

RÓWNANIA TEORII REISSNERA DLA POWŁOK O WOLNO ZMIENNYCH KRZYWIZNACH

ZENON R Y C H T E R (BIAŁYSTOK)

Praca dotyczy liniowej teorii Reissnera powłok sprężystych, izotropowych i poprzecznie izotropowych, o łagodnie zmieniającej się krzywiznie. Wyprowadzono trzy równania dla funkcji sił stycznych, funkcji odkształceń oraz funkcji sił poprzecznych. W odróżnieniu od prac [1, 2] uwzględniono również powłoki o większej wyniosłości. W porównaniu z pracą [3] nie uczyniono żadnych założeń co do stosunku przemieszczeń stycznych do normalnych. Dopuszczono również mniejsze długości fal odkształcenia.

1. WSTĘP

Zginanie sprężystych powłok o małej wyniosłości można opisać w ramach teorii Reissnera (często określanej jako teoria Timoszenki) za pomocą układu trzech równań, zawierających funkcję sił wewnętrznych, ugięcie powłoki oraz rotacyjną składową wektora sił poprzecznych. Równania tego typu wyprowadzili PELECH [1] i GALIMOW [2]. Próbę utrzymania podobnych równań dla powłok o znacznej wyniosłości podjął ŁUKASIEWICZ [3], który opierając się na założeniu o wolnej zmienności krzywizn powłoki, wyprowadził cztery równania dla funkcji sił wewnętrznych, ugięcia i sił poprzecznych. Równania te są dwunastego rzędu, podczas gdy warunki brzegowe teorii Reissnera dopuszczają rząd dziesiąty. W niniejszej pracy przedstawiamy wywód układu trzech równań, dziesiątego rzędu, zawierającego funkcję sił wewnętrznych, funkcję odkształceń oraz rotacyjną składową wektora sił poprzecznych, stanowiącego uogólnienie koncepcji zawartych w pracach [1–3]. Równania opisują zginanie powłok w wolno zmiennych krzywiznach, których wyniosłość, w odróżnieniu od [1, 2], może być znaczna. W porównaniu z pracą [3] rezygnujemy z założeń dotyczących stosunku przemieszczeń stycznych do ugięcia powłoki. Jest to możliwe dzięki wprowadzeniu funkcji odkształceń jako jednej z podstawowych niewiadomych zamiast ugięcia powłoki stosowanego w [1–3]. Ponadto założenie [3], że grubość powłoki h jest mała w stosunku do charakterystycznej długości fali deformacji L , co pozwala na pomijanie wobec jedności wielkości rzędu $h^2/L^2 \ll 1$, osłabiamy do postaci $h^4/L^4 \ll 1$. W ten sposób dopuszczamy stany deformacji o większej zmienności, jakie mogą się pojawić przy obciążeniach lokalnych. Rozważania ograniczamy do zagadnień opisywanych równaniami liniowymi.

2. RÓWNIANIA PODSTAWOWE

Niezbędne równania teorii Reissnera otrzymamy łatwo z równań wyprowadzonych przez NAGHDIEGO [4, 5], opierając się na hipotezy Kirchhoffa-Love'a. W tym celu wystarczy uzupełnić tensor zmiany krzywizny występujący w równaniach stanu wpływem odkształceń postaciowych.

Oznaczmy przez w_α , w przemieszczenia styczne i ugięcie środkowej powierzchni powłoki w układzie współrzędnych normalnych na tej powierzchni, gdzie indeksy greckie przyjmują wartość $\{1, 2\}$. Za pomocą przemieszczeń tworzymy symetryczne tensory odkształceń błonowych $\gamma_{\alpha\beta}$ i zmiany krzywizny $\varkappa_{\alpha\beta}$:

$$(2.1) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w, \quad \varkappa_{\alpha\beta} = -w_{|\alpha\beta} + b_{\beta}^{\nu} b_{\nu\alpha} w - \\ - b_{\beta}^{\nu} w_{\nu|\beta} - b_{\beta}^{\nu} w_{\nu|\alpha} - b_{\alpha|\beta}^{\nu} w_{\nu},$$

które podlegają warunkom nierozdzielności

$$(2.2) \quad C^{\varphi} = \varepsilon^{\beta\eta} [\varepsilon^{\alpha\varphi} (\varkappa_{\alpha\beta|\eta} + \underbrace{b_{\beta}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha|\eta}} + \underbrace{b_{\beta|\eta}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha}}) + \varepsilon^{\alpha\delta} b_{\delta}^{\varphi} \gamma_{\alpha\beta|\eta}] = 0, \\ C = \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\eta} [-b_{\lambda\eta} (\varkappa_{\alpha\beta} + \underbrace{b_{\beta}^{\nu} \gamma_{\nu\alpha}}) + \gamma_{\alpha\beta|\eta\lambda}] = 0$$

oraz gdzie $\varepsilon_{\alpha\beta}$ oznacza tensor permutacyjny, $b_{\alpha\beta}$ tensor krzywizny środkowej powierzchni powłoki, a symbol $()_{|\alpha}$ różniczkowanie kowariantne względem naturalnej metryki tej powierzchni. Symetryczne siły błonowe $S_{\alpha\beta}$ i momenty $M_{(\alpha\beta)}$ spełniają następujące równania równowagi:

$$(2.3) \quad B^{\alpha} = S^{\beta\alpha}_{|\beta} - 2 \underbrace{b_{\nu}^{\alpha} M^{(\nu\beta)}_{|\beta}} - \underbrace{b_{\nu|\beta}^{\alpha} M^{(\nu\beta)}} + q^{\alpha} - b_{\nu}^{\alpha} m^{\nu} = 0, \\ B = b_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} + Q^{\alpha}_{|\alpha} - \underbrace{b_{\alpha\beta} b_{\nu}^{\alpha} M^{(\nu\beta)}} + q = 0,$$

z których za pomocą równań

$$(2.4) \quad M^{\beta\alpha}_{|\beta} - Q^{\alpha} + m^{\alpha} = 0, \quad N^{\beta\alpha} = S^{\beta\alpha} - b_{\nu}^{\alpha} M^{\nu\beta}, \quad M^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (M^{\alpha\beta} + M^{\beta\alpha})$$

dokonano eliminacji niesymetrycznych sił błonowych $N_{\alpha\beta}$, momentów $M_{\alpha\beta}$ oraz częściowo sił poprzecznych Q^{α} . Przez q_n , q i m_n oznaczono obciążenie styczne, normalne i obciążenie parą sił, przypadające na jednostkę pola środkowej powierzchni powłoki; nawias obejmujący parę indeksów symbolizuje operację symetryzacji.

Równania konstytutywne wybieramy w postaci sprzężonej:

$$(2.5) \quad \gamma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} - D^{\mu\nu} \left(\varkappa_{\lambda\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\lambda|\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\eta|\lambda} \right) \right], \\ M^{(\beta\alpha)} = B^{\beta\lambda\eta} \left(\varkappa_{\lambda\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\lambda|\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\eta|\lambda} \right) + \underbrace{D^{\lambda\eta} (\alpha\beta)} \gamma_{\lambda\eta}, \\ M^{\beta\alpha} = B^{\alpha\beta\lambda\eta} \left(\varkappa_{\lambda\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\lambda|\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\eta|\lambda} \right) + \underbrace{D^{\lambda\eta\alpha\beta}} \gamma_{\lambda\eta}, \\ Q^{\alpha} = \frac{5}{6} G h \delta^{\alpha},$$

gdzie δ^α jest wektorem odkształceń postaciowych w płaszczyźnie normalnej do powierzchni środkowej, G modułem ścinania w tej płaszczyźnie, h grubością powłoki, tensory sztywności zaś mają postać

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A_{\alpha\beta\lambda\eta} &= \frac{1}{Eh} \left[\frac{1+\nu}{2} (g_{\alpha\lambda} g_{\beta\eta} + g_{\alpha\eta} g_{\beta\lambda}) - \nu g_{\alpha\beta} g_{\lambda\eta} \right], \\ B^{\alpha\beta\lambda\eta} &= D \left[\frac{1-\nu}{2} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} + g^{\alpha\eta} g^{\beta\lambda}) + \nu g^{\alpha\beta} g^{\lambda\eta} \right], \\ D^{\alpha\beta\lambda\eta} &= D \left[\frac{1-\nu}{2} (2b^{\alpha\eta} g^{\beta\lambda} + 2b^{\beta\eta} g^{\alpha\lambda} + b^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} + b^{\beta\lambda} g^{\alpha\eta} - \right. \\ &\quad \left. - 2Hg^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} - 2Hg^{\alpha\eta} g^{\beta\lambda}) + \nu (2b^{\alpha\beta} g^{\lambda\eta} + b^{\lambda\eta} g^{\alpha\beta} - 2Hg^{\alpha\beta} g^{\lambda\eta}) \right]. \end{aligned}$$

Tutaj D oznacza sztywność płytową

$$(2.7) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

E i ν moduł Younga i współczynnik Poissona w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej, $g_{\alpha\beta}$ pierwszy tensor metryczny, a $H = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha$ krzywiznę średnią. Wzory (2.5) i (2.6) wynikają bezpośrednio z równań [4], przy czym drugi wyraz z prawej strony (2.5)₂ podano w [4] w błędnej postaci $D^{\alpha\beta(\lambda\eta)} \gamma_{\lambda\eta}$.

W przypadku materiału poprzecznie izotropowego z osią izotropii prostopadłą do powierzchni środkowej, moduł ścinania G jest niezależny od E i ν . Dla materiału izotropowego zachodzi znany związek

$$(2.8) \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

3. ZAŁOŻENIA UPRASZCZAJĄCE

Aprioryczne oszacowanie wielkości poszczególnych wyrazów w równaniach podstawowych otrzymamy charakteryzując zmienne pola tensorowe za pomocą liczb określających maksymalną wielkość oraz zmienność tych pól. Współrzędne na środkowej powierzchni powłoki wybieramy w taki sposób, aby składowe pierwszego tensora metrycznego spełniały warunek

$$(3.1) \quad g_{\alpha\beta} \sim g^{\alpha\beta} \sim 1,$$

gdzie symbol \sim oznacza równość co do rzędu wielkości. Przy tym założeniu składowe kowariantne, kontrawariantne i mieszane dowolnego tensora mają wymiar i rząd wielkości składowych fizycznych. Zakrzywienie powłoki oraz amplitudy odkształceń i sił wewnętrznych charakteryzujemy za pomocą nieujemnych liczb R , γ , \varkappa , N , M spełniających nierówności

$$(3.2) \quad |b_{\alpha\beta}| \leq 1/R, \quad |\gamma_{\alpha\beta}| \leq \gamma, \quad |\varkappa_{\alpha\beta}| \leq \varkappa, \quad |S_{\alpha\beta}| \leq N, \quad |M_{\alpha\beta}| \leq M.$$

Wymienione pola tensorowe zmieniają się z prędkością co najwyżej odwrotnie proporcjonalną do długości fal L_R, L_N, L_M , zgodnie z nierównościami

$$(3.3) \quad |b_{\alpha\beta}| \leq \frac{1}{RL_R}, \quad |\gamma_{\alpha\beta}| \leq \frac{\gamma}{L_N}, \quad |\kappa_{\alpha\beta}| \leq \frac{\kappa}{L_M},$$

$$|S_{\alpha\beta}| \leq \frac{N}{L_N}, \quad |M_{\alpha\beta}| \leq \frac{M}{L_M},$$

przy czym rząd wielkości wyższych pochodnych szacujemy za pomocą tych samych długości fal, np.

$$|b_{\alpha\beta|\eta\lambda}| \leq \frac{1}{RL_R^2}, \quad |\gamma_{\alpha\beta|\eta\lambda}| \leq \frac{\gamma}{L_N^2}.$$

Na podstawie (2.5)_{1,3}, po odrzuceniu małych zazwyczaj wyrazów, można przyjąć

$$(3.4) \quad N \sim Eh\gamma, \quad M \sim D\kappa,$$

co pozwala na zastępowanie w oszacowaniach, parametrów N, M przez γ, κ . Z równania (2.4)₁, przy uwzględnieniu (2.5)₄, znajdujemy

$$(3.5) \quad Q^\alpha \sim Gh\delta^\alpha \sim \frac{M}{L_M};$$

tak więc amplitudy sił poprzecznych i poprzecznych odkształceń postaciowych są wyznaczone przez M, L_M i G i nie mogą być przyjęte dowolnie.

Niech $\vartheta < 1$ oznacza bezwymiarowy mały parametr porównawczy, którego kwadrat i wyższe potęgi traktujemy jako wielkości pomijalnie małe w stosunku do jedności, $\vartheta^2 \ll 1$. Posługując się tym parametrem, przyjmujemy następujące założenia, umożliwiające wyprowadzenie poszukiwanych w pracy równań:

$$(3.6) \quad h/R \sim \sqrt{12} \vartheta, \quad h\kappa/\gamma \sim \sqrt{12}, \quad L_N/L_M \sim 1, \quad L/L_R \sim \vartheta, \quad L/R \sim \sqrt{g},$$

$$E/G \sim 1, \quad (q^\alpha - b^\alpha_m m^\nu) \sim \sqrt{12} E\gamma\vartheta^{3/2},$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \bar{m}_{|\beta} \sim Eh\gamma\vartheta^{3/2},$$

gdzie $L=L_N=L_M$, a $\varepsilon^{\alpha\beta} \bar{m}_{|\beta}$ jest rotacyjną składową obciążenia m^α . W dalszym ciągu powłoki spełniające warunki (3.6) będziemy skrótowo określać jako powłoki o wolno zmiennych krzywiznach, gdyż to założenie ma charakter kluczowy. Oszacowania (3.6) oznaczają kolejno, że powłoka jest umiarkowanie cienka, panuje w niej zgięciowy stan deformacji — o tej samej długości fali odkształceń błonowych i zginania, zmienność deformacji jest większa od zmienności krzywizny, długość fali deformacji jest mniejsza od charakterystycznego promienia krzywizny, stopień anizotropii jest nieznaczny, a obciążenia styczne i momentowe są odpowiednio małe.

Na podstawie znanego związku geometrycznego

$$(3.7) \quad \varepsilon^{\beta\gamma} v_{\alpha|\beta\gamma} = K\varepsilon_{\gamma\alpha} v^\gamma,$$

w którym K oznacza krzywiznę Gaussa, a v_α jest dowolnym wektorem, stwierdzamy, uwzględniając $\varepsilon_{\gamma\alpha} \sim 1$, że różniczkowanie kowariantne jest przemienne z błędem względnym rzędu $|K|L^2$, który przy założeniu (3.6)₅ oraz $|K| \sim 1/R^2$, wynosi

$$(3.8) \quad |K|L^2 \sim \vartheta,$$

Warunek (3.8) jest słabszą postacią założenia $|K|L^2 \sim \vartheta^2 \ll 1$ stanowiącego podstawę teorii powłok *quasi* połogich [6]. Opierając się na (3.8), będziemy zmieniać porządek różniczkowania kowariantnego w drugorzędnych wyrazach rzędu ϑ , co prowadzi do pomijalnego błędu względnego ϑ^2 .

Powróćmy do założeń (3.6)_{7,8}. Na podstawie równania (2.3)₂ otrzymujemy oszacowanie obciążenia normalnego $q \sim \sqrt{12} E\gamma\vartheta$. Jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że obciążenie momentowe m^α wynika z działania obciążenia stycznego q^α na ramieniu równym grubości powłoki, czyli $m^\alpha \sim \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{m}_{|\beta} \sim q^\alpha h$, to założenia (3.6)_{7,8} można przepisać w postaci

$$q^\alpha/q \sim \sqrt{\vartheta}, \quad q^\alpha/q \sim \sqrt{\vartheta/12}.$$

Warunki te są spełnione, gdy obciążenie styczne jest nieco mniejsze od obciążenia normalnego, co w dźwigarach powierzchniowych ma na ogół miejsce.

Korzystając z założeń (3.6), znajdujemy oszacowanie składników równań równowagi (2.3):

$$(3.9) \quad B^\alpha \sim \frac{Eh\gamma}{L} [O(1) + \underbrace{O(\vartheta)} + \underbrace{O(\vartheta^2)}], \quad B \sim \frac{Eh\gamma}{R} [O(1) + \underbrace{O(\vartheta)}].$$

równań ciągłości (2.2)

$$(3.10) \quad C^\vartheta \sim \frac{\kappa}{L} [O(1) + \underbrace{O(\vartheta)} + \underbrace{O(\vartheta^2)}], \quad C \sim \frac{\kappa}{R} [O(1) + \underbrace{O(\vartheta)}],$$

i równań konstytutywnych (2.5)

$$(3.11) \quad \gamma_{\alpha\beta} \sim \frac{N}{Eh} [O(1) + \underbrace{O(\vartheta)} + \underbrace{O(\vartheta^2)}], \quad M^{\beta\alpha} \sim M^{(\beta\alpha)} \sim D\kappa [O(1) + \underbrace{O(\vartheta)}],$$

gdzie $O(\vartheta)$ oznacza wielkość rzędu ϑ . W istocie, założenia (3.6) zostały tak dobrane, aby oszacowania (3.9)–(3.11) miały miejsce. Zgodnie z tymi oszacowaniami wyrazy podkreślone linią ciągłą, zawierające pochodne krzywizn, mogą być pominięte w równaniach podstawowych. Szereg wyrazów drugorzędnych rzędu ϑ , podkreślonych linią falistą, należy zachować. Wyrazy te uwzględniają wpływ znacznej wyniosłości powłoki oraz wpływ poprzecznych odkształceń postaciowych.

W uzupełnieniu przyjmujemy, że grubość powłoki jest stała a materiał jednorodny.

4. RÓWNANIA ROZWIĄZUJĄCE

Korzystając z przyjętych założeń wyrazimy odkształcenia i siły wewnętrzne za pomocą trzech wielkości: funkcji sił wewnętrznych Φ , funkcji odkształceń Ψ oraz składowej rotacyjnej wektora sił poprzecznych \tilde{Q} . Równania (2.1)₁ i (2.3)₁ spełnimy tożsamościowo, natomiast równania (2.2)₂, (2.3)₂ i (2.4)₁ utworzą układ równań rozwiązujących dla funkcji Φ , Ψ i \tilde{Q} .

Przedstawmy siły błonowe i zmiany krzywizn w postaci następujących sum:

$$(4.1) \quad S^{\beta\alpha} = \tilde{S}^{\beta\alpha} + \bar{S}^{\beta\alpha} + P^{\beta\alpha}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} + \bar{\kappa}_{\alpha\beta}.$$

Aby wyznaczyć składniki powyższych rozkładów, podstawiamy (4.1) do (2.2)₁ i (2.3)₁ i po pominięciu wyrazów podkreślonych linią ciągłą otrzymujemy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{S}^{\beta\alpha}{}_{|\beta} &= 0, & \bar{S}^{\beta\alpha}{}_{|\beta} - 2b_v^\alpha M^{(v\beta)}{}_{|\beta} &= 0, & P^{\beta\alpha}{}_{|\beta} + q^\alpha - b_v^\alpha m^v &= 0, \\ \varepsilon^{\beta n} \varepsilon^{\alpha\varphi} \bar{\kappa}_{\alpha\beta|n} &= 0, & \varepsilon^{\beta n} [\varepsilon^{\alpha\varphi} (\bar{\kappa}_{\alpha\beta|n} + b_\beta^\lambda \gamma_{\lambda\alpha|n}) + \varepsilon^{\alpha\delta} b_\delta^\varphi \gamma_{\alpha\beta|n}] &= 0. \end{aligned}$$

Warunki (4.2) wystarczają do spełnienia (2.2)₁ i (2.3)₁, przy czym residualny błąd względny nie przekroczy wielkości ϑ^2 , jeżeli składniki wzorów (4.1) zostaną wyznaczone z następującą dokładnością:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{S}^{\beta\alpha} &\sim N [1 + O(\vartheta^2)], & \bar{S}^{\beta\alpha} &\sim N\vartheta [1 + O(\vartheta)], & P^{\beta\alpha} &\sim N\vartheta [1 + O(\vartheta)], \\ \bar{\kappa}_{\alpha\beta} &\sim \kappa [1 + O(\vartheta^2)], & \bar{\kappa}_{\alpha\beta} &\sim \kappa\vartheta [1 + O(\vartheta)]. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równań (4.2)_{1,4} można przedstawić za pomocą funkcji Φ i Ψ w postaci

$$(4.4) \quad \bar{S}^{\beta\alpha} = -\varepsilon^{\beta\lambda} \varepsilon^{\alpha\mu} \Phi_{|\mu\lambda} - g^{\alpha\beta} K\Phi, \quad \bar{\kappa}_{\alpha\beta} = -\Psi_{|\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} K\Psi.$$

Podstawiając (4.4)₁ do (4.2)₁ i (4.4)₂ do (4.2)₄, i pamiętając o (3.7), otrzymujemy w obu przypadkach residualny błąd względny rzędu $|K|L^3/L_R$, co przy założeniach (3.6)₄ i (3.8) równa się ϑ^2 . Wyrażenie (4.4)₁ zaproponował ŁUKASIEWICZ [3], uzupełniając wyrazem $K\Phi$ wzór znany dla powłok o małej wyniosłości. KORTER [6] podał wzór (4.4)₂ bez wyrazu $K\Psi$, a więc dla powłok *quasi* pologich. Zauważmy, że wyrażenia (4.4)_{1,2} odpowiadają sobie w sensie analogii statyczno-geometrycznej. Ponadto wyrażenie tensora zmiany krzywizny przez funkcję odkształcenia Ψ uwalnia nas od konieczności ograniczenia stosunku przemieszczeń stycznych do przemieszczenia normalnego, co jest nieuniknione przy korzystaniu z wyrażenia (2.1)₂ zamiast (4.4)₂ i tym samym stosowaniu ugięcia a nie funkcji Ψ jako podstawowej niewiadomej [3].

Z kolei rozwiążemy równanie (4.2)₅, wyrażając w tym celu $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\bar{\kappa}_{\alpha\beta}$ przez Φ . Najpierw ze wzoru (2.5)₁, z pomocą (4.1)₁ i (2.6)₁, znajdziemy

$$(4.5) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{Eh} [(1+\nu) \bar{S}_{\alpha\beta} - \nu g_{\alpha\beta} \bar{S}_{\lambda}^{\lambda}] [1 + O(\vartheta)].$$

Podstawiając (4.5) do (4.2)₅, uwzględniając (4.2)₁ oraz znany związek algebraiczny

$$(4.6) \quad \varepsilon^{\beta n} \varepsilon^{\alpha\varphi} = g^{\beta\alpha} g^{n\varphi} - g^{\beta\varphi} g^{n\alpha},$$

otrzymujemy

$$(4.7) \quad \bar{\kappa}^{\beta\alpha}{}_{|\beta} - \bar{\kappa}_{\beta}^{\beta|\alpha} + \frac{1}{Eh} [2\nu H \bar{S}_{\lambda}^{\lambda|\alpha} - (1+\nu) (b^{\beta\alpha} \bar{S}_{\lambda}^{\lambda|\beta} + b^{\lambda\beta} \bar{S}_{\lambda\beta}^{\lambda|\alpha})] = 0.$$

Pamiętając o (4.2)₁ i (3.6), odgadujemy rozwiązanie powyższego równania w postaci

$$(4.8) \quad \bar{\kappa}^{\beta\alpha} = \frac{1}{Eh} [(1+\nu) (b^{\beta\alpha} \bar{S}_{\lambda}^{\lambda} - g^{\alpha\beta} b^{\delta\lambda} \bar{S}_{\delta\lambda}) - 2Hg^{\alpha\beta} \bar{S}_{\lambda}^{\lambda}] [1 + O(\vartheta)]$$

lub po wykorzystaniu (4.4)₁

$$(4.9) \quad \bar{\kappa}^{\beta\alpha} = \frac{1}{Eh} \{ (1+\nu) [(2Hg^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}) \Delta - g^{\alpha\beta} \Delta_L] + 2Hg^{\alpha\beta} \Delta \} \Phi [1 + O(\vartheta)],$$

gdzie Δ i Δ_L oznaczają inwariantne operatory różniczkowe

$$(4.10) \quad \Delta(\cdot) = (\cdot)|_{\sigma}^{\alpha}, \quad \Delta_L(\cdot) = b^{\alpha\beta}(\cdot)|_{\alpha\beta}.$$

Rozłóżmy wektor sił poprzecznych i obciążeń momentowych na część potencjalną i rotacyjną:

$$(4.11) \quad Q^{\alpha} = Q|_{\alpha}^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha\beta} \tilde{Q}|_{\beta}, \quad m^{\alpha} = m|_{\alpha}^{\alpha} + \varepsilon^{\alpha\beta} \tilde{m}|_{\beta}.$$

Potencjał Q wyrazimy przez Φ i Ψ , natomiast \tilde{Q} wybieramy jako trzecią obok Φ i Ψ podstawową niewiadomą. Podstawiając (4.11) do (2.4)₁, a następnie wykonując na obu stronach otrzymanego równania różniczkowanie $(\cdot)|_{\alpha}$ lub $\varepsilon^{\alpha\beta}(\cdot)|_{\beta}$, mamy

$$(4.12) \quad \Delta(Q - m) = M^{(\beta\alpha)}|_{\beta\alpha}, \quad \Delta(\tilde{Q} - \tilde{m}) = \varepsilon^{\alpha\beta} M_{\alpha}^{\beta}.$$

Z równań tych można wyznaczyć potencjały Q i \tilde{Q} , o ile po prawych stronach da się wyłączyć operator Δ , co umożliwi pominięcie rozwiązań harmoniczych. Bez takiego przekształcenia otrzymujemy [3] równania rozwiązujące dwunastego rzędu, niespójne z pięcioma warunkami brzegowymi teorii Reissnera.

Podstawiając (2.5)₂ do (4.12)₁ znajdziemy

$$(4.13) \quad \Delta(Q - m) = B^{\alpha\beta\lambda\eta} \left(\kappa_{\lambda\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\lambda|\eta} + \frac{1}{2} \delta_{\eta|\lambda} \right) |_{\beta\alpha} + D^{\lambda\eta(\alpha\beta)} \gamma_{\lambda\eta|\beta\alpha}.$$

Zamieniając $\gamma_{\lambda\eta}$ przez (2.5)₁, pamiętając, że $S^{\mu\nu}$ i $\kappa_{\lambda\eta}$ mają rozkłady (4.1), a wyraz z $B^{\alpha\beta\lambda\eta}$ przekształcając za pomocą (2.6)₂ i (4.6), znajdujemy

$$(4.14) \quad \Delta(Q - m) = \left\{ D \left[\Delta(\tilde{\kappa}_{\lambda}^{\lambda} + \tilde{\kappa}_{\lambda}^{\lambda} + \delta^{\lambda}{}_{\lambda}) + (1 - \nu) \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\lambda\mu} \left(\tilde{\kappa}_{\beta\lambda} |_{\mu\alpha} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{\kappa}_{\beta\lambda} |_{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \delta_{\beta|\lambda\mu\alpha} + \frac{1}{2} \delta_{\lambda|\beta\mu\alpha} \right) \right] + D^{\lambda\eta(\alpha\beta)} A_{\lambda\eta\mu\nu} \tilde{S}^{\mu\nu} |_{\beta\alpha} \right\} [1 + O(\vartheta^2)].$$

Podkreślone wyrazy należy odrzucić: pierwszy na mocy (4.2)₄, a pozostałe opierając się na przybliżonej przemienności różniczkowania kowariantnego, por. (3.7) i (3.8). Wyraz $\delta^{\lambda}{}_{\lambda}$ można przedstawić za pomocą Φ , podstawiając (2.5)₄ i (4.1)₁ do (2.3)₂, co daje

$$(4.15) \quad \delta^{\lambda}{}_{\lambda} = -\frac{6}{5Gh} (b_{\alpha\beta} \tilde{S}^{\beta\alpha} + q) [1 + O(\vartheta)].$$

Obecnie wszystkie nieznikające składniki równania (4.14) są znanymi funkcjami od Φ i Ψ . Podstawiając (4.15), a następnie (4.4), (4.9) i (2.6)_{1,3}, zmieniając porządek różniczkowania kowariantnego tak, aby przed całe wyrażenie z prawej strony

otrzymanego równania dał się wyłączyć operator Δ , a następnie odrzucając rozwiązania harmoniczne tego równania, znajdujemy potencjał Q :

$$(4.16) \quad Q = D \left\{ -(\Delta + 2K) \Psi + \frac{2}{Eh} [2H\Delta - (1-\nu) \Delta_L] \Phi + \frac{6}{5Gh} (2H\Delta - \Delta_L) \Phi - \frac{q}{Gh} \right\} + m.$$

Powróćmy do równania (4.12)₂. Wykonując na nim te same przekształcenia, które prowadziły od (4.12)₁ do (4.16), otrzymujemy pierwsze równanie rozwiązujące, dla funkcji \bar{Q} i $\bar{\Phi}$:

$$(4.17) \quad \left(1 - \frac{6(1-\nu)D}{10Gh} \Delta \right) \bar{Q} = -(1-\nu)(3+\nu) \frac{D}{Eh} \Delta_p \bar{\Phi} + \bar{m},$$

gdzie

$$(4.18) \quad \Delta_p () = \varepsilon^{\alpha\nu} b_\alpha^\beta () |_{\beta\nu}.$$

W odróżnieniu od jednorodnego równania Helmholtza, znanego w teorii powłok o małej wylotowości [1, 2], równanie (4.17) jest niejednorodne wskutek uwzględnienia znacznej wylotowości i obciążenia m^α .

Obecnie wyrazimy przez funkcję Ψ wielkość $\bar{S}^{\beta\alpha}$ stanowiącą rozwiązanie równania (4.2)₂. Porównując (4.16) z (4.17) stwierdzamy, że \bar{Q} jest mniejsze od Q , co zezwala na uproszczenie (4.11)₁ do postaci $Q^\alpha = Q|^\alpha [1 + O(\vartheta)]$. Dzięki temu i oszacowaniom (3.11)₂ i (3.6)₈ można także uprościć równanie (2.4)₁, otrzymując

$$(4.19) \quad M^{\beta\alpha} |_\beta = (Q - m)|^\alpha [1 + O(\vartheta)].$$

Mając na uwadze (4.19), możemy sprawdzić, że wielkość

$$(4.20) \quad \bar{S}^{\beta\alpha} = 2b^{\beta\alpha} (Q - m) [1 + O(\vartheta)]$$

stanowi rozwiązanie równania (4.2)₂, a podstawiając (4.16) do (4.20) i upraszczając, wyrażamy $\bar{S}^{\beta\alpha}$ przez Ψ :

$$(4.21) \quad \bar{S}^{\beta\alpha} = -2Db^{\beta\alpha} \Delta \Psi [1 + O(\vartheta)].$$

Składając odpowiednio otrzymane dotychczas wzory można bez trudu znaleźć odkształcenia i siły wewnętrzne jako funkcje Φ , Ψ i \bar{Q} . Końcowe formuły są dosyć skomplikowane, toteż nie będziemy ich wypisywać, poprzestając na odpowiednim komentarzu. I tak symetryczne siły błonowe $S_{\alpha\beta}$ znajdujemy po podstawieniu (4.4)₁ i (4.21) do (4.1)₁ pamiętając, że $P^{\beta\alpha}$ jest całką szczególną równania (4.2)₃ i zależy od konkretnej postaci obciążenia. Tensor zmiany krzywizny $\varkappa_{\alpha\beta}$ otrzymujemy z (4.1)₂ po uwzględnieniu (4.4)₂ i (4.9). Siły poprzeczne Q^α określa wzór (4.11)₁, do którego za Q podstawiamy (4.16). Dzieląc Q^α przez $5/6Gh$ otrzymujemy, zgodnie z (2.5)₄, poprzeczne odkształcenia postaciowe δ^α . Odkształcenia błonowe $\gamma_{\alpha\beta}$ oraz symetryczne i niesymetryczne tensory momentów $M_{(\alpha\beta)}$ i $M_{\alpha\beta}$

znajdujemy z (2.5)₁₋₃, niesymetryczne zaś siły błonowe $N_{\alpha\beta}$ z (2.4)₂. Znając odkształcenia i siły wewnętrzne, można sformułować statyczne i deformacyjne warunki brzegowe dla funkcji Φ , Ψ i \bar{Q} [4,7].

Drugie i trzecie równanie rozwiązujące z funkcjami Φ i Ψ otrzymamy podstawiając do (2.3)₂ i (2.2)₂ odkształcenia i siły wewnętrzne obliczone zgodnie z powyższą instrukcją. Postać poszukiwanych równań znacznie się uprości po takich zmianach kolejności różniczkowania kowariantnego drugorzędnych wyrazów, aby otrzymać operator $\Delta_L A$. Ostatecznie po odrzuceniu małych wyrazów, mamy

$$(4.22) \quad \begin{aligned} & [\Delta A - 2(1-\nu)KA + 4(2-\nu)H^2 A - (1-\nu)\Delta_K] \Psi + \\ & + \left\{ \left(1 - \frac{6D}{5Gh} A \right) (2HA - \Delta_L) + 2HK - \frac{D}{Eh} [4H\Delta A - \right. \\ & \left. - 2(1-\nu)\Delta_L A] \right\} \Phi = \left(1 - \frac{6D}{5Gh} A \right) q + m^\alpha [a + b_{\alpha\beta} P^{\beta\alpha}], \\ & \frac{1}{Eh} [\Delta A + 2(1+\nu)KA + 4(2+\nu)H^2 A - (1-\nu)\Delta_K] \Phi + \\ & + \left\{ -2HA + \Delta_L - 2HK + \frac{D}{Eh} [4(1-\nu)H\Delta A - 2(1-\nu)\Delta_L A_K] \right\} \Psi = \\ & = \frac{1}{Eh} [\Delta P^\alpha_\alpha - (1+\nu)P^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta}], \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.23) \quad \Delta_K () = b^\beta_\alpha b^{\alpha\gamma} ()|_{\beta\gamma}.$$

Równania (4.17) i (4.22) opisują w ramach teorii Reissnera, za pomocą trzech funkcji Φ , Ψ i \bar{Q} , zgięciową deformację izotropowych, wyniosłych powłok o wolno zmiennych krzywiznach pod działaniem obciążeń stycznych, normalnych i momentowych. W porównaniu z opisującymi analogiczne zagadnienie równaniami [3], wprowadziliśmy kilka istotnych zmian i uogólnień. W pracy [3] nie otrzymano równania Helmholtza dla funkcji \bar{Q} , zaliczając siły poprzeczne do podstawowych niewiadomych. Postępowanie takie prowadzi do równań rozwiązujących dwunastego rzędu, niespójnych z pięcioma warunkami brzegowymi teorii Reissnera. Istotną zmianą jest wykorzystanie funkcji odkształceń zamiast ugięcia powłoki stosowanego w [1-3]. Dzięki temu nie musieliśmy ograniczać wielkości stosunku przemieszczeń stycznych do ugięcia. Ponadto przyjęte w [3] założenie $h^2/L^2 \sim \vartheta^2 \ll 1$, osłabiliśmy do postaci $h^2/L^2 \sim \vartheta$, dopuszczając tym samym stany deformacji o większej zmienności, pojawiające się przy obciążeniach lokalnych.

5. POWŁOKI Z MATERIAŁU POPRZECZNIE IZOTROPOWEGO

Niektóre stosowane współcześnie materiały konstrukcyjne charakteryzuje znaczny w porównaniu z jednością stosunek E/G lub, innymi słowy, duża podatność na odkształcenia postaciowe w płaszczyźnie prostopadłej do środkowej powierzchni

powłoki. Równania otrzymane w poprzednim punkcie oparto m.in. na założeniu (3.6)₆, a więc odnoszą się one do powłok izotropowych. Okazuje się jednak, że po zmianie niektórych założeń, można zastosować równania rozwiązujące (4.17) i (4.22) do obliczania powłok z materiału poprzecznie izotropowego, podatnych na poprzeczne odkształcenia postaciowe. Należy przy tym odrzucić w wymienionych równaniach podkreślone wyrazy, które stają się małe. Odpowiednia modyfikacja założeń polega na zastąpieniu warunków (3.6)_{5,6} oszacowaniami

$$(5.1) \quad L/R \sim 1/\sqrt{\vartheta}, \quad E/G \sim 1/\vartheta,$$

przy czym pozostałe warunki (3.6) oraz warunek (3.8) nie ulegają zmianie. Zmodyfikowane założenia opisują zagadnienie zgięciowej deformacji powłok o znacznej wyniosłości i wolno zmiennych krzywiznach, wykonanych z materiału poprzecznie izotropowego o umiarkowanej podatności na poprzeczne odkształcenia postaciowe. Porównując (5.1) z (3.6)_{5,6} widzimy, że wyższy stopień anizotropii można było dopuścić dzięki zwiększeniu długości fali deformacji. Ponadto, oznaczając krzywizny główne powłoki przez R_1 i R_2 , gdzie $R_1 < R_2$, mamy z definicji $R = R_1$ oraz $|K| \sim 1/R_1 R_2$, co, w połączeniu z (3.8) i (5.1)₁, daje warunek

$$(5.2) \quad R_1/R_2 \sim \vartheta^2,$$

oznaczający, że krzywizny główne różnią się znacznie. W klasie powłok o dużej wyniosłości i wolno zmieniających się krzywiznach warunek (5.2) spełniają powłoki walcowe i nieznacznie różniące się od walcowych. Warto przypomnieć, że założenia (3.6) uwzględniają zarówno powłoki walcowe, jak też sferyczne i powłoki o kształcie zbliżonym do wymienionych.

6. UWAGI KOŃCOWE

Praktyczne wykorzystanie wyprowadzonych w pracy równań jest najprostsze, gdy poszukiwane są odkształcenia i siły wewnętrzne przy statycznych lub deformacyjnych warunkach brzegowych. Wyznaczenie przemieszczeń wymaga scałkowania związków kinematycznych (2.1), co uniemożliwia ogólne sformułowanie przemieszczeniowych warunków brzegowych.

Warto podkreślić, że poczynione w pracy uproszczenia oparto na oszacowaniu błędu residualnego w równaniach. Nie gwarantuje to bliskości rozwiązań przybliżonych i dokładnych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Б. Л. Пелех, *Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью*, Наукова думка, Киев 1973.
2. К. З. Галимов, ред., *Теория оболочек в учетом поперечного сдвига*, Казань 1977.
3. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w tarczach, płytach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.
4. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, vol. 4, 1963.
5. P. M. NAGHDI, *A new derivation of the general equations of elastic shells*, Int. J. Eng. Sci., 1, 1963.

6. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., B69 1, 1966.
7. W. PIETRASZKIEWICZ, *Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells*, PWN, Warszawa—Poznań 1979.

Резюме

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ РЕЙССНЕРА ДЛЯ ОБОЛОЧЕК
С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КРИВИЗНАМИ

В работе рассмотрена линейная теория Рейсснера упругих, изотропных и трансверсально изотропных оболочек с медленно изменяющимися кривизнами. Выведены три уравнения для функции результирующих касательных сил, функции деформации, а также функции ротационных составляющих результирующих поперечных сил. В отличие от работ [1, 2] учтены также непологие оболочки. По сравнению с работой [3], не наложены никакие ограничения на величину отношения касательных перемещений к нормальным перемещениям. Учтены также деформации с более короткой длиной волны.

SUMMARY

EQUATIONS OF THE REISSNER THEORY OF SHELLS WITH SLOWLY
VARYING CURVATURES

The paper concerns the linear Reissner theory of elastic isotropic and transversely isotropic shells with slowly varying curvatures. Three equations are derived in terms of a normal force functions a deformation function, and the rotational part of the transverse shear stress resultants. In contrast to [1, 2], non-shallow shells are taken into account. As compared with [3], no assumption is made in regard to the tangential-normal displacement ratio. Also, shorter wave-lengths of the deformation pattern are admitted.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 września 1983 r.
