

$$(4.24) \quad \left[\left[\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} \right] \right] n_j + \sigma^{rj} \llbracket \mathcal{D}_{mr} + \Omega_{mr} \rrbracket g^{im} n_j + \sigma^{is} \llbracket \mathcal{D}_{ms} + \Omega_{ms} \rrbracket g^{im} n_j + \omega \rho \llbracket \gamma^i \rrbracket = 0.$$

Rozważymy kolejno trzy przypadki szczególne propagacji fal: przypadek fal płaskich przy założeniu kinematyki bezobrotowej, przypadek kinematyki dopuszczającej obroty oraz przypadek fal sferycznych.

5. FALE PŁASKIE

Z założenia płaszczyzna fali jest prostopadła do wektora \mathbf{e}_1 (rys. 16) i współrzędne materialne konwekcyjne x^i są identyczne ze współrzędnymi początkowymi



Rys. 16. Fala płaska (kinematyka bezobrotowa)

kartezjańskimi x^i , ponieważ wektory \mathbf{e}_i i $\mathbf{g}_i(\xi^k, 0)$ są równoważne. W bazie \mathbf{e}_i układu stałego składowe tensora odkształcenia są następujące;

$$(5.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi^i} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi^i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi^j} \right) \quad (\xi^i \equiv \dot{x}^i).$$

Tensor metryczny ma różne od zera elementy diagonalne: $g_{11}, g_{22}=g_{33}=1$. Tensor naprężenia Cauchy'ego ma jedynie niezerową składową σ^{11} . Długość ds elementu $d\xi^1$ jest równa: $ds=\sqrt{g_{11}} d\xi^1$ oraz składowe wektora jednostkowego prostopadłego do płaszczyzny fali są następujące:

$$n_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \frac{1}{\sqrt{g^{kl} \varphi'_k \varphi'_l}}, \quad n^i = g^{ik} n_k,$$

gdzie $\varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \equiv \xi^1 = \text{const} = 0$. Jedyne niezerową składową kowariantną wektora n jest $n_1 = 1/\sqrt{g^{11}}, n_2 = n_3 = 0$. W konsekwencji otrzymamy $n^1 = \sqrt{g^{11}}, n^2 = n^3 = 0$.

5.1. Kinematyka bezobrotowa

W przypadku kinematyki bezobrotowej ($\Omega \equiv 0$) równania Hadamarda (4.19) dla $l=1$ oraz (4.24) dla $j=1$ redukują się do postaci

$$(5.2) \quad [[\gamma^\alpha]] g_{\alpha m} + \omega \sqrt{g^{11}} [[\mathcal{D}_{m1}]] = 0,$$

$$(5.3) \quad \{B^{i1 m1} + \sigma^{11} g^{im} + \sigma^{i1} g^{1m}\} [[\mathcal{D}_{m1}]] + \omega \rho \sqrt{g^{11}} [[\gamma^i]] = 0,$$

przy czym w równaniu (5.3) wykorzystano (4.13).

Z równań (5.2) i (5.3) otrzymamy

$$(5.4) \quad [[\gamma^\alpha]] g_{\alpha m} \{B^{i1 m1} + \sigma^{11} g^{im} + \sigma^{i1} g^{1m}\} - \omega^2 \rho g^{11} [[\gamma^i]] = 0.$$

Oznaczając przez

$$(5.5) \quad B_\alpha^i = g_{\alpha m} \{B^{i1 m1} + \sigma^{11} g^{im} + \sigma^{i1} g^{1m}\},$$

równaniu charakterystycznemu dla wyznaczenia prędkości propagacji fal ω nadamy postać

$$(5.6) \quad B_\alpha^i [[\gamma^\alpha]] = \omega^2 \rho g^{11} [[\gamma^i]],$$

przy czym na podstawie (4.14) mamy

$$(5.7) \quad B^{i1 m1} = \lambda g^{i1} g^{m1} + \mu (g^{im} g^{11} + g^{i1} g^{1m}) + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{11} \Delta \bar{\sigma}^{m1} - 2\sigma^{i1} g^{jm}.$$

Skąd

$$(5.8) \quad \begin{aligned} B^1_1 &= [\lambda + 2\mu + \alpha_0 (\Delta \bar{\sigma}^{11} g_{11})^2] g^{11}, \\ B^2_2 &= B^3_3 = \mu g^{11} - \sigma^{11}, \quad B^i_\alpha \equiv 0 \quad \text{dla } i \neq \alpha. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (5.6) znajdziemy wzór na prędkości propagacji fal szybkich i wolnych w następującej postaci:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}_L &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} (g_{11})^{3/4} \sqrt{1 + \frac{\alpha_0}{\lambda + 2\mu} (\Delta \bar{\sigma}^{11} g_{11})^2}, \\ \tilde{\omega}_T &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} (g_{11})^{3/4} \sqrt{1 - \frac{\sigma^{11} g_{11}}{\mu}}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(5.10) \quad \tilde{\omega} = \sqrt{g_{11}} \omega;$$

uwzględniliśmy również, że $\rho_0 = \rho \sqrt{g_{11}}$.

We wzorach (5.9) czynniki $\sqrt{\lambda+2\mu}$, $\sqrt{\mu}$ wyrażają występowanie we własnościach histerezy ewolucji *quasi-odwracalnych*. Wyrazy ρ_0 i $(g_{11})^{3/4}$ odzwierciedlają rolę zasady zachowania masy i zachowania pędu. We wzorze dla prędkości fal szybkich $\tilde{\omega}_L$ wyraz $\alpha_0 (\Delta \bar{\sigma}^{11} g_{11})^2$ odzwierciedla koncepcję plastyczności. Natomiast we wzorze na prędkości fal wolnych wyraz $\sigma^{11} g_{11}$ wiąże się z pochodną obiektywną naprężenia aktualnego Cauchy'ego.

Dla składowych odkształcenia ε_{11} otrzymamy z (5.1)

$$(5.11) \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right)^2$$

oraz z (4.7) mamy $g_{11} = 1 + 2\varepsilon_{11}$ (bo $g_{11}(\xi^k, 0) = 1$). Prędkości propagacji fal są proporcjonalne do czynnika $(g_{11})^{3/4} = \left[1 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right)^2 \right]^{3/4}$. Jeżeli np. odkształcenia są rzędu $|\varepsilon_{11}| \leq 0,3$, to czynnik ten jest zawarty w przedziale $[0,58; 1,48]$. Należy zauważyć, że w przypadku ściskania prędkości propagacji fal $\tilde{\omega}_L$ i $\tilde{\omega}_T$ są zwiększone, natomiast w przypadku rozciągania — zmniejszone. Dla odkształceń rzędu $|\varepsilon_{11}| \leq 0,01$ prędkości propagacji fal są zwiększone o czynnik zmieniający się w górnych granicach 10^{-2} . Czynniki korekcyjne we wzorze na prędkość fal wolnych $\tilde{\omega}_T$ pochodzący z definicji pochodnej obiektywnej σ^{11} jest pomijalny, ponieważ σ^{11}/μ jest rzędu co najmniej 10^{-3} .

Rozważmy teraz przypadek, gdy znajdujemy się w pobliżu granicy płynięcia. Przyjmijmy warunek Hubera-Misesa $J'_1 = 1/2 \bar{\sigma} \bar{\sigma} = Y_0^2$. Niezerowymi składowymi tensora Cauchy'ego są σ^{11} oraz $\sigma^{22} = \sigma^{33}$; zatem drugi niezmiennik dewiatora naprężenia jest postaci

$$J'_2 = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^{1j} g_{jr} g_{is} \bar{\sigma}^{rs} - \frac{3}{4} (\bar{\sigma}^{11} g_{11})^2.$$

Czynnik korekcyjny we wzorze na prędkość fal szybkich pochodzący od zaproponowanej koncepcji plastyczności jest równy

$$(5.12) \quad \lim_{J_2 \rightarrow Y_0} \left[1 + \frac{\alpha_0}{\lambda + 2\mu} (\Delta \bar{\sigma}^{11} g_{11})^2 \right] = 1 - \frac{4}{\lambda + 2\mu} \frac{\mu}{3Y_0} J'_2.$$

Na przykład dla $\nu = 1/3$ i gdy $g_{11} \approx 1$ otrzymamy

$$(5.13) \quad \lim_{J_2 \rightarrow Y_0} \sqrt{1 - \frac{J'_2}{3Y_0^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

Zatem prędkość propagacji fal szybkich jest zmniejszona „o mnożnik” zawarty w przedziale $[1; \sqrt{2/3}]$.

Konkluzja: Dla odkształceń mniejszych od 10^{-2} prędkości propagacji fal wolnych są bliskie $\sqrt{\mu/\rho_0}$, a prędkości fal szybkich są zawarte w przedziale

$$(5.14) \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \leq \frac{\omega_L}{\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}} \leq 1.$$

Dla bardzo dużych deformacji (rzędu $|\varepsilon_{11}| \approx 0,3$) czynnik korekcyjny κ_T dla prędkości fal wolnych jest zawarty w przedziale $\kappa_T = [0,6; 1,5]$, a dla prędkości fal szybkich może zmieniać się w przedziale

$$\kappa_L = \left[0,6 \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 1,5 \sqrt{\frac{2}{3}} \right] \approx [0,5; 1,2],$$

przy czym pierwsza liczba odpowiada przypadkowi rozciągania, druga zaś ściskania.

Przyjęty schemat konstytutywny wskazuje na to, że prędkości propagacji fal są na ogół bardzo bliskie konwencjonalnym prędkościom fal sprężystych i mogą się od nich różnić lokalnie lub w czasie o 10 do 20% i zmieniają się one bardzo wyraźnie w przypadku obciążeń typu impulsowego, powodującego odkształcenia bardzo duże (np. gdy $|\varepsilon_{11}| > 0,2$).

5.2. Kinematyka obrotowa

W przypadku kinematyki dopuszczającej obroty należy również przyjąć, że płaszczyzna fali jest prostopadła do \mathbf{e}_1 i przyjąć, że $\dot{x}^t = \dot{x}^t$. Założona kinematyka daje nam $D_{23} = \Omega_{23} = g_{23} = 0$. Jak poprzednio, jedyna składowa kowariantna wektora normalnego \mathbf{n} wynosi $n_1 = 1/\sqrt{g^{11}}$, lecz trzy składowe kontrawariantne są w ogólnym przypadku niezerowe: $n^t = g^{t1}/\sqrt{g^{11}}$.

Zasada zachowania masy jest wyrażona równaniem

$$(5.15) \quad \rho_0 = \rho [g_{11} g_{22} g_{33} - (g_{12})^2 g_{33} - (g_{13})^2 g_{22}]^{1/2}.$$

Związki ciągłości kinematycznej Hadamarda dla pola prędkości (4.19) prowadzą do zależności:

dla $m=2$

$$(5.16) \quad |[\mathcal{D}_{12}]| + |[\Omega_{12}]| = 0, \quad |[\mathcal{D}_{22}]| = 0;$$

dla $m=3$

$$(5.17) \quad |[\mathcal{D}_{13}]| + |[\Omega_{13}]| = 0, \quad |[\mathcal{D}_{33}]| = 0;$$

dla $m=1$

$$(5.18) \quad \mathbf{g} |[\Upsilon]| + \mathbf{W} |[\mathcal{D}]| = 0,$$

gdzie macierze \mathbf{g} i \mathbf{W} są postaci

$$(5.19) \quad \mathbf{g} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{W} = \sqrt{g^{11}} \omega \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

oraz wektory γ i \mathcal{D} mają składowe

$$(5.20) \quad \gamma^T = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \quad \mathcal{D}^T = (D_{11}, D_{21}, D_{31}).$$

Druga grupa równań kinematycznych Hadamarda (4.24) — dla pola naprężenia prowadzi do trzech związków między $[[\gamma]]$ i $[[\mathcal{D}]]$ o postaci

$$(5.21) \quad \sqrt{g^{11}} \rho \omega \mathbf{1} [[\gamma]] + \mathbf{S} [[\mathcal{D}]] = \mathbf{0},$$

gdzie elementy macierzy zawierają wyrazy typu $g^{ij} \sigma^{kl}$ oraz wyrazy postaci $(\lambda + 2\mu) g^{ij} g^{kl}$ lub $(\lambda + \mu) g^{ij} g^{kl}$ oraz $\Delta \bar{\sigma}^{ij} \Delta \bar{\sigma}^{kl}$:

$$(5.22) \quad \begin{aligned} S_{11} &= (\lambda + 2\mu) g^{11} g^{11} + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{11} \Delta \bar{\sigma}^{11}, \\ S_{12} &= 2(g^{12} \sigma^{11} - g^{11} \sigma^{21}) + 2(\lambda + 2\mu) g^{11} g^{12} + 2\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{11} \Delta \bar{\sigma}^{12}, \\ S_{13} &= 2(g^{13} \sigma^{11} - g^{11} \sigma^{13}) + 2(\lambda + 2\mu) g^{11} g^{13} + 2\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{11} \Delta \bar{\sigma}^{13}, \\ S_{21} &= g^{12} \sigma^{11} - g^{11} \sigma^{12} + (\lambda + 2\mu) g^{21} g^{11} + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{21} \Delta \bar{\sigma}^{11}, \\ S_{22} &= 2(g^{22} \sigma^{11} - g^{11} \sigma^{22}) + 2(\lambda + \mu) g^{21} g^{12} + 2\mu g^{22} g^{11} + 2\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{12} \Delta \bar{\sigma}^{11}, \\ S_{23} &= 2g^{21} g^{13} (\lambda + \mu) + 2\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{21} \Delta \bar{\sigma}^{13}, \\ S_{31} &= g^{31} \sigma^{11} - g^{11} \sigma^{13} + (\lambda + 2\mu) g^{31} g^{11} + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{31} \Delta \bar{\sigma}^{11}, \\ S_{32} &= 2g^{31} g^{12} (\lambda + \mu) + 2\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{31} \Delta \bar{\sigma}^{12}, \\ S_{33} &= 2(g^{33} \sigma^{11} - g^{11} \sigma^{33}) + 2(\lambda + \mu) g^{13} g^{13} + 2\mu g^{11} g^{33} + 2\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{31} \Delta \bar{\sigma}^{33}. \end{aligned}$$

Oznaczając przez $\mathbf{M} = \mathbf{gS} - \sqrt{g^{11}} \rho \omega \mathbf{1W}$ równaniu charakterystycznemu nadamy postać

$$(5.23) \quad \det \mathbf{M} = 0.$$

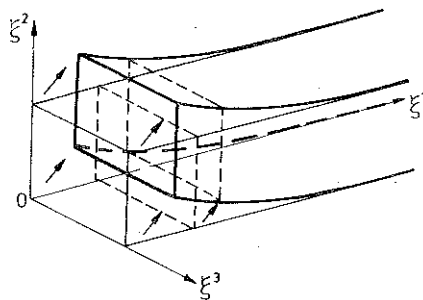
Należy tutaj zauważyć, że dzięki czterem równaniom Hadamarda dla pola prędkości — wzory (5.16) i (5.17) — otrzymane równanie charakterystyczne (5.22) jest równaniem jednorodnym.

Zbadamy poszczególne przypadki propagacji fal ścinania.

i) Przyjmijmy, że w macierzy \mathbf{g} (5.19) pominiemy wyrazy niediagonalne oraz pominiemy w macierzy \mathbf{S} (5.22) elementy korekcyjne typu $\sigma^{ij} g^{hk}$ jak również elementy pochodzące od plastyczności materiału — typu $\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{ij} \Delta \bar{\sigma}^{kl}$. W przypadku tym otrzymamy klasyczne wzory na prędkość propagacji fal sprężystych, przy czym jedynie gęstość ośrodka w konfiguracji aktualnej ρ zastępuje ρ_0 oraz istnieją czynniki korekcyjne postaci g^{11} i g^{22} .

ii) Przyjmijmy, że ścinanie przebiega w kierunku osi Oz^2 (rys. 17). W przypadku tym mamy $g_{33} = 1$ oraz składowe tensora metrycznego g_{23} i g_{31} są równe zeru. Równanie charakterystyczne (5.23) prowadzi do zerowania się wyznacznika macierzy M' , której składowe są następujące:

$$(5.24) \quad \begin{aligned} M'_{11} &= g^{11} (\lambda + 2\mu - \rho \omega^2) + \sigma^{11} - g^{11} \sigma^1_1, \\ M'_{12} &= 2g^{12} (\lambda + \mu) - 2g^{11} \sigma^2_1 + 2\alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{12} \Delta \bar{\sigma}^1_1, \\ M'_{21} &= -g^{11} \sigma^1_2 + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{11} \Delta \bar{\sigma}^1_2, \end{aligned}$$



Rys. 17. Płaska fala ścinania

$$(5.24) \quad \begin{aligned} M'_{22} &= 2g^{11}(\mu - \rho\omega^2) + 2(\sigma^{11} - g^{11}\sigma^2_2) + 2\alpha_0 \Delta\bar{\sigma}^{12} \Delta\bar{\sigma}^{12}, \\ M'_{33} &= 2g^{11}(\mu - \rho\omega^2) + 2\sigma^{11}, \\ M'_{13} &= M'_{23} = M'_{31} = M'_{32} = 0. \end{aligned}$$

(c.d.)

Oznaczając przez

$$(5.25) \quad \begin{aligned} S &= \rho\omega^2, \\ \alpha &= \lambda + 3\mu + \frac{2\sigma^{11}}{g^{11}} - \sigma^1_1 - \sigma^2_2 + \frac{\alpha_0}{g^{11}} (\Delta\bar{\sigma}^{11} \Delta\bar{\sigma}^1_1 + \Delta\bar{\sigma}^{12} \Delta\bar{\sigma}^1_2), \\ \beta &= \frac{1}{(g^{11})^2} [g^{12}(\lambda + \mu) + \alpha_0 \Delta\bar{\sigma}^{12} \Delta\bar{\sigma}^1_1 - \sigma^2_1 g^{11}] (\alpha_0 \Delta\bar{\sigma}^{11} \Delta\bar{\sigma}^1_2 - \bar{\sigma}^1_2 g^{11}), \end{aligned}$$

z równania charakterystycznego otrzymamy

$$(5.26) \quad S = \frac{1}{2} (a \mp \sqrt{a^2 + 4\beta}).$$

W celu dalszej analizy przyjmujemy prosty stan naprężenia, pozwalający na badanie prędkości propagacji fal w stanach naprężeń bardzo bliskich powierzchni płynięcia. Należy wyrazić wyrazy typu $\alpha_0 \Delta\bar{\sigma}^{1i} \Delta\bar{\sigma}^1_i$ ($i=1, 2$) jako funkcje drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia J'_2 . Możliwe jest to jedynie wówczas, gdy jedną niezerową składową tensora naprężenia σ jest składowa kontrawariantna σ^{12} .

W przypadku tym mamy

$$(5.27) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}^{11} &= \text{tr } \sigma = 0, & \sigma^1_1 &= \sigma^2_2 = \sigma^{12} g_{21}, & \sigma^3_3 &= 0, \\ \sigma^1_1 &= \sigma^{12} g_{22}, & \sigma^2_1 &= \sigma^{12} g_{11}, & \bar{\sigma}^1_1 &= \bar{\sigma}^2_2 = \frac{1}{3} \sigma^{12} g_{21}, \\ \bar{\sigma}^3_3 &= -\frac{2}{3} \sigma^{12} g_{21}, & \bar{\sigma}^1_1 &= \sigma^1_2, & \bar{\sigma}^2_1 &= \sigma^2_1, \\ J'_2 &= \frac{1}{2} \text{tr } \bar{\sigma} \bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma^{12})^2 [(g_{12})^2 + 3g_{11} g_{12}]. \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że tak przyjęty stan naprężenia, ze względu na schemat konstytutywny, prowadzi do kinematyki, dla której powinien być spełniony warunek $\mathcal{D}^1_1 = \mathcal{D}^2_2$.

Przyjęty stan naprężenia (5.27) prowadzi do znikania w (5.25) wyrazów $\alpha_0 \Delta\bar{\sigma}^{1i} \Delta\bar{\sigma}^1_i$ ($i=1, 2$). Jeżeli przyjmiemy ponadto w (5.25), że składowe tensora

naprężenia σ są małe w stosunku do λ i μ , to otrzymamy z (5.26) następujące wzory na prędkość propagacji fal:

dla prędkości fal szybkich

$$(5.28) \quad \omega_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

dla prędkości fal wolnych

$$(5.29) \quad \omega_T = 0.$$

Jeżeli nie przyjmujemy żadnej hipotezy o małości składowych σ w stosunku do λ i μ , to otrzymamy wzory na prędkości

dla prędkości fal szybkich

$$(5.30) \quad \omega_i = \sqrt{\frac{1}{\rho}(\lambda + 2\mu - \sigma^{12} g_{12} - \vartheta)},$$

dla prędkości fal wolnych

$$(5.31) \quad \omega_T = \sqrt{\frac{1}{\rho}[\mu + a_0 (\Delta\sigma^{12})^2 g_{22}/g^{11} - \sigma^{12} g_{12} + \vartheta]},$$

gdzie oznaczono

$$\vartheta = \frac{2\sigma^{12} g_{22} [g^{12}(\lambda + \mu) + \frac{1}{3} a_0 (\Delta\sigma^{12})^2 g_{12} - \sigma^{12} g_{11} g^{11}]}{g^{11} [\lambda + \mu - a_0 (\Delta\sigma^{12})^2 g_{22}/g^{11}]}$$

Jeżeli przyjąć, że g_{12} jest małe w stosunku do 1 oraz iloczyn $g_{11} g_{22}$ jest bliski 1, to otrzymamy na J'_2 wzór

$$(5.32) \quad J'_2 \approx (\sigma^{12})^2.$$

Z drugiej strony otrzymamy, że $g_{22}/g^{11} \approx (\rho_0/\rho)^2$.

Zatem w pobliżu granicy płynięcia otrzymamy

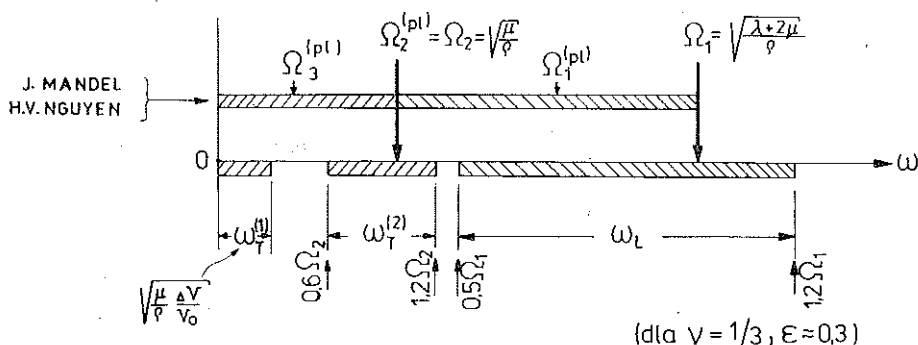
$$(5.33) \quad \rho \omega_T^2 \approx \mu \left[1 - (\rho_0/\rho)^2 - \frac{\sigma^{12}}{\mu} + \frac{\vartheta}{\mu} \right].$$

Można zauważyć, że wyrazy σ^{12}/μ i ϑ/μ są rzędu 10^{-3} i prędkości propagacji fal wolnych zależą głównie od zmiany objętości. Doświadczenia cytowane w pracy [27] wskazują na to, że względna zmiana objętości może osiągać wartość 10^{-1} . Ponieważ $\rho_0/\rho = 1 - \Delta V/V_0$ ($\Delta V > 0$), przeto otrzymamy

$$(5.34) \quad \omega_1 \approx \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta V}{V_0}}.$$

Z przeprowadzonej analizy można jedynie wyciągnąć następujący wniosek. W pobliżu granicy płynięcia prędkość propagacji fal szybkich jest bliska prędkości propagacji fal sprężystych podłużnych, natomiast prędkość propagacji fal wolnych jest stosunkowo mała w porównaniu z prędkością sprężystych fal poprzecznych.

Porównamy otrzymane wyniki dla prędkości propagacji „plastycznych” fal przyspieszenia z wynikami otrzymanymi przez J. MANDELA [16] (por. §3 w przypadku małych deformacji) oraz z wynikami pracy [18] (w przypadku skończonych defor-



Rys. 18. Porównanie zakresów możliwych przedziałów prędkości propagacji fal płaskich

macji). Porównanie to przedstawimy graficznie na rys. 18. Jak widać, przeprowadzona w pracy analiza prędkości propagacji fal, oparta na modelu ciała z histerezą materiałową, daje znaczne zawężenie przedziału możliwych prędkości propagacji fal.

6. FALE KULISTE

Oznaczmy przez r, θ, φ współrzędne sferyczne w chwili początkowej $t=0$. Współrzędne materialne konwekcyjne ($\xi^1 = x^1 = r, \xi^2 = \theta, \xi^3 = \varphi$) wybierzemy takie, aby odległość aktualna od początku układu (w przypadku symetrii sferycznej) wynosiła

$$(6.1) \quad x^x = R(\xi^1, t) = R(r, t).$$

Element długości początkowej jest równy

$$ds_0^2 = (d\xi^1)^2 + 2(\xi^1)^2 (d\xi^2)^2,$$

a długość elementu w chwili aktualnej

$$ds^2 = \left(\frac{\partial R(\xi^1, t)}{\partial \xi^1} \right)^2 (d\xi^1)^2 + 2(R(\xi^1, t))^2 (d\xi^2)^2.$$

Niezerowymi składowymi tensora metrycznego są następujące:

$$(6.2) \quad g_{11} = R'^2, \quad g_{22} = g_{33} = R^2.$$

Jednostkowy wektor normalnej do powierzchni fali jest następujący:

$$(6.3) \quad \mathbf{n} = \mathbf{g}^1 / \sqrt{g^{11}} = (g^{11} \mathbf{g}_1) / \sqrt{g^{11}} = \frac{1}{R'} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 / \sqrt{g_{11}}.$$

Ze wzoru (4.7) otrzymamy

$$(6.4) \quad \epsilon = \frac{1}{2} (R'^2 - 1) \mathbf{g}' \otimes \mathbf{g}^1 + \frac{1}{2} (R^2 - r^2) (\mathbf{g}^2 \otimes \mathbf{g}^2 + \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3).$$

W przypadku symetrii sferycznej, ze względu na warunki

$$(6.5) \quad |[\mathcal{D}_{12}]| = |[\mathcal{D}_{13}]| = 0,$$

wzory (5.16), (5.17) oraz (5.18), wyrażające warunki ciągłości kinematycznej Hadamarda (4.19), uproszczą się do postaci

$$(6.6) \quad g_{11} |[\gamma^1]| + \sqrt{g^{11}} \omega |[\mathcal{D}_{11}]| = 0, \quad |[\gamma^2]| = |[\gamma^3]| = 0.$$

Również równania (4.24), wyrażające drugą grupę warunków ciągłości Hadamarda, upraszczają się do postaci

$$(6.7) \quad \sqrt{g^{11}} \rho \omega |[\gamma^1]| + \{(\lambda + 2\mu) g^{11} g^{11} + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{11} \Delta \bar{\sigma}^{11}\} |[\mathcal{D}_{11}]| = 0.$$

Eliminując w (6.6) i (6.7) $|[D_{11}]|$ otrzymujemy

$$(6.8) \quad g^{11} \rho \omega^2 - g_{11} \{(\lambda + 2\mu) g^{11} g^{11} + \alpha_0 (\Delta \bar{\sigma}^{11})^2\} = 0.$$

Z zasady zachowania masy mamy

$$(6.9) \quad \rho R' R^2 = \rho_0 r^2$$

oraz ze wzoru na miarę elementu długości $0\xi^1$.

$$(6.10) \quad ds = \sqrt{g_{11}} d\xi^1 = R' d\xi^1$$

otrzymamy prędkość

$$(6.11) \quad \tilde{\omega} = \frac{ds}{dt} = R' \omega = \sqrt{g_{11}} \omega$$

propagacji fal sferycznych w postaci

$$(6.12) \quad \tilde{\omega} = \sqrt{g_{11}} \frac{1}{\rho g^{11}} \sqrt{\rho S},$$

gdzie

$$(6.13) \quad S = (\lambda + 2\mu) g^{11} g^{11} + \alpha_0 \Delta \bar{\sigma}^{11} \Delta \bar{\sigma}^{11}.$$

Otrzymamy zatem, tak samo jak w przypadku propagacji płaskich fal szybkich (por. (5.9)₁)

$$(6.14) \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} (g_{11})^{3/4} \frac{R}{r} \sqrt{1 + \frac{\alpha_0}{\lambda + 2\mu} (\Delta \bar{\sigma}^{11} g_{11})^2}.$$

W porównaniu z (5.9)₁ obserwujemy tutaj występowanie czynnika R/r .

W nieskończoności stosunek $R/r \rightarrow 1$ i prędkość fal sferycznych dąży do prędkości szybkich fal płaskich w przypadku bezobrotowym. Zauważmy, że otrzymano tutaj ten sam wynik dotyczący wpływu plastyczności na prędkość propagacji fal sferycznych jaki otrzymaliśmy w przypadku szybkich fal płaskich.

7. FALE NAPRĘŻENIA W PRĘCIE

Rozważmy pręt jednorodny o długości l , znajdujący się w spoczynku w chwili początkowej $t=0$. Położenie punktu materialnego w chwili początkowej oznaczmy przez współrzędną lagrangeowską a . Rozważmy ruch pręta (jednoosiowy stan naprężenia) jedynie w kierunku a . Przemieszczenie punktu materialnego wynosi

$$(7.1) \quad x(a, t) = a + u(a, t);$$

prędkość oznaczmy przez

$$(7.2) \quad v(a, t) = \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Prędkość deformacji \mathcal{D}_{11} i odkształcenie ε_{11} spełniają następujący związek:

$$(7.3) \quad \mathcal{D}_{11}(a, t) = \frac{\partial v}{\partial x} = [1 + \varepsilon_{11}(a, t)]^{-1} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t}.$$

Równanie ruchu (3.3) w układzie współrzędnych materialnych, dla jednoosiowego stanu naprężenia, przybierze postać

$$(7.4) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial a},$$

gdzie σ_{11} oznacza składową tensora Pioli-Lagrange'a.

$$(7.5) \quad v(a, 0) = \sigma_{11}(a, 0) = 0,$$

oraz warunki brzegowe np. typu (jednoczesne ściskanie obu końców pręta):

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \sigma(0, t) &= -\sigma_0 H_\sigma(t) \\ \sigma(l, t) &= -\sigma_0 H_\sigma(t) \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

gdzie $H_\sigma(t)$ jest daną funkcją czasu oraz $\sigma_0 = -\rho_0 c_0 v_0$, przy czym v_0 jest prędkością uderzenia w przypadku warunków brzegowych danych w prędkościach, $c_0 = \sqrt{E_0/\rho_0}$.

Uwzględniając w równaniu ruchu (7.4) związki konstytutywne (2.33) dla jednoosiowego stanu naprężenia, mając na uwadze wyrażenie (7.3), otrzymamy równanie

$$(7.7) \quad \frac{\partial}{\partial a} \left(E_0 \frac{\partial u}{\partial a} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a} \Sigma(a, t),$$

gdzie oznaczono przez $\Sigma(a, t)$ wyraz nieliniowy, którego postać wywodzi się z równania konstytutywnego i dla ciała sprężystoplastycznego

$$(7.8) \quad \Sigma(a, t) = -E_0 \int_0^t \left[1 - \left(\frac{\Delta\sigma_{11}}{\omega Y_0} \right)^2 \right] (1 - \varepsilon_{11})^{-1} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} dt,$$

przy czym warunki brzegowe (7.6) będą zmodyfikowane do postaci

$$(7.9) \quad \begin{aligned} E_0 \frac{\partial u}{\partial a} \Sigma(0, t) - \sigma_0 H_a(t), \\ E_0 \frac{\partial u}{\partial a} \Sigma(l, t) - \sigma_0 H_a(t). \end{aligned}$$

Należy zauważyć, że w przypadku ciała idealnie sprężystego w zakresie małych odkształceń, funkcja $\Sigma(a, t)$ występująca w równaniu (7.7) jest tożsamościowo równa zeru. Dla skończonych odkształceń, przyjmując, że potencjał sprężysty na jednostkę objętości w konfiguracji początkowej

$$(7.10) \quad W_{11} = \frac{1}{2} E_0 \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{4} E_1 \varepsilon_{11}^4,$$

znajdziemy następujący wzór na naprężenie:

$$(7.11) \quad \sigma_{11}(a, t) = \Sigma(a, t) = E_0 \varepsilon_{11} - \Sigma^E(a, t)$$

gdzie

$$\Sigma^E(a, t) = -E_1 \varepsilon_{11}^3.$$

Dla ciała typu Kelvina-Voigta zdefiniowanego w postaci

$$(7.12) \quad \sigma_{11} = E_0 \varepsilon - \Sigma^E(a, t) + a_0 t_0 \mathcal{D}_{11},$$

gdzie t_0 jest czasem relaksacji, a funkcja Σ^E występująca w (7.11) jest zastąpiona przez funkcję

$$(7.13) \quad \Sigma^{KV}(a, t) = \Sigma^E(a, t) - a_0 t_0 (1 + \varepsilon_{11})^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$

Oznaczamy przez χ funkcję relaksacji lepkosprężystego ośrodka ciągłego. Zakładamy, że

$$(7.14) \quad \sigma_{11} = \int_0^t \chi(t-\tau) \mathcal{D}_{11}(a, \tau) d\tau$$

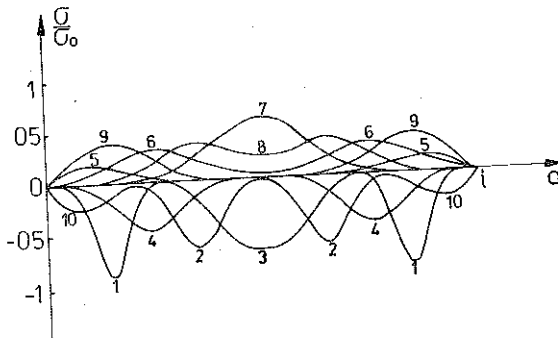
oraz, że ograniczamy się do przypadku, gdy χ jest aproksymowana przez funkcję wykładniczą (ciało Maxwella) tak, by spełniony był warunek

$$(7.15) \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = E_0 (1 + \varepsilon_{11})^{-1} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} - \frac{\sigma_{11}}{t_0}.$$

Otrzymamy w wyniku równanie (7.11), w którym

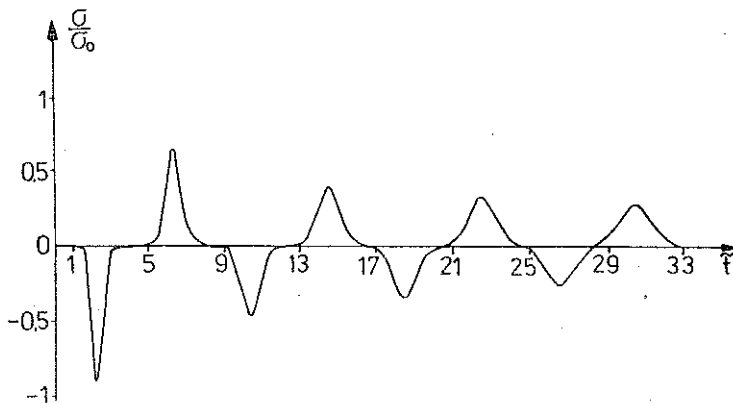
$$(7.16) \quad \Sigma^M(a, t) = \int_0^t \left[E_0 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} \varepsilon_{11} (1 + \varepsilon_{11})^{-1} + \frac{\sigma_{11}}{t_0} \right] dx.$$

W pracy [10] podano sposób numerycznego rozwiązania równania (7.7) dla ciała sprężystoplastycznego metodą elementów skończonych, opierając się na algorytmie zaproponowanym przez S. KLEINA [14]. Przyjmijmy warunki brzegowe typu (7.6). Obciążenie przyłożone na obu końcach pręta jest jednakowe. Funkcja $H_\sigma(t)$ zmienia się liniowo od zera do 1 w czasie $t' = 1/20 c_0$ i następnie maleje liniowo do zera w czasie $t'' = 1/10 c_0$; dla $t \geq t''$ przyjęto $H_\sigma(t) \equiv 0$. Przyjęto, że $\sigma_0 = 0,8 Y_0$. Dane materiałowe: $E_0 = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\rho_0 = 7800$ kg/m³, $Y_0 = 10^{-3} E_0$.



Rys. 19. Proces propagacji fal w pręcie sprężystoplastycznym. Kolejne położenie fal w chwilach $t = nl/2 c_0, n = 1, \dots, 10$.

Na rysunku 19 przedstawiono proces propagacji fal w pręcie sprężystoplastycznym. Można zaobserwować przejścia kolejnych fal naprężenia, ich odbicia od swobodnych końców pręta. Należy zwrócić uwagę na fakt, że w części środkowej pręta występują znaczne naprężenia rozciągające. Na rys. 20 przedstawiono zmianę



Rys. 20. Wykres naprężenia jako funkcji czasu w środkowym przekroju poprzecznym pręta: $t = tl/2 c_0$.

naprężenia jako funkcji czasu w środkowym przekroju poprzecznym pręta. W pracy [10] podano rozwiązanie identycznego zadania dla modelu ciała sprężystoplastyczne-go, uwzględniając ponadto efekty lepkie. Wyniki te są bardzo zbliżone do wyników przedstawionych na rys. 19 i 20. Tłumaczy się to tym, że rozważany materiał (stal typu „inox”) wykazuje znikome efekty lepkościowe.

Podobne zadania rozprzestrzeniania się fal w prętach dla ciała typu Kelvina-Voigta (równanie (7.7), gdzie $\Sigma(a, t)$ jest określone wzorem (7.13)) oraz ciała typu Maxwella (równanie (7.7), gdzie $\Sigma(a, t)$ jest określone wzorem (7.16)) — były analizowane wcześniej w pracy [3] dla pierwszego cyklu obciążenia bez rozważenia procesu kolejnych odbić.

8. FALE SFERYCZNE W GRUBOŚCIENNEJ POWŁOCE

Rozważmy grubościenną powłokę sferyczną o promieniu wewnętrznym r_1 i zewnętrznym r_2 , znajdującą się w chwili początkowej $t=0$ w spoczynku. W układzie lagrange'owskich współrzędnych sferycznych r, φ, θ ($r_1 \leq r \leq r_2$) przemieszczenie punktu materialnego w chwili t jest określone przez $u(r, t)$. Wektor przyspieszenia ma składowe $(\ddot{u}, 0, 0)$. Tensor odkształcenia Lagrange'a \mathbf{F} ma jedynie niezerowe składowe diagonalne:

$$(8.1) \quad F_{11} = 1 + u', \quad F_{22} = F_{33} = 1 + \frac{u}{r},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $u' = \partial u / \partial r$. Tensor Greena-Lagrange'a \mathbf{E} ma również tylko niezerowe składowe diagonalne:

$$(8.2) \quad E_{11} = u' + \frac{1}{2} (u')^2, \quad E_{22} = E_{33} = \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{r} \right)^2.$$

Oznaczmy przez $v_i = \partial x_i / \partial t$ prędkość punktu materialnego. Wówczas tensor prędkości deformacji (4.8) jest związany z tensorem odkształcenia \mathbf{E} następującym związkiem:

$$(8.3) \quad \frac{\partial E_{ij}(a, t)}{\partial t} = \mathcal{D}_{km}(a, t) \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j},$$

gdzie przez a oznaczono współrzędne Lagrange'a w konfiguracji początkowej. Na podstawie (8.1) i (8.3) niezerowe składowe tensora \mathcal{D}_{ij} są następujące:

$$(8.4) \quad \mathcal{D}_{11} = \frac{\dot{u}'}{1+u'}, \quad \mathcal{D}_{22} = \mathcal{D}_{33} = \frac{\dot{u}}{r+u}.$$

W przyjętym układzie współrzędnych sferycznych, niezerowymi składowymi tensora naprężenia Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ są jedynie σ_{rr} oraz $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$.

Równanie ruchu (4.10) w układzie lagrange'owskim jest postaci

$$(8.5) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}),$$

gdzie $\mathbf{T} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T$ jest tensorem naprężenia Pioli-Lagrange'a o niezerowych składowych

$$(8.6) \quad T_{11} = \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \sigma_{rr}, \quad T_{22} = (1 + u') \left(1 + \frac{u}{r}\right) \sigma_{\theta\theta}.$$

Założymy jednorodne warunki początkowe

$$(8.7) \quad v(r, 0) = \sigma_{rr}(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}(r, 0) = 0, \quad \forall r \in [r_1, r_2]$$

oraz warunki brzegowe

$$(8.8) \quad \sigma_{rr}(r_1, t) = p_1(t), \quad \sigma_{rr}(r_2, t) = p_2(t), \quad \forall t > 0.$$

Równania konstytutywne (2.41) i (2.42) dla ciała sprężysto-plastycznego przy założeniu, że operator \mathcal{L} jest symbolem pochodnej Jaumanna (która w naszym przypadku jest identyczna z pochodną cząstkową $\partial/\partial t$), przybierają postać

$$(8.9) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \mathcal{D} + a_0 \bar{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_R), \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \mathcal{D},$$

przy czym $\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}$, $\text{tr } \mathcal{D} = \mathcal{D}_{rr} + 2\mathcal{D}_{\theta\theta}$.

Podobnie jak uczyniono to w p. 7, równania ruchu (8.5) możemy przedstawić w postaci

$$(8.10) \quad \frac{\partial \sigma_{rr}^e}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^e - \sigma_{\theta\theta}^e) - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Sigma_1}{\partial r} + \frac{2}{r} (\Sigma_1 - \Sigma_2),$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(8.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^e + \Sigma_1, & \sigma_{rr}^e &= (\lambda + 2\mu) u' + 2\lambda \frac{u}{r}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^e + \Sigma_2, & \sigma_{\theta\theta}^e &= \lambda u' + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r}. \end{aligned}$$

Dla ciała sprężystoplastycznego, mając na uwadze (8.9) oraz (8.4), mamy

$$(8.12) \quad \begin{aligned} \Sigma_1 &= - \int_0^t \left\{ 2\mu \dot{u}' (1+u')^{-1} + \lambda [\dot{u}' (1+u')^{-1} + 2\dot{u} (1+u)^{-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} a_0 \bar{\Phi} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}^R - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^R) - (\lambda + 2\mu) \dot{u}' - 2\lambda \frac{\dot{u}}{r} \right\} dt, \\ \Sigma_2 &= - \int_0^t \left\{ 2\mu \dot{u} (r+u)^{-1} + \lambda [\dot{u}' (1+u')^{-1} + 2\dot{u} (1+u)^{-1}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} a_0 \bar{\Phi} (\sigma_{rr} - \sigma_{rr}^R - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^R) - \lambda \dot{u}' - 2(\lambda + \mu) \frac{\dot{u}}{r} \right\} dt. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (8.8) należy przetransformować do postaci

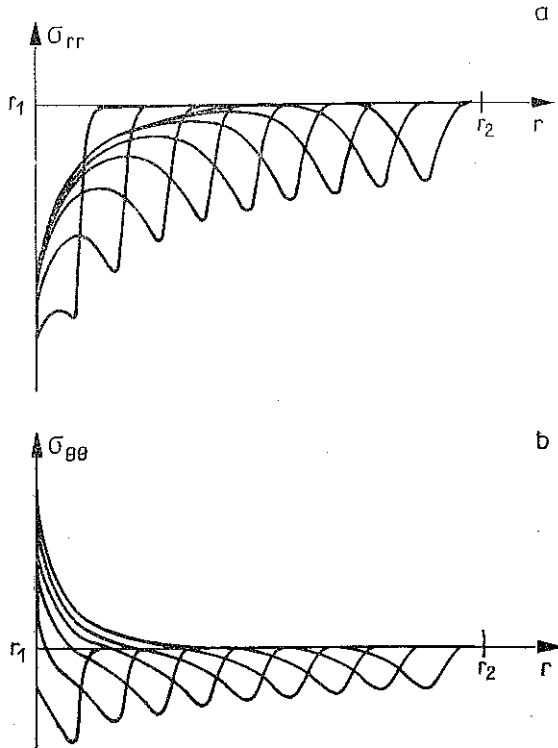
$$(8.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}^e(r_1, t) &= p_1(t) + p_1^*(t), \\ \sigma_{rr}^e(r_2, t) &= p_2(t) + p_2^*(t), \quad \forall t > 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(8.14) \quad p_i^*(t) = p_i(t) \left[\left(1 + \frac{u}{r} \right)^2 - 1 \right] - \Sigma_1, \quad i=1, 2.$$

Sposób numerycznego rozwiązania postawionego zagadnienia początkowo-brzegowego dla nieliniowego równania (8.10) typu hiperbolicznego jest podobny do zastosowanego w przypadku fal płaskich w pręcie (p. 7). Metoda ta pozwala otrzymać z dostateczną dokładnością rozwiązania problemów działań impulsowych również w zakresie skończonych deformacji sferycznych. Przykłady jej zastosowania dla przypadku grubościennej kuli z pustką oraz dla cienkiej powłoki sferycznej poddanej działaniu impulsu ciśnienia podano w pracy [11]; natomiast dla cienkościennego zbiornika w pracy [10].

Rozważmy przypadek grubościennej kuli o grubości $e = r_2 - r_1 = 5r_1$. Przyjmijmy opis materiału lepkosprężysty typu Maxwella. Wówczas funkcję $a_0 \bar{\Phi}(\sigma - \sigma_R)$ w równaniu (8.9) należy zastąpić przez $-1/t_0$, gdzie t_0 jest czasem relaksacji. Przyjmijmy, że $t_0 = 0,0001$ s. Materiał kuli jest identyczny jak pręta (por. p. 7); przyjęto ponadto $\nu = 1/3$. Zatem $\mu = 0,75 \cdot 10^5$ MPa, $\lambda = 1,5 \cdot 10^5$ MPa. Prędkość propagacji fal sferycznych wynosi $c_0 = 6200$ ms⁻¹. Założymy, że warunek brzegowy na we-



Rys. 21. Wykres składowych naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$ jako funkcji promienia dla kolejnych czasów $t_n = ne/gc_0$, $n=1, \dots, 9$.

wewnętrznej powierzchni kuli jest dany w prędkościach (nagła zmiana prędkości na brzegu):

$$(8.15) \quad v(0, t) = v_0 = 10^{-3} c_0, \quad \forall t > 0.$$

Na rys. 21 przedstawiono zmianę składowych naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\theta\theta}$ jako funkcji promienia r dla kolejnych czasów $t_n = n \cdot e/g c_0$, $n=1, \dots, 9$. Można wyraźnie zaobserwować zmniejszanie się amplitudy fal rozprzestrzeniających się od wewnątrz pustki kulistej, zanikającej zarówno ze względu na kształt sferyczny jak też ze względu na lepkość ośrodka.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. H. ARGYRIS, J. S. DOLTSINS, *On the large strain inelastic analysis in natural formulation. Part II, Dynamic problems*, Computer Methods in Appl. Mech. and Eng., **21**, 91–126, 1980.
2. M. M. BALABAN, A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *Acceleration waves in elastic-plastic materials*, Int. J. Edng. Sci., **8**, 1970.
3. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, P. STUTZ, *Reponses impulsionales de contrainte et de deformation finies viscoélastiques unidimensionnelles*, Mech. Res. Comm., **4**, 5, 291–296, 1977.
4. Y. DESCATHA, *Propriétés du tenseur acoustique en plasticité finie*, C. R. Acad. Sc., t. 277, Paris 1973.
5. R. DZIĘCIELAK, *Fale przyspieszenia w ośrodku konsolidującym*, Rozpr. Inżyn., **26**, 2, 1978.
6. M. N. ELLEUCH, *Identification à l'aide d'essais de torsion alternée d'une loi de comportement à structure héréditaire*, Praca doktorska, Uniwersytet w Grenoble, 1981.
7. D. FAVIER, *Contribution à l'étude et à l'identification d'une loi de comportement à structure héréditaire*, Praca doktorska, Uniwersytet w Grenoble, 1981.
8. P. GUELIN, *Rémarques sur l'hysteresis mécanique, Les bases d'un schéma thermomécanique à structure héréditaire*, J. de Mécanique, **19**, 2, 1980.
9. P. GUELIN, W. K. NOWACKI, *Rémarques sur les ondes d'accélération dans un continu élastoplastique avec hysteresis*, Arch. Mech., **36**, 1, 1984.
10. P. GUELIN, W. K. NOWACKI, J. M. TERRIEZ, *Rémarques sur les réponses dynamiques des structures*, Mech., Res. Comm., **7**, 5, 295–303, 1980.
11. P. GUELIN, W. A. NOWACKI, J. M. TERRIEZ, *Sur l'analyse des réponses impulsionales en grandes déformations sphériques*, Arch. Mech., **32**, 2, 1980.
12. W. GOLDSMITH, *Impact: The theory and physical behaviour of colliding solids*, London 1960.
13. J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et des équations de l'hydrodynamique*, Paris 1903.
14. S. KLEIN, *The non linear dynamic analysis of shells of revolution with asymmetric properties by the finite element method*, Trans. ASME, J. Pressure Vessel Techn., 1975.
15. R. KUC, W. K. NOWACKI, *Analiza fal silnej nieciągłości w ośrodku konsolidującym*, Rozpr. Inżyn., **31**, 1, 1983.
16. J. MANDEL, *Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimensions*, J. de Mécanique, **1**, 1, 1962.
17. J. MANDEL, *Propagation des surfaces de discontinuité dans un milieu élastoplastique*, „Stress waves in anelastic solids“, IUTAM Symposium, Springer Verlag, 1964.
18. V. H. NGUYEN, *Izotermiczne i adiabatyczne fale przyspieszenia w ośrodku sprężysto-plastycznym w zakresie dużych deformacji*, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1984.
19. W. K. NOWACKI, *Stress waves in non-elastic solids*, Pergamon Press, 1978.
20. W. K. NOWACKI, *Propagation des ondes dans un sol élastoplastique*, dans “Problèmes Non-lineaires de Mécanique”, PWN, Varsovie 1980.
21. W. K. NOWACKI, T. KURCYK, *Sur le champ des températures en thermoélastoviscoplasticité finie*, J. de Mécanique Théor. et Appl., Numéro Spécial, 109–124, 1982.

22. B. PERSOZ, *La rhéologie*, Masson, Paris 1969.
23. M. PIAU, *Ondes d'accélération dans les milieux élastoplastiques viscoplastiques*, J. de Mécanique, **14**, 1, 1975.
24. X. A. РАХМАТУЛИН, Ю. А. ДЕМЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Москва 1961.
25. B. RANIECKI, *Remarks on the propagation of elastic-plastic waves*, "Mechanical waves in solids", ed. L. BRUN et J. MANDEL, Springer Verlag, Vienne 1976.
26. T. C. T. TING, *Shock waves and weak discontinuities in anisotropic elastic-plastic media*, "Shock waves in solids", 1976.
27. J. R. WILLIS, *Finite deformation solution of a dynamic problem of combined compressive and shear loading for an elastic-plastic half-space*, J. Mech. Phys. Solids, **23**, 405-419, 1975.
28. B. WACK, *The torsion test to identify a hereditary type constitutive equation*, Res. Mech. Letters, **2**, 1982.

Резюме

О ВОЛНАХ УСКОРЕНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С МАТЕРИАЛЬНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

Целью работы является определение скорости распространения волны ускорения в упругопластической сплошной среде. В рассуждениях принята модель упругопластической среды с дискретной памятью. Используемые определяющие уравнения характеризуют необратимость эволюции материального элемента — модель тела с материальным гистерезисом. Рассмотрено распространение плоских волн для случая кинематики без вращения, как и с вращением. Рассуждения проведены в системе конвекционных координат в области конечных деформаций.

Последних два параграфа посвящены начально-краевым проблемам, плоским одномерным проблемам волн в стержне и сферическим волнам в толстостенной сферической оболочке. Приведены численные примеры.

SUMMARY

ON THE ACCELERATION WAVES IN ELASTIC-PLASTIC MEDIA WITH DISCRETE MEMORY

The paper is aimed at determining the propagation velocity of acceleration waves in continuous elastic-plastic media. The model of an elastic-plastic medium with discrete memory is assumed. The constitutive equations used characterize the irreversible character of evolution of the material element, the model exhibiting the phenomenon of hysteresis. Propagation of plane waves is considered for the case of both the rotational and irrotational kinetics. The problem is formulated in convective coordinates within the range of finite deformations. The last two sections of the paper deal with the initial boundary-value problem, the problem of plane one-dimensional waves in rods, and with the problem of spherical waves in a thick-walled spherical shell. Numerical examples are given.

LABORATOIRE ASSOCIE AU C.N.R.S. FRANCJA
POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1984 r.