

## O IDEALNYM KONTAKCIE UKŁADU $N$ PŁYT

BOGDAN R O G O W S K I (ŁÓDŹ)

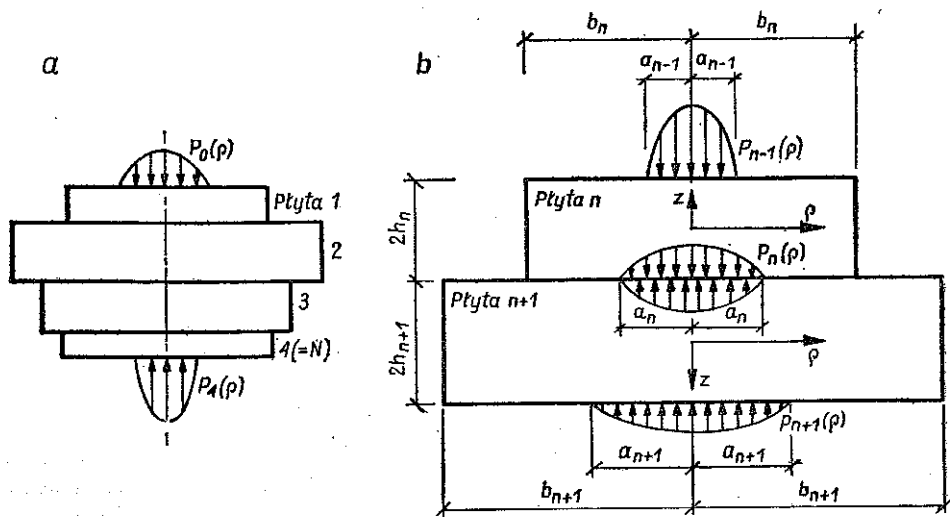
Praca poświęcona jest osiowo symetrycznemu zagadnieniu gładkiego nie połączonego kontaktu. W stanie idealnego kontaktu znajduje się  $N$  kołowych płyt poprzecznie izotropowych, o różnych wymiarach i właściwościach sprężystych. Warunki kontaktu sprowadza się do znalezienia rozwiązań układu równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju, określających poszukiwane wymiary obszarów kontaktu, przemieszczenia i naprężenia kontaktowe. Wskazano na sposób przejścia do rozwiązań przypadków szczególnych, przedstawiono graficznie wyniki numerycznych obliczeń i sformułowano wnioski.

### 1. WSTĘP

Zagadnienia mechaniki kontaktu dwóch ciał, z których jedno lub dwa są sprężyste i izotropowe, ich rozwiązania i bogatą literaturę przedstawił G. M. L. GLADWELL [1]. Kontakt trzech i więcej ciał sprężystych był rozpatrywany w niewielu pracach [2 i 3], a gdy są one anizotropowe, brakuje rozwiązań. Wśród tych zagadnień mamy ważne z punktu widzenia zastosowań w technice, np. kontakt dwóch dociskanych płyt rozdzielonych przekładką [3]. Kontakt cienkiej płyty z poprzecznie izotropową półprzestrzenią rozpatrzył SELVADURAI [4], a kontakt dwóch nieograniczonych ciał poprzecznie izotropowych TURNER [5]. W niniejszej pracy rozpatrzono idealny kontakt układu  $N$  płyt poprzecznie izotropowych.

### 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Osiowo symetryczne zagadnienie kontaktowe, rozpatrzone w pracy, przedstawia rys. 1. W stanie idealnego kontaktu znajduje się  $N$  kołowych płyt poprzecznie izotropowych o parametrach materiałowych  $s_{1n}, s_{2n}, k_n (\alpha_n, \beta_n) = s_{1n} \pm s_{2n} (n=1, 2, \dots, N)$ , modułach ścinania  $G_{1n}$  (w kierunku osi  $z$ ) i  $G_n$  (w płaszczyznach izotropii  $z = \text{const}$ ), grubościach  $h_n$  i promieniach  $b_n$ . Płyty są wzajemnie dociskane za pomocą ciśnień danych na płaszczyznach zewnętrznych układu. Założono, że naprężenia styczne nie występują na powierzchniach kontaktu i kontury płyt  $\rho = b_n$  są wolne od naprężeń. W dalszym ciągu pracy przyjęto lokalne bezwymiarowe współrzędne, parametry geometryczne i ciśnienia:  $\{\rho/h_n, z/h_n, a_n/h_n, b_n/h_n, h_n^2 p_n(\rho)/P\} \rightarrow \{\rho_n, z_n, a_n, b_n, p_n(\rho_n)\}$ , gdzie  $P$  jest wypadkową obciążeń zewnętrznych. Oznaczając przez  $w_n(\rho_n)$  i  $w'_{n+1}(\rho_{n+1})$  osiowe przemieszczenia płyt  $n$  i  $n+1$  oraz przez  $p_n(\rho_n)$  naprężenia kontaktowe na powierzchni kontaktu między tymi płytami (rys. 1b: dwie

Rys. 1. Kształty i kontakt układu  $N$  płyt

dowolne płyty w kontakcie pokazanym na rys. 1a) napiszemy warunki kontaktu w postaci następującej:

$$(2.1) \quad w_n(\rho_n) + w'_{n+1}(\rho_{n+1}) = \delta'_n, \quad 0 \leq \rho_n \leq a_n, \quad n=1, 2, \dots, (N-1)$$

oraz

$$(2.2) \quad p_n(\rho_n) = 0, \quad a_n < \rho_n, \quad n=1, 2, \dots, (N-1),$$

gdzie  $\delta'_n$  jest nieznaną stałą.

Ponadto mamy warunki równowagi

$$(2.3) \quad -2\pi \int_0^{a_n} \rho_n p_n(\rho_n) d\rho_n = 1, \quad n=1, 2, \dots, (N-1)$$

i warunki brzegowe na konturze  $\rho_n = b_n$   $n$ -tej płyty

$$(2.4) \quad \int_{-1}^1 z_n \sigma_{\rho n} dz_n = 0, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Składowe wektora przemieszczenia w każdej płycie  $\mathbf{u}^T = [u, 0, w] = (\text{promieniowa, obwodowa, osiowa})$  zależą od dwóch zmiennych  $\rho, z$  i mogą być znalezione za pomocą superpozycji trzech pól przemieszczeń: symetrycznego ( $u_e, w_e$ ), antysymetrycznego ( $u_b, w_b$ ) względem płaszczyzny środkowej płyty i odpowiadającego rozwiązaniu jednorodnemu w zagadnieniu zginania ( $u_{b0}, w_{b0}$ ), tj.  $u(\rho, z) = u_e + u_b + u_{b0}$ ,  $w(\rho, z) = w_e + w_b + w_{b0}$ . Te zaś znajdziemy z równań [6] następujących:

$$(2.5) \quad 2G_1(k+1) \{s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1\} \times \begin{Bmatrix} Au_e \\ w_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1^2 S_1 \tilde{C}_2 - ks_2^2 S_2 \tilde{C}_1 \\ s_1^2 s_2^2 [S_2 \tilde{S}_1 - kS_1 \tilde{S}_2] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d}{dp}(p^+ + p^-) \\ (p^+ + p^-) \end{Bmatrix}$$

$$(2.6) \quad 2G_1(k+1) \{S_1 C_2 - C_1 S_2\} \begin{Bmatrix} Au_b \\ Aw_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} kC_2 \tilde{S}_1 - C_1 \tilde{S}_2 \\ C_2 \tilde{C}_1 - kC_1 \tilde{C}_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d}{d\rho}(p^- - p^+) \\ (p^- - p^+) \end{Bmatrix};$$

$$(2.7) \quad w_{b0} = A_0(d_0 \rho^2 + 2d_1 z^2), \quad u_{b0} = -2A_0 d_0 z \rho, \\ \sigma_\rho^0 = \sigma_\theta^0 = -2A_0 z G_1(1+d_2), \quad \sigma_z^0 = \sigma_{\rho z}^0 = \sigma_{\rho\theta}^0 = \sigma_{z\theta}^0 = 0,$$

w których

$$(2.8) \quad \tilde{S}_i = \frac{\text{sh}(s_i z \sqrt{-A})}{s_i \sqrt{-A}}, \quad \tilde{C}_i = \text{ch}(s_i z \sqrt{-A}), \quad A = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$$

są liniowymi operatorami różniczkowymi względem  $\rho$ , zależnymi parametrycznie od współrzędnej  $z$  ( $\rho, z$  oznaczają współrzędne wymiarowe), przy czym  $\tilde{S}_i \rightarrow S_i$  i  $\tilde{C}_i \rightarrow C_i$  gdy  $z=h$ ,

$$(2.9) \quad \{d_0; d_1; d_2\} = (c_{11} c_{33} - c_{13}^2)^{-1} \{G_1 c_{33}; G_1 c_{13}; c_{33} c_{12} - c_{13}^2\},$$

są parametrami materiałowymi,  $c_{ij}$  stałymi sprężystości,  $p^+$  ( $\rho$ ) i  $p^-$  ( $\rho$ ) naprężeniami normalnymi na płaszczyznach  $z=h, -h$  oraz  $A_0$  jest stałą, którą wyznaczymy z warunku brzegowego (2.4).

Stosując do powyższych równań transformacje Hankela sprowadzamy warunki następujące: ciągłości przemieszczeń (2.1), swobodnych nie kontaktujących się powierzchni (2.2) i równowagi (2.3) — do postaci następującej:

$$\int_0^\infty p_n(\xi) \left\{ [2-g_{1,n}(\xi) + g_{2,n}(\xi) + \kappa_n(2-g_{1,n+1}(\xi/j_n) + \right. \\ \left. + g_{2,n+1}(\xi/j_n)] J_0(\xi \rho_n) + \frac{3}{2} \frac{C_n}{1+d_{2,n}} (d_{0,n} \rho_n^2 + 2d_{1,n}) N_n(\xi) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{C_{n+1} \kappa_n}{1+d_{2,n+1}} (d_{0,n+1} \rho_n^2 j_n^2 + 2d_{1,n+1}) N_{n+1}(\xi/j_n) \right\} d\xi - \\ - j_{n-1}^{-1} \int_0^\infty p_{n-1}(\xi) \left\{ [g_{1,n}(\xi/j_{n-1}) + g_{2,n}(\xi/j_{n-1})] J_0(\xi \rho_{n-1}) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{C_n}{1+d_{2,n}} (d_{0,n} \rho_{n-1}^2 j_{n-1}^2 + 2d_{1,n}) N_n(\xi/j_{n-1}) \right\} d\xi - \\ - j_n \kappa_n \int_0^\infty p_{n+1}(\xi) \left\{ [g_{1,n+1}(\xi) + g_{2,n+1}(\xi)] J_0(\xi \rho_{n+1}) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{C_{n+1}}{1+d_{2,n+1}} (d_{0,n+1} \rho_{n+1}^2 + 2d_{1,n+1}) N_{n+1}(\xi) \right\} d\xi = \delta_n, \\ 0 \leq \rho_n \leq a_n, \quad n=1, 2, \dots, (N-1),$$

$$(2.10) \quad p_n(\rho_n) = \int_0^\infty \xi p_n(\xi) J_0(\xi \rho_n) d\xi = 0, \quad a_n < \rho_n, \quad n=1, 2, \dots, (N-1), \\ -2\pi a_n \int_0^\infty p_n(\xi) J_1(a_n \xi) d\xi = 1, \quad n=1, 2, \dots, (N-1),$$

gdzie

$$(2.11) \quad g_{i,n}(\xi) = [\alpha_n \beta_n^{-1} \operatorname{sh} \beta_n \xi + \operatorname{ch} \beta_n \xi + (-1)^i e^{-\alpha_n \xi}] \times \\ \times [\operatorname{sh} \alpha_n \xi - (-1)^i \alpha_n \beta_n^{-1} \operatorname{sh} \beta_n \xi]^{-1}, \quad i=1, 2,$$

$$N_n(\xi) = N(d_{i,n}; b_n; \alpha_n; \beta_n; \xi) = \xi^{-1} J_0(b_n \xi) + [\operatorname{sh} \alpha_n \xi - \\ - \alpha_n \beta_n^{-1} \operatorname{sh} \beta_n \xi]^{-1} [\xi d_{3,n} (\operatorname{ch} \alpha_n \xi + \operatorname{ch} \beta_n \xi) + d_{4,n} \beta_n^{-1} \operatorname{sh} \beta_n \xi - \\ - d_{5,n} \operatorname{sh} \alpha_n \xi] b_n^{-1} \xi^{-2} J_1(b_n \xi),$$

są funkcjami parametru transformacji  $\xi$ , zależnymi od parametrów materiałowych i geometrycznych oraz gdzie

$$(2.12) \quad C_n = (k_n + 1)(k_n - 1)^{-1} (s_{2,n}^{-1} - s_{1,n}^{-1}), \quad \{\alpha_n, \beta_n\} = s_{1,n} \pm s_{2,n}, \\ \alpha_n = G_{1,n} C_n / G_{1,n+1} C_{n+1}, \\ \{d_{3,n}; d_{4,n}; d_{5,n}\} = \frac{2}{k_n + 1} \cdot \frac{G_n}{G_{1,n}} \left\{ \frac{s_{1,n}^2 - k_n s_{2,n}^2}{s_{1,n} - s_{2,n}}; \frac{s_{1,n}^3 + k_n s_{2,n}^3}{s_{1,n} s_{2,n}}; \right. \\ \left. \frac{s_{1,n}^3 - k_n s_{2,n}^3}{(s_{1,n} - s_{2,n}) s_{1,n} s_{2,n}} \right\}, \\ j_n = h_n / h_{n+1}$$

są odpowiednio parametrami materiałowymi i geometrycznymi. Ponadto  $p_n(\xi)$ ,  $p_{n-1}(\xi)$ ,  $p_{n+1}(\xi)$  są odpowiednio transformatami Hankela zerowego rzędu naprężeń kontaktowych  $p_n(\rho_n)$ ,  $p_{n-1}(\rho_{n-1})$ ,  $p_{n+1}(\rho_{n+1})$  na płaszczyznach  $z_n = -1, 1$ ,  $z_{n+1} = 1$ , odpowiednio,  $J_0(\cdot)$ ,  $J_1(\cdot)$  są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju i  $\delta_n$  nieznanymi stałymi.

Zagadnienie kontaktu  $N$  płyt opisano w postaci układu  $(N-1)$  dualnych równań całkowych względem  $(N-1)$  funkcji — transformat naprężeń kontaktowych.  $2(N-1)$  niewiadomych, promieni obszarów kontaktów  $a_n$  i stałych  $\delta_n$  wyznaczymy z układu  $2(N-1)$  równań o postaci (2.10)<sub>3</sub> i  $p_n(a_n) = 0$ . Przemieszczenie na powierzchni kontaktu między płytami  $n$  i  $n+1$  określa wzór

$$(2.13) \quad w_n(\rho_n) = -\frac{P}{2G_{1,n} C_n h_n} \int_0^\infty \{ [p_n(\xi) + p_{n-1}(\xi)] [1 - g_{1,n}(\xi)] + \\ + [p_n(\xi) - p_{n-1}(\xi)] [1 + g_{2,n}(\xi)] \} J_0(\xi \rho_n) d\xi + A_{0n} h_n^2 (d_{0,n} \rho_n^2 + 2d_{1,n}),$$

w którym stałe  $A_{0n}$  wyznaczone z warunków (2.4) wynoszą

$$(2.14) \quad A_{0n} = \frac{3P}{4(1+d_{2,n}) h_n^3 G_{1,n}} \int_0^\infty [p_{n-1}(\xi) - p_n(\xi)] N_n(\xi) d\xi.$$

### 3. RÓWNANIA CAŁKOWE FREDHOLMA

Wprowadzając reprezentację całkową

$$(3.1) \quad p_n(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{a_n} \varphi_n(t) \cos \xi t dt,$$

spełniamy tożsamościowo równania (2.10)<sub>2</sub> i otrzymujemy

$$(3.2) \quad p_n(\rho_n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\varphi_n(a_n)}{\sqrt{a_n^2 - \rho_n^2}} - \int_{\rho_n}^{a_n} \frac{d\varphi_n(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 - \rho_n^2}} dt \right].$$

W zagadnieniu gładkiego, nie połączanego kontaktu naprężenia muszą być równe zeru na brzegach  $\rho_n = a_n$  obszarów kontaktu. Te warunki i zależności (3.2) prowadzą do równań

$$(3.3) \quad \varphi_n(a_n) = 0, \quad n=1, 2, \dots, (N-1).$$

Podstawiając (3.1) do równań (2.10)<sub>3</sub>, otrzymujemy

$$(3.4) \quad -4 \int_0^{a_n} \varphi_n(t) dt = 1, \quad n=1, 2, \dots, (N-1).$$

Wprowadzając dla  $p_{n-1}(\xi)$  i  $p_{n+1}(\xi)$  reprezentacje całkowe analogiczne do (3.1), podstawiając je do równań (2.10)<sub>1</sub>, uwzględniając wzór

$$(3.5) \quad p_n(\xi) - p_{n-1}(\xi) = [p_n(\xi) + 1/2\pi] - [p_{n-1}(\xi) + 1/2\pi] = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{a_n} \varphi_n(t) (\cos \xi t - 1) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^{a_{n-1}} \varphi_{n-1}(t) (\cos \xi t - 1) dt,$$

wynikający z zależności (3.1) i (3.4) oraz wykorzystując tożsamości

$$(3.6) \quad \int_0^{\infty} \sin(\lambda \xi) J_0(\xi \rho) d\xi = \frac{H(\lambda - \rho)}{\sqrt{\lambda^2 - \rho^2}}, \quad \int_0^{\infty} \cos(\lambda \xi) J_0(\xi \rho) d\xi = \frac{H(\rho - \lambda)}{\sqrt{\rho^2 - \lambda^2}}, \\ J_0(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\rho \sin \theta) d\theta, \quad \rho^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2(\rho \sin \theta)^2 d\theta,$$

redukujemy warunki kontaktu (2.10)<sub>1,2</sub> do następującego układu równań:

$$(3.7) \quad \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} d\theta \left[ \varphi_n(\rho_n \sin \theta) + \int_0^{a_n} K_n(\rho_n \sin \theta, x) \varphi_n(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{a_{n-1}} K'_{n-1}(\rho_{n-1} \sin \theta, x) \varphi_{n-1}(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{a_{n+1}} K''_{n+1}(\rho_{n+1} \sin \theta, x) \varphi_{n+1}(x) dx \right] \right\} = f_n(\rho_n) + \delta_n, \\ 0 \leq \rho_n \leq a_n, \quad n=1, 2, \dots, (N-1).$$

Oznaczając przez  $\Phi_n(\rho_n \sin \theta)$  funkcję zmiennej  $\theta$  występującą po lewej stronie tych równań, napiszemy je w postaci

$$(3.8) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi_n(\rho_n \sin \theta) d\theta = f_n(\rho_n) + \delta_n, \quad 0 \leq \rho_n \leq a_n.$$

Rozwiązanie równania (3.8) ma postać

$$(3.9) \quad \Phi_n(t) = \delta_n + t \int_0^{\pi/2} f_n'(t \sin \theta) d\theta, \quad f_n'(\rho) = df_n(\rho)/d\rho.$$

Tak więc warunek ciągłości (2.10)<sub>1</sub> jest spełniony, gdy funkcja  $\varphi_n(t)$  jest rozwiązaniem następującego równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju:

$$(3.10) \quad \varphi_n(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^{a_n} K_n(t, x) \varphi_n(x) dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{a_{n-1}} K'_{n-1}(t, x) \varphi_{n-1}(x) dx + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{a_{n+1}} K''_{n+1}(t, x) \varphi_{n+1}(x) dx = \Phi_n(t), \quad 0 \leq t \leq a_n, \quad n=1, 2, \dots, (N-1),$$

z prawą stroną daną za pomocą wzoru (3.9), w którym

$$(3.11) \quad f_1(\rho_1) = \frac{1}{2(1+\kappa_1)} \left[ \int_0^\infty \left[ p_0(\xi) g_{1,1}(\xi) + \left\{ p_0(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} g_{2,1}(\xi) \right] J_0(\xi \rho_1) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{(d_{0,1} \rho_1^2 + 2d_{1,1}) C_1}{1+d_{2,1}} \int_0^\infty \left\{ p_0(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} N_1(\xi) d\xi \right], \\ f_{N-1}(\rho_{N-1}) = \frac{j_{N-1} \kappa_{N-1}}{2(1+\kappa_{N-1})} \left[ \int_0^\infty \left[ p_N(\xi) g_{1,N}(\xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left\{ p_N(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} g_{2,N}(\xi) \right] J_0(j_{N-1} \rho_{N-1} \xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{(d_{0,N} \rho_{N-1}^2 j_{N-1}^2 + 2d_{1,N}) C_N}{1+d_{2,N}} \int_0^\infty \left\{ p_N(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} N_N(\xi) d\xi \right], \\ f_n(\rho_n) = 0, \quad n=2, 3, \dots, (N-2).$$

Dla  $N=2$

$$(3.11') \quad f_1(\rho_1) = \frac{1}{2(1+\kappa_1)} \left[ \int_0^\infty \left\{ \left[ p_0(\xi) g_{1,1}(\xi) + \left\{ p_0(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} g_{2,1}(\xi) \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times J_0(\xi \rho_1) + j_1 \kappa_1 \left[ p_2(\xi) g_{1,2}(\xi) + \left\{ p_2(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} g_{2,2}(\xi) \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times J_0(\xi \rho_1 j_1) + \frac{3}{2} \frac{C_1(\rho_1^2 d_{0,1} + 2d_{1,1})}{1+d_{2,1}} \left\{ p_0(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} N_1(\xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} \frac{j_1 \kappa_1 C_2(d_{0,2} \rho_1^2 j_1^2 + 2d_{1,2})}{1+d_{2,2}} \left\{ p_2(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} N_2(\xi) \right\} d\xi \right],$$

oraz z jądrami zdefiniowanymi następująco:

$$(3.12) \quad K_n(t, x) = \frac{1}{2(1+\kappa_n)} \left[ - \int_0^\infty \{ g_{1,n}(\xi) + \kappa_n g_{1,n+1}(\xi)/j_n \} \cos(\xi x) \cos(\xi t) d\xi + \right.$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & + \int_0^{\infty} \{g_{2,n}(\xi) + \kappa_n g_{2,n+1}(\xi/j_n)\} (\cos \xi x - 1) (\cos \xi t - 1) d\xi + \\ & \quad + 3 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{C_n (d_{0,n} t^2 + 2d_{1,n})}{1+d_{2,n}} N_n(\xi) + \right. \\ & \quad \left. + \kappa_n \frac{C_{n+1} (d_{0,n+1} t^2 j_n^2 + 2d_{1,n+1})}{1+d_{2,n+1}} N_{n+1}(\xi) \right\} (\cos \xi x - 1) d\xi, \\ & \quad n=1, 2, \dots, (N-1), \end{aligned}$$

$$K'_{n-1}(t, x) = -\frac{j_{n-1}^{-1}}{2(1+\kappa_n)} \left[ \int_0^{\infty} g_{1,n}(\xi/j_{n-1}) \cos(\xi x) \cos(\xi t) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} g_{2,n}(\xi/j_{n-1}) (\cos \xi x - 1) (\cos \xi t - 1) d\xi + \right. \\ \left. + 3 \frac{C_n (d_{0,n} t^2 j_{n-1}^2 + 2d_{1,n})}{1+d_{2,n}} \int_0^{\infty} N_n(\xi/j_{n-1}) (\cos \xi x - 1) d\xi \right], \\ n=2, 3, \dots, (N-1),$$

$$K''_{n+1}(t, x) = -\frac{j_n \kappa_n}{2(1+\kappa_n)} \left[ \int_0^{\infty} g_{1,n+1}(\xi) \cos(\xi x) \cos(\xi t) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} g_{2,n+1}(\xi) (\cos \xi x - 1) (\cos \xi t - 1) d\xi + \right. \\ \left. + 3 \frac{C_{n+1} (d_{0,n+1} t^2 + 2d_{1,n+1})}{1+d_{2,n+1}} \int_0^{\infty} N_{n+1}(\xi) (\cos \xi x - 1) d\xi \right], \\ n=1, 2, \dots, (N-2).$$

Równania całkowe Fredholma (3.10)–(3.12) z warunkami (3.3) i (3.4) obejmują ogólne zagadnienie kontaktu  $N$  różnych płyt anizotropowych w kierunku poprzecznym. Wskażemy na niektóre przypadki szczególne lub graniczne omawianego zagadnienia.

(a) *Kontakt dwóch płyt*

Opisany jest równaniami

$$(3.13) \quad \varphi_1(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^{a_1} K_1(t, x) \varphi_1(x) dx = \Phi_1(t), \quad 0 \leq t \leq a_1$$

oraz

$$(3.14) \quad \varphi_1(a_1) = 0, \quad -4 \int_0^{a_1} \varphi_1(t) dt = 1,$$

w których jądro  $K_1(t, x)$  określa wzór (3.12)<sub>1</sub> dla  $n=1$  i prawa strona, określona za pomocą wzorów (3.9) dla  $n=1$  i (3.11)', dla  $N=2$  może być przekształcona do postaci

$$(3.15) \quad \Phi_1(t) = \delta_1 - \frac{1}{2(1+\kappa_1)} \left\{ \int_0^\infty \left\{ p_0(\xi) g_{1,1}(\xi) + \left( p_0(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right) g_{2,1}(\xi) \right\} \times \right. \\ \times (1 - \cos \xi t) d\xi + j_1 \kappa_1 \int_0^\infty \left\{ p_2(\xi) g_{1,2}(\xi) + \left( p_2(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right) g_{2,2}(\xi) \right\} \times \\ \times (1 - \cos \xi t) d\xi - 3t^2 \left[ \frac{C_1 d_{0,1}}{1+d_{2,1}} \int_0^\infty \left\{ p_0(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} N_1(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + j_1^3 \kappa_1 \frac{C_2 d_{0,2}}{1+d_{2,2}} \int_0^\infty \left\{ p_2(\xi) + \frac{1}{2\pi} \right\} N_2(\xi) d\xi \right] \Bigg\}.$$

Przyjmując w równaniach zagadnienia kontaktu dwóch płyt  $j_1 = h_1/h_2 = 0$  i  $g_{1,2}(\xi/j_1) = 0$ , otrzymujemy równania kontaktu płyty z półprzestrzenią, a rozpatrując przypadek graniczny  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $N_n(\cdot) = 0$  — równania kontaktu warstw lub warstwy z półprzestrzenią.

(b) *Kontakt płyt cienkich*

Przyjmując dla małych  $h_n$  wzory aproksymacyjne

$$(3.16) \quad g_{1,n} \approx 1, \quad g_{2,n} \approx 12 [\alpha_n (\alpha_n^2 - \beta_n^2) \xi^3]^{-1} - 1, \\ \bar{N}_n(\xi) = \xi^{-1} J_0(b_n \xi) + 6 [\alpha_n (\alpha_n^2 - \beta_n^2) \xi^4]^{-1} [2d_{3,n} + d_{4,n} - d_{5,n} \alpha_n + \\ + \frac{1}{6} \xi^3 (3d_{3,n} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) + \beta_n^2 d_{4,n} - \alpha_n^3 d_{5,n})] b_n^{-1} J_1(b_n \xi),$$

otrzymujemy równania zagadnienia kontaktu ciał wśród których  $n$ -ta płyta jest cienka. Na przykład równania kontaktu półprzestrzeni z płytą cienką, przy uwzględnieniu jej zginania, w przypadku obciążenia skupionego ( $p_0(\xi) = -1/2\pi$ ) są postaci (3.13) i (3.14), w których

$$(3.17) \quad K_1(t, x) = \frac{6}{\alpha_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \kappa_1} \int_0^\infty (\cos \xi x - 1) (\cos \xi t - 1) \xi^{-3} d\xi + \\ + \frac{3}{2} \cdot \frac{C_1 (d_{0,1} t^2 + 2d_{1,1})}{(1+d_{2,1}) \kappa_1} \int_0^\infty \bar{N}_1(\xi) (\cos \xi x - 1) d\xi,$$

$$\Phi_1(t) = \delta_1.$$

Dla warstwy  $\bar{N}_1(\cdot) = 0$ , równania te można przekształcić do postaci

$$(3.18) \quad \varphi_1(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda_1} K_1(t, x) \varphi_1(x) dx = \delta_1, \quad 0 \leq t \leq \lambda_1 = a_1/l_0, \\ K_1(t, x) = \int_0^\infty \xi^{-3} (\cos \xi x - 1) (\cos \xi t - 1) d\xi, \\ \varphi_1(\lambda_1) = 0, \quad -4 \int_0^{a_1} \varphi_1(t) dt = 1, \quad l_0 = h_1 \sqrt[3]{\frac{1}{6} \alpha_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) G_{1,1} C_1 / G_{1,2} C_2}.$$

Tu zależność promienia obszaru kontaktu od anizotropii materiałów określa wzór  $a_1 = \lambda_1 l_0$ , gdzie  $\lambda_1$  jest stałą.



## (c) Rozwiązania przy założeniu pełnego kontaktu warstw

Pomijając zagadnienie ścisłego wyznaczenia promieni obszarów kontaktu możemy otrzymać z warunków (2.10) rozwiązanie przybliżone. Przyjmując  $0 \leq \rho_n < \infty$ ,  $N_n(\cdot) = 0$  i stosując do równań (2.10)<sub>1</sub> transformację Hankela wyznaczymy  $p_n(\xi)$  za pomocą  $p_{n-1}(\xi)$  i  $p_{n+1}(\xi)$ . W przypadku dwóch warstw w kontakcie przy obciążeniu siłami skupionymi otrzymujemy wówczas wzory następujące:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & 2\pi h_1^2 p_1(\rho)/P = \\ & = - \int_0^\infty \xi \frac{g_{1,1}(\xi) + g_{2,1}(\xi) + \kappa_1 \{g_{1,2}(\xi/j_1) + g_{2,2}(\xi/j_1)\}}{2 - g_{1,1}(\xi) + g_{2,1}(\xi) + \kappa_1 \{2 - g_{1,2}(\xi/j_1) + g_{2,2}(\xi/j_1)\}} J_0\left(\frac{\xi}{h_1} \rho\right) d\xi, \\ & 2\pi h_1 G_{1,2} C_2 w_1(\rho)/P = \\ & = - \int_0^\infty \frac{[1 - g_{1,1}(\xi)] [1 + g_{2,2}(\xi/j_1)] - [1 + g_{2,1}(\xi)] [1 - g_{1,2}(\xi/j_1)]}{2 - g_{1,1}(\xi) + g_{2,1}(\xi) + \kappa_1 \{2 - g_{1,2}(\xi/j_1) + g_{2,2}(\xi/j_1)\}} \times \\ & \quad \times J_0\left(\frac{\xi}{h_1} \rho\right) d\xi, \end{aligned}$$

z przypadkami granicznymi  $j_1 = 0$ , tj.  $g_{i,2}(\xi/j_1) = 0$  (ciało 2-półprzestrzeń) w obszarze kontaktu warstwy cienkiej z grubą lub z półprzestrzenią. W przypadku kontaktu warstwy cienkiej z półprzestrzenią równania (3.19) przyjmują postać

$$(3.20) \quad \begin{aligned} & \frac{2\pi l_0^2}{P} p_1(\rho) = - \int_0^\infty \frac{\xi}{1 + \xi^3} J_0\left(\frac{\rho}{l_0} \xi\right) d\xi, \\ & \frac{2\pi l_0 G_{1,2} C_2}{P} w_1(\rho) = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \xi^3} J_0\left(\frac{\rho}{l_0} \xi\right) d\xi \end{aligned}$$

i określają

$$(3.21) \quad \begin{aligned} & p_{1 \max}(0) = -P/3 \sqrt{3} l_0^2, \quad w_{1 \max}(0) = -P/6 \sqrt{3} G_{1,2} C_2 l_0, \\ & \tilde{a}_1 = \lambda l_0, \quad \text{gdzie } \lambda \int_0^\infty \xi (1 + \xi^3)^{-1} J_0(\lambda \xi) d\xi = 0, \end{aligned}$$

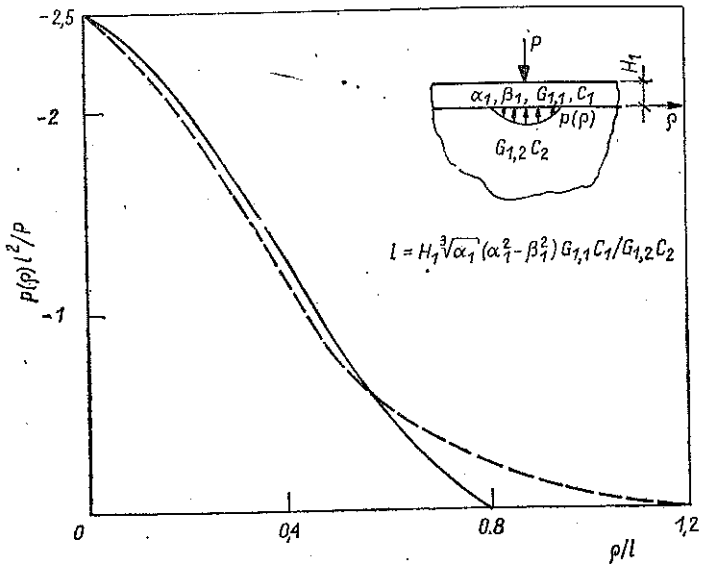
maksymalne naprężenie kontaktowe i przemieszczenie oraz promień obszaru kontaktu  $\tilde{a}_1$ , gdzie  $l_0$  określa wzór (3.18).

Gdy  $n$ -ta płyta w układzie jest izotropowa należy we wzorach (2.11)<sub>1</sub> i (2.12)<sub>1</sub> wykonać przejście graniczne  $s_{1,n} \rightarrow s_{2,n} \rightarrow 1$  ( $\alpha_n = 2$ ,  $\beta_n \rightarrow 0$ ),  $k_n \rightarrow 1$ . Wówczas  $C_n \rightarrow (1 - \nu_n)^{-1}$ ,  $d_{i,n} \rightarrow \{\frac{1}{2}(1 - \nu_n), \frac{1}{2}\nu_n; \nu_n; 2\nu_n; 2; 1 + 2\nu_n\}$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ),  $\beta_n^{-1} \text{sh } \beta_n \xi \rightarrow \xi$  i funkcje  $g_{i,n}(\xi)$  nie zależą od właściwości sprężystych materiału, a  $N_n(\xi)$  zależy od współczynnika Poissona.

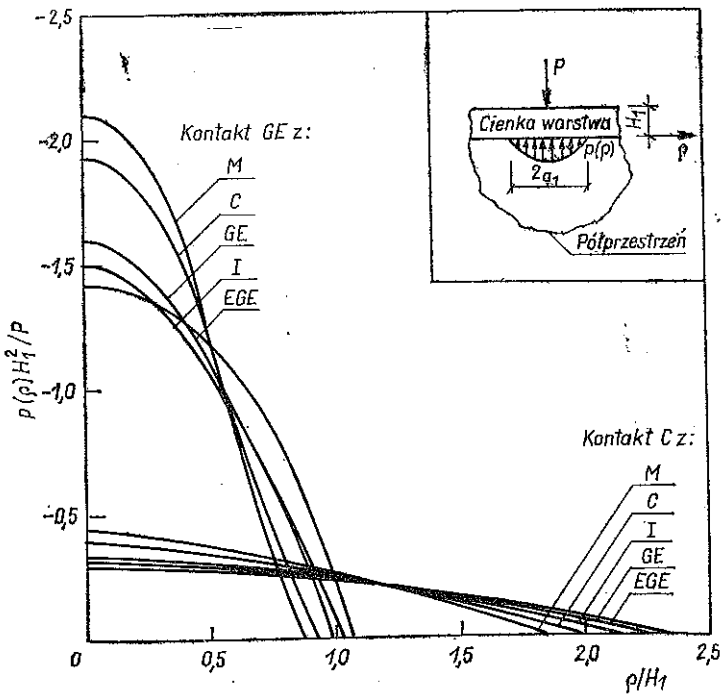
## 4. PRZYKŁADY LICZBOWE I WNIOSKI

Rysunek 2, otrzymany z rozwiązań równań (3.18) (linie ciągłe) i (3.20) (linie przerywane), przedstawia rozkład naprężeń kontaktowych między cienką warstwą i półprzestrzenią. Rysunek 3 otrzymany za pomocą rozwiązań równań (3.18), przed-

stawia naprężenia kontaktowe dla różnych wariantów materiałów w kontakcie, mianowicie kadmu (C), magnezu (M), porównawczego izotropowego I:  $G_1 = 10^4 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,30$ ) i kompozytów epoksydowych zbrojonych włóknami szklanymi



Rys. 2. Rozkłady naprężeń kontaktowych



Rys. 3. Rozkłady naprężeń kontaktowych

(EGE) i grafitowymi (GE). Rozpatrując kontakt dwóch identycznych warstw o grubościach  $H_1$  otrzymano promień płaskiego obszaru kontaktu:  $a_1/H_1=1,37$  (C), 1,10 (M), 1,09 (I), 0,91 (EGE), 0,69 (GE), przy czym wartość odpowiadająca izotropii nie zmienia się przy zmianie i zróżnicowaniu własności sprężystych warstw.

Z budowy równań kontaktu dwóch ciał wynikają następujące wnioski:

(a) W zagadnieniu kontaktu dwóch warstw o równych grubościach, parametrach materiałowych  $\alpha$  i  $\beta$  (np. dla izotropii) i tym samym obciążeniu, parametr  $\kappa_1$  znika w równaniach (3.12)<sub>1</sub> i (3.15). Oznacza to, że promień obszaru kontaktu i naprężenia kontaktowe są wówczas niezależne od stosunku  $G_{1,1}/G_{1,2}$  i powierzchnie kontaktu są płaskie dla każdej wartości tego stosunku, gdyż są płaskie odpowiednio w przypadkach  $G_{1,1}/G_{1,2}=0, 1, \infty$ .

(b) W zagadnieniu kontaktu dwóch warstw o różnych grubościach przy tych samych obciążeniach i parametrach materiałowych  $\alpha$  i  $\beta$  promień obszaru kontaktu odpowiadające granicznym stosunkom sztywności  $\kappa_1=0, \infty$  spełniają następujące równanie

$$\left(\frac{a_1}{h_1}\right)_{\kappa_1=\infty} = \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{a_1}{h_1}\right)_{\kappa_1=0}$$

Krzywe  $a_1/h_1(\kappa_1, h_2/h_1)$  przyjmują tę samą wartość dla  $\kappa_1=0$  niezależnie od  $h_2/h_1$ , rosną monotonicznie ze wzrostem  $\kappa_1$  lub przyjmują stałe wartości dla  $h_2/h_1=1$ , dążą do  $(h_2/h_1)(a_1/h_1)_{\kappa_1=0}$ , gdy parametr materiałowy  $\kappa_1 \rightarrow \infty$ . Promień obszaru kontaktu rośnie ze wzrostem stosunku  $h_2/h_1$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. M. L. GLADWELL, *Contact problems in the classical theory of elasticity*, Noordhoff, Leyden 1980.
2. T. AIHARA, *On the axisymmetric problem of elastic contact between smooth circular plates*, Bull. JSME, 22, 166, 483—490, 1979.
3. Y. MINAKUCHI, T. KOIZUMI, S. THIBUYA, K. TAKAKUDA, *Contact stresses in two elastic slabs and a sandwiched solid metal flat gasket*, Bull. JSME, 25, 207, 1359—1365, 1982.
4. A. P. S. SELVADURAI, *Elastic contact between a flexible circular plate and transversely isotropic half space*, Int. J. Solids Struct., 16, 167—176, 1980.
5. J. R. TURNER, *Contact on a transversely isotropic half spaces or between two transversely isotropic bodies*, Int. J. Solids Struct., 16, 409—419, 1980.
6. B. ROGOWSKI, *O strukturze rozwiązań w zagadnieniach płyt ortotropowych*, Mech. Teor. Stos., 13, 3, 421—431, 1975.

#### Резюме

#### ОБ ИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ СИСТЕМЫ N ПЛИТ

Работа посвящена осесимметричной задаче гладкого, не соединенного контакта. В состоянии идеального контакта находятся  $N$  круговых поперечно изотропных плит, с разными размерами и упругими свойствами. Условия контакта сводятся к нахождению решений

системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, определяющих искомые размеры областей контакта, перемещения и контактные напряжения. Указан способ перехода к частным случаям, графически представлены результаты численных расчетов и сформулированы выводы.

#### SUMMARY

#### ON A PERFECT CONTACT BETWEEN A SET OF $N$ PLATES

The paper deals with the axisymmetric frictionless, unbonded contact problem.  $N$  transversely isotropic, circular plates of different dimensions and different elastic properties remain in perfect contact with each other. The contact conditions are reduced to the solution of a set of Fredholm integral equations of second kind; the contact region, stresses and displacements are found. The method of deriving the solutions of particular cases is shown, numerical results are presented graphically, and general conclusions are formulated.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 czerwca 1983 r.*

---