

NUMERYCZNA ANALIZA DWUTEOWYCH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH RAM PŁASKICH Z UWZGLĘDNIENIEM WYBOCZENIA ŚRODNIKÓW

CZĘŚĆ I. PODSTAWY ANALIZY ORAZ ANALIZA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA

JACEK BAUER, MICHAŁ KLEIBER I WŁODZIMIERZ SOSNOWSKI
(WARSZAWA)

W pracy przedstawiono podstawy numerycznej analizy płaskich ram dwuteowych z uwzględnieniem efektów niesprężystych oraz wybozczeniowych. Rozpatrzono ramy złożone z dowolnie usytuowanych na płaszczyźnie belek dwuteowych o różnych półkach. Problem rozwiązano stosując metodę elementów skończonych. Efekty niesprężyste uwzględniono zakładając sprężysto-idealnie plastyczny model materiału oraz koncentrację stref plastycznych w przywęzłowych przekrojach belek. Ze względu na założone geometryczne charakterystyki układu oraz rozpatrywane obciążenia uwzględniono interakcję trzech sił wewnętrznych: momentu zginającego, siły podłużnej oraz siły poprzecznej. Wymagało to określenia odpowiednich warunków stanu granicznego w przestrzeni sił uogólnionych. Efekty wybozczeniowe uwzględniono dopuszczając możliwość sprężystego lub sprężysto-plastycznego wybozczenia środników belek, analizując szczegółowo powybozczeniową nośność elementów.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- A pole przekroju poprzecznego belki,
- B macierz definiująca związki pomiędzy składowymi sił wewnętrznymi działającymi w przekrojach przywęzłowych oraz wektorem sił węzłowych,
- b efektywna szerokość strefy rozciąganej środnika po sprężystym wybozczeniu spowodowanym ściskaniem i zginaniem,
- C macierz definiująca związki pomiędzy składowymi sił wewnętrznymi działającymi w przekrojach przywęzłowych oraz wektorem przyrostu przemieszczenia,
- c efektywna szerokość środnika po obydwu jego stronach po sprężystym wybozczeniu spowodowanym ściskaniem.
- D sztywność zginania środnika $D = \frac{Et_s^3}{12(1-\nu^2)}$,
- E moduł Younga,

- c odległość pomiędzy środkiem wysokości środkika i osią obojętną przekroju dwuteowego,
 $F = 0$ równanie definiujące warunek wytrzymałościowy
 \bar{F} siła ściskająca działająca w półce,
 G moduł Kirchoffa, równy $E/[2(1+\nu)]$,
 H macierz definiująca związki pomiędzy macierzą sztywności elementu skończonego i jej podmacierzami,
 h wysokość (przekroju, półki, środknika odpowiednia do indeksu),
 I moment bezwładności,
 k macierz sztywności elementu, podmacierz,
 K macierz globalnej sztywności układu (ramy),
 L długość elementu skończonego,
 M moment zginający,
 m bezwymiarowy moment zginający,
 N siła wzdłużna,
 n bezwymiarowa siła wzdłużna,
 P obciążenie ciągle działające na półkę i pochodzące od strefy rozciągania w środkniku,
 Q wektor wewnętrznych sił uogólnionych,
 q wektor przemieszczeń węzłowych,
 R wektor obciążeń,
 r wektor przemieszczeń elementu,
 t grubość płyty,
 u przemieszczenie osiowe,
 V siła tnąca,
 v bezwymiarowa siła tnąca,
 w przemieszczenie spowodowane ściskaniem,
 x, y, z współrzędne prostokątne,
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kąty, współczynniki liczbowe,
 ε odkształcenie względne,
 λ parametr skalujący,
 ν współczynnik Poissona,
 ϱ kąt obrotu przekroju przywęzłowego,
 φ wektor gradientów funkcji F ,
 μ mnożnik w stowarzyszonym prawie płynięcia lub w prawie rządzącym zachowaniem się elementu po osiągnięciu wytrzymałości krańcowej,
 σ naprężenie normalne,
 τ naprężenie styczne,
 ω przemieszczenie w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy wywołane wyboczeniem.

INDEKSY, OZNACZENIA SPECJALNE-

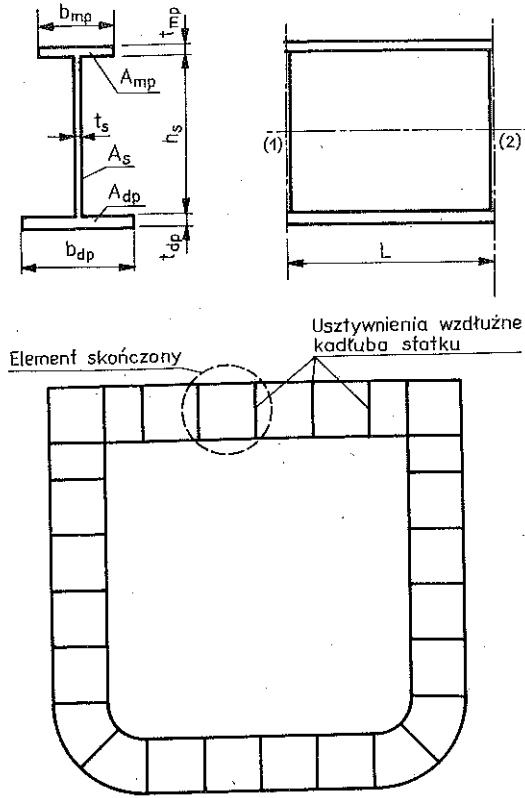
- c całkowity (przekrój, siła),
 dp dotyczy dużej półki,
 e sprężysty (przekrój, element),
 ef efektywny przekrój,
 el dotyczy elementu skończonego,

- gr* graniczy (przekrój, siła uogólniona),
i, j indeksy,
gl globalny (układ, macierz sztywności),
k dotyczy przekroju przywęzłowego elementu; $k = 1, 2$,
kr krytyczny,
kn krańcowy,
max maksymalny,
mp dotyczy małej półki,
o dotyczy płynięcia plastycznego,
pl plastyczny,
pr dotyczy pola rozciągania w środku,
P dotyczy półki,
r składowa związana z redystrybucją sił wewnętrznych,
s dotyczy środka lub środka długości elementu skończonego,
S składowe styczne do powierzchni wyboczeniowej,
s-p sprężysto-plastyczny,
v dotyczy ścinania,
zr zredukowany,
 Δ przyrost sił, przemieszczeń, odkształceń,
1 dotyczy węzła nr 1 elementu prętowego,
2 dotyczy węzła nr 2 elementu prętowego.

1. WPROWADZENIE

Płaskie ramy dwuteowe stanowiące podstawowy element nośny wielu konstrukcji okrętowych, budowlanych lub lotniczych są zwykle wzmacniane za pomocą usztywnień usytuowanych w stosunku do nich prostopadle. Przykładem może być rama wręgowa statku pokazana na rys. 1.

W zależności od własności materiałowych oraz wymiarów poszczególne elementy położone pomiędzy dwoma sąsiednimi usztywnieniami mogą wykazywać różne zachowania. Jedne, o stosunkowo dużych grubościach środka i półek, ulegną uplastycznieniom; inne, bardziej wiotkie, mogą utracić stateczność. To ostatnie zjawisko jest zwykle również poprzedzone pewnymi odkształceniami plastycznymi. Chcąc opisać kinematykę nieliniowego procesu deformacji całej ramy, musimy określić prawa konstytutywne wiążące siły uogólnione z odpowiednimi przemieszczeniami uogólnionymi i rządzące zachowaniem się poszczególnych elementów po przekroczeniu fazy czysto sprężystej. Nieliniowa analiza rzeczywistych konstrukcji wymaga często wielokrotnego rozwiązywania dużych układów równań, a czas obliczeń i wymagana pamięć komputerów przekracza niekiedy możliwości nawet najnowszych maszyn cyfrowych. Celowe staje się więc połączenie klasycznej metody elementów skończonych z metodami półanalizycznymi, pozwalającymi zmniejszyć rozmiary zadania przez zastosowanie tzw. „elementów strukturalnych”. Koncepcja ta w odniesieniu do rozpatrywanej tu klasy zagadnień sformułowana została w pracach UEDY i RASHEDA [1 i 2]. Typ proponowanego



Rys. 1

elementu strukturalnego wynika z odległości pomiędzy sąsiednimi usztywnieniami poprzecznymi ramy. Celem analizy jest badanie kolejnych etapów deformacji rozpatrywanej ramy płaskiej po przekroczeniu fazy czysto sprężystej poprzez fazy sprężysto-plastyczne aż do zniszczenia włącznie. Wykorzystujemy koncepcję uogólnionych przegubów plastycznych, przyjmowanych według teorii stanu granicznego oraz założenie o stowarzyszonym prawie deformacji, związanych zarówno z utworzeniem się uogólnionego przegubu plastycznego, jak i ze zniszczeniem spowodowanym utratą stateczności określonym stosownie do pewnych umownie przyjmowanych kryteriów.

Takie przeniesienie koncepcji powierzchni granicznej jako potencjału przyrostów odkształceń dla stanów pokrywanych możliwe jest jedynie przy założeniu, że odpowiednie powierzchnie graniczne są wypukłe. Wypukłość powierzchni opisującej możliwość utworzenia się przegubu plastycznego nie budzi żadnych wątpliwości, natomiast problem wypukłości powierzchni odpowiadającej wyboczeniu sprężystemu środnika i nośności krańcowej przedstawimy w odpowiednich rozdziałach.

Metoda elementów skończonych strukturalnych zastosowana w analizie umożliwia radykalne zmniejszenie liczby niezbędnych elementów skończonych oraz liczby stopni swobody przy zachowaniu dokładności porównywalnej z dokładnością metody elementów skończonych.

W niniejszej publikacji zawarliśmy treści uprzednio publikowane w znacznie mniej dostępnych czytelnikom pracach [3-5] i pragniemy przedstawić opracowany przez nas program numeryczny zainstalowany na komputerze RIAD 32.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

W pracy zwrócono szczególną uwagę na specyfikę ram występujących w okrętownictwie. Za „duży” element skończony rąmy czyli tzw. element strukturalny przyjmuje się odcinek prostej belki dwuteowej odpowiadający odległości między kolejnymi usztywnieniami wzdłużnymi kadłuba statku i stanowiącymi jednocześnie poprzeczne usztywnienia środnika, rys. 1. W szczególnych przypadkach długość elementu dobierać można inaczej kierując się wymaganiami dokładności obliczeń oraz innymi geometrycznymi i mechanicznymi cechami układu oraz sposobem i miejscem przyłożenia obciążeń.

Najważniejsze założenia są następujące

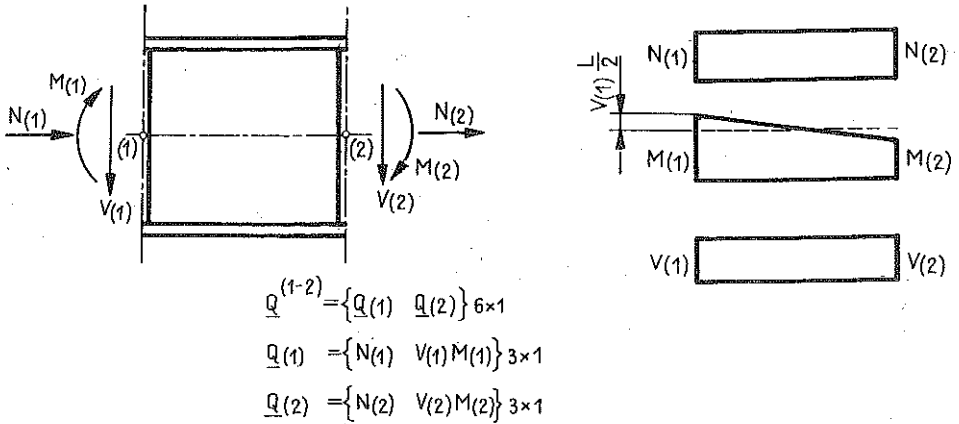
1. Wydzielone elementy są jednorodne i pryzmatyczne.
2. Obciążenia przyłożone są wyłącznie w węzłach; w przypadku obciążeń ciągłych należy zastąpić je równoważnym obciążeniem skupionym w węzłach.
3. Materiał konstrukcji wykazuje cechy sprężysto-idealnie plastyczne.
4. Rozpatrywane zagadnienie ma charakter płaski, tj. wykluczamy deformacje typu „z płaszczyzny”, np. giętnoskrętne.
5. Półki belek dwuteowych nie ulegają wyboczeniu.
6. Możliwość lokalnego wyboczenia środnika belki, podobnie jak możliwość utworzenia się uogólnionego przegubu plastycznego, uwarunkowane są spełnieniem równań typu

$$(2.1) \quad F_{kt}(\mathbf{Q}) = 0, \quad F_{pl}(\mathbf{Q}) = 0,$$

w którym \mathbf{Q} oznacza wektor uogólnionych sił wewnętrznych w środkowym przekroju lub na końcu elementu odpowiednio.

7. Siłami wewnętrznymi występującymi jako argumenty w warunkach wybozeniowych oraz nośności granicznej (2.1) są: moment zginający M , siła poprzeczna V oraz siła podłużna N , tj. w przekroju k -tym, (rys. 2) belki o dwu końcach, $k = 1, 2$ mamy

$$(2.2) \quad \mathbf{Q}_k = \{N(k), V(k), M(k)\}.$$



Rys. 2

8. Konstrukcja niszczy się w wyniku wyczerpania się jej nośności, dochodząc do tego stanu na drodze kolejnych lokalnych uplastycznień i wyboczeń; wykluczamy możliwość zniszczenia kruchej lub globalnej utraty stateczności.

9. Poszczególne belki mogą być nachylone pod dowolnym kątem do belek z nimi sąsiadujących. Zagadnienie wyboczenia nie prostokątnych elementów narożnych (rys. 1) nie jest jednakże rozpatrywane.

10. Pomijamy efekty zmian własności geometrycznych układu, tj. zakładamy, że przemieszczenia są małe.

11. Rozpatrujemy dowolne obciążenia quasi-statyczne, niekoniecznie proporcjonalne.

12. Pomijamy wpływ imperfekcji, naprężeń wstępnych, spawalniczych, niejednorodności materiału i innych błędów wykonania.

Algorytm postępowania pokazujemy na rys. 3. Jego szczegółowy opis jest zawarty w kolejnych częściach pracy.

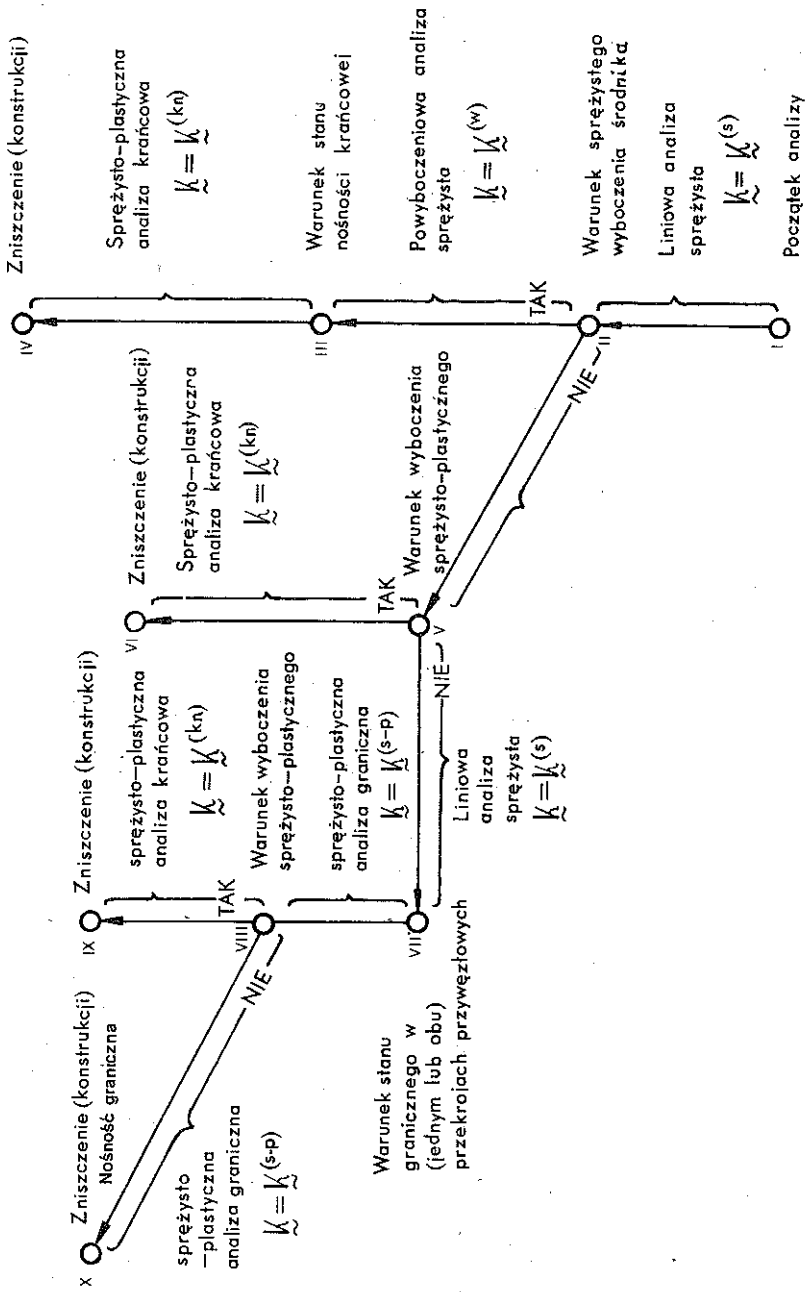
3. SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA ANALIZA RAM

Zachowanie się elementu skończonego sprężystej ramy płaskiej opisuje równanie przyrostowe

$$(3.1) \quad \Delta \mathbf{Q}_{6 \times 1} = \mathbf{k}_6^{(s)} \Delta \mathbf{r}_{6 \times 1},$$

w którym $\mathbf{k}^{(s)}$ jest tzw. macierzą sztywności sprężystej elementu prętowego

ALGORYTM POSTĘPOWANIA



Rys. 3

o monosymetrycznym przekroju dwuteowym:

$$(3.2) \quad \mathbf{k}_{6 \times 6}^{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{12EJ}{L^3(1+\gamma)} & \frac{6EJ}{L^2(1+\gamma)} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3(1+\gamma)} & \frac{6EJ}{L^2(1+\gamma)} \\ & \frac{(4+\gamma)EJ}{L(1+\gamma)} & 0 & \frac{6EJ}{L^2(1+\gamma)} & \frac{(2-\gamma)EJ}{L(1+\gamma)} \\ \text{sym.} & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & \frac{12EJ}{L^3(1+\gamma)} & -\frac{6EJ}{L^2(1+\gamma)} \\ & & & & \frac{(4+\gamma)EJ}{L(1+\gamma)} \end{bmatrix}$$

Znaczenie γ objaśnia (1.2) w załączniku. Po uplastycznieniu się przekroju całkowity przyrost uogólnionych deformacji $\Delta \mathbf{r}$ składa się z dwu części: przyrostu sprężystego $\Delta \mathbf{r}^s$ oraz przyrostu plastycznego $\Delta \mathbf{r}^p$, tj.

$$(3.3) \quad \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}^s + \Delta \mathbf{r}^p.$$

Plastyczny przyrost uogólnionych deformacji można zgodnie z założonym stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia określić wzorem

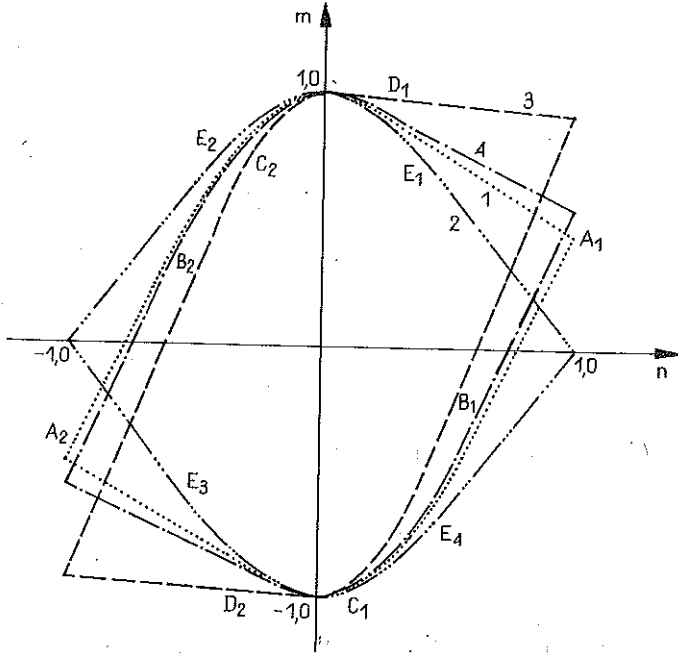
$$(3.4) \quad \Delta \mathbf{r}^p = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1^p \\ \Delta \mathbf{r}_2^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \right)_1 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \right)_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}.$$

Gdy przekrój przywęzłowy 1 lub 2 elementu jest sprężysty, zachodzi odpowiednio $\mu_1 = 0$ lub $\mu_2 = 0$. Zależność pomiędzy przyrostem sił wewnętrznych i przyrostami deformacji można wyrazić następująco:

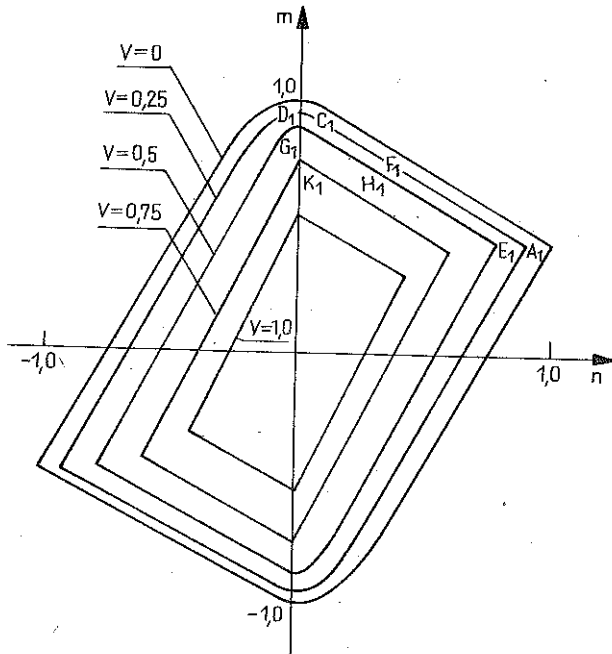
$$(3.5) \quad \Delta \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{Q}_1 \\ \Delta \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1^s \\ \Delta \mathbf{r}_2^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 - \Delta \mathbf{r}_1^p \\ \Delta \mathbf{r}_2 - \Delta \mathbf{r}_2^p \end{Bmatrix}.$$

Podstawiając równanie (3.4) do równania (3.5) otrzymamy wzór

$$(3.6) \quad \Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 - \mu_1 \Phi_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 - \mu_2 \Phi_2 \end{Bmatrix}.$$



Rys. 4



Rys. 5

Dowolna zmiana kombinacji sił i momentów w przekroju nie może naruszyć warunku plastyczności. Możemy więc napisać

$$(3.7) \quad \mathbf{0} = \Delta \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}_1 \\ \Delta \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \right)_1 \Delta \mathbf{Q}_1 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}} \right)_2 \Delta \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{Q}_1 \\ \Delta \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix}.$$

Równania (3.6) i (3.7) określają zależność pomiędzy μ_k i $\Delta \mathbf{r}$. Rozpatrzmy trzy przypadki. Gdy przekrój 1 jest uplastyczniony, przekrój 2 zaś jest sprężysty, otrzymamy

$$\mu_1 \neq 0, \quad \mu_2 = 0.$$

Wstawmy powyższe wartości do równania (3.6). Przybierze ono wówczas postać

$$(3.8) \quad \Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 - \mu_1 \Phi_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix}.$$

Otrzymaną wielkość możemy podstawić do równania (3.7)

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} \Phi_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 - \mu_1 \Phi_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu składników otrzymamy układ dwu równań

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} \Phi_1^T & \mathbf{k}_{11} & \Phi_1^T \mathbf{k}_{12} \\ \Phi_2^T & \mathbf{k}_{21} & \Phi_2^T \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1^T \mathbf{k}_{11} \mu_1 \Phi_1 \\ \Phi_2^T \mathbf{k}_{21} \mu_2 \Phi_2 \end{Bmatrix}.$$

Pierwsze z nich wygląda następująco

$$(3.11) \quad \Phi_1^T [\mathbf{k}_{11} \quad \mathbf{k}_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix} = \Phi_1^T \mathbf{k}_{11} \mu_1 \Phi_1,$$

stąd

$$(3.12) \quad \mu_1 = \frac{\Phi_1^T [\mathbf{k}_{11} \quad \mathbf{k}_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix}}{\Phi_1^T \mathbf{k}_{11} \Phi_1}.$$

Podobnie jeśli przekrój 1 jest sprężysty, przekrój 2 zaś jest uplastyczniony, to mamy $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$. Wtedy

$$(3.13) \quad \mu_2 = \frac{\Phi_2^T [\mathbf{k}_{21} \quad \mathbf{k}_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r}_1 \\ \Delta \mathbf{r}_2 \end{Bmatrix}}{\Phi_2^T \mathbf{k}_{22} \Phi_2}.$$

Jeśli obydwa przekroje przywęzłowe są uplastycznione, to mamy $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Wtedy

$$(3.14) \quad \begin{bmatrix} \Phi_1^T k_{11} & \Phi_1^T k_{12} \\ \Phi_2^T k_{21} & \Phi_2^T k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1^T k_{11} \mu_1 \Phi_1 + \Phi_1^T k_{12} \mu_2 \Phi_2 \\ \Phi_2^T k_{21} \mu_1 \Phi_1 + \Phi_2^T k_{22} \mu_2 \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

Ten układ równań rozwiązać można względem μ_1 i μ_2 za pomocą wyznaczników Cramera.

Wyznacznik główny układu przedstawić można w postaci

$$W = \begin{vmatrix} \Phi_1^T k_{11} \Phi_1 & \Phi_1^T k_{12} \Phi_2 \\ \Phi_2^T k_{21} \Phi_1 & \Phi_2^T k_{22} \Phi_2 \end{vmatrix} = (\Phi_1^T k_{11} \Phi_1) (\Phi_2^T k_{22} \Phi_2) - (\Phi_1^T k_{12} \Phi_2)^2$$

Wykorzystujemy zmianę wskaźników sumowania

$$\Phi_1^T k_{12} \Phi_2 = \Phi_2^T k_{21} \Phi_1,$$

stąd

$$W\mu_1 = \begin{vmatrix} \Phi_1^T [k_{11} \ k_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} & \Phi_1^T k_{12} \Phi_2 \\ \Phi_2^T [k_{21} \ k_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} & \Phi_2^T k_{22} \Phi_2 \end{vmatrix},$$

$$W\mu_2 = \begin{vmatrix} \Phi_1^T k_{11} \Phi_1 & \Phi_1^T [k_{11} \ k_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} \\ \Phi_2^T k_{21} \Phi_1 & \Phi_2^T [k_{21} \ k_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} \end{vmatrix},$$

czyli

$$\mu_1 = W\mu_1/W, \quad \mu_2 = W\mu_2/W,$$

$$(3.15) \quad \mu_1 = \frac{\left(\Phi_1^T [k_{11} \ k_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} \right) (\Phi_2^T k_{22} \Phi_2) - (\Phi_1^T k_{12} \Phi_2) \left(\Phi_2^T [k_{21} \ k_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} \right)}{W},$$

$$\mu_2 = \frac{(\Phi_1^T k_{11} \Phi_1) \left(\Phi_2^T [k_{21} \ k_{22}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} \right) - \left(\Phi_1^T [k_{11} \ k_{12}] \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{Bmatrix} \right) (\Phi_2^T k_{21} \Phi_1)}{W}$$

Wstawiając kolejno μ_k do równania (3.7) otrzymujemy sprężysto-plastyczne macierze sztywności elementu prętowego dla wyróżnionych trzech sposobów jego uplastycznienia:

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad \mu_1 \neq 0, \quad \mu_2 = 0, \\
 (3.16) \quad \Delta Q &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 - \frac{\Phi_1^T [k_{11} \ k_{12}]}{C_A} \left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{array} \right\} \Phi_1 \\ \Delta r_2 \end{array} \right\} = \\
 &= \begin{bmatrix} k_{11} - \frac{k_{11} \Phi_1 \Phi_1^T k_{11}}{C_A} & k_{12} - \frac{k_{11} \Phi_1 \Phi_1^T k_{12}}{C_A} \\ k_{21} - \frac{k_{21} \Phi_1^T \Phi_1 k_{11}}{C_A} & k_{22} - \frac{k_{21} \Phi_1 \Phi_1^T k_{12}}{C_A} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{array} \right\} = \\
 &= k^{P_1} \Delta r,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$C_A = \Phi_1^T k_{11} \Phi_1.$$

$$2) \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 \neq 0,$$

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad \Delta Q &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 - \frac{\Phi_2^T [k_{21} \ k_{22}]}{C_B} \left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{array} \right\} \Phi_2 \end{array} \right\} = \\
 &= \begin{bmatrix} k_{11} - \frac{k_{12} \Phi_2 \Phi_2^T k_{21}}{C_B} & k_{12} - \frac{k_{12} \Phi_2 \Phi_2^T k_{22}}{C_B} \\ k_{21} - \frac{k_{12} \Phi_2 \Phi_2^T k_{21}}{C_B} & k_{22} - \frac{k_{22} \Phi_2 \Phi_2^T k_{22}}{C_B} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{array} \right\} = k^{P_2} \Delta r,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$C_B = \Phi_2^T k_{22} \Phi_2.$$

$$3) \quad \mu_1 \neq 0, \quad \mu_2 \neq 0,$$

$$(3.18) \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{array} \right\} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \Phi_1 \\ \mu_2 \Phi_2 \end{array} \right\} = k^{P_{12}} \Delta r,$$

gdzie

$$k^{P_{12}} = \begin{bmatrix} k_{11}^P & k_{12}^P \\ k_{21}^P & k_{22}^P \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 k_{11}^P &= k_{11} - \frac{1}{C_{AB}} \{k_{11} \Phi_1 (\Phi_2^T k_{22} \Phi_2 \Phi_1^T k_{11} - \Phi_1^T k_{12} \Phi_2 \Phi_2^T k_{21}) + \\
 &\quad + k_{12} \Phi_2 (\Phi_1^T k_{11} \Phi_1 \Phi_2^T k_{21} - \Phi_2^T k_{21} \Phi_1 \Phi_1^T k_{11})\}, \\
 k_{12}^P &= k_{12} - \frac{1}{C_{AB}} \{k_{11} \Phi_1 (\Phi_2^T k_{22} \Phi_2 \Phi_1^T k_{12} - \Phi_1^T k_{12} \Phi_2 \Phi_2^T k_{22}) + \\
 &\quad + k_{12} \Phi_2 (\Phi_1^T k_{11} \Phi_1 \Phi_2^T k_{22} - \Phi_2^T k_{21} \Phi_1 \Phi_1^T k_{12})\}, \\
 k_{21}^P &= k_{21} - \frac{1}{C_{AB}} \{k_{21} \Phi_1 (\Phi_2^T k_{22} \Phi_2 \Phi_1^T k_{11} - \Phi_1^T k_{12} \Phi_2 \Phi_2^T k_{21}) + \\
 &\quad + k_{22} \Phi_2 (\Phi_1^T k_{11} \Phi_1 \Phi_2^T k_{21} - \Phi_2^T k_{21} \Phi_1 \Phi_1^T k_{11})\}, \\
 k_{22}^P &= k_{22} - \frac{1}{C_{AB}} \{k_{21} \Phi_1 (\Phi_2^T k_{22} \Phi_2 \Phi_1^T k_{12} - \Phi_1^T k_{12} \Phi_2 \Phi_2^T k_{22}) + \\
 &\quad + k_{22} \Phi_2 (\Phi_1^T k_{11} \Phi_1 \Phi_2^T k_{22} - \Phi_2^T k_{21} \Phi_1 \Phi_1^T k_{12})\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$C_{AB} = C_A C_B - (\Phi_1^T k_{12} \Phi_2)^2.$$

Jawną postać współczynników macierzy sprężysto-plastycznych elementu skończonego przedstawiono w załączniku I

4. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

Przedstawioną metodę nieliniowej analizy ram zilustrujemy przykładami obliczeń wykonanych za pomocą programu numerycznego ASGRAM. Program napisany w języku FORTRAN IV uruchomiono na komputerze RIAD 32. Jak już wspomniano algorytm analizy nieliniowej ma charakter przyrostowy i wymaga w każdym kroku iteracyjnym m.in. analizy liniowej dla odpowiedniego przyrostu obciążenia.

Standardowe procedury opracowanego programu są częścią powszechnie znanego w kraju systemu WAT-KM. Oprócz wspomnianych procedur analizy liniowej w skład programu ASGRAM-ASGRAMW wchodzi program główny i 20 podprogramów analizy nieliniowej.

Istniejąca wersja programu ASGRAM-ASGRAMW umożliwia sprężysto-plastyczną analizę ram płaskich (ASGRAM) z uwzględnieniem sprężystego wyboczenia śródników (ASGRAMW), przy następujących ograniczeniach: 1) Dane techniczne — komputer RIAD, system OS oraz pamięć operacyjna 256 K, 2) Wymagane parametry programu — pamięć operacyjna 230 K, pamięć dyskowa (jednostki typu 2311 lub 2314), czytnik kart, drukarka wierszowa oraz stacja taśm magnetycznych, 3) Dane użytkowe — maksymalna liczba węzłów 100, maksymalna liczba elementów 150, dowolne usytuowanie prętów na płaszczyźnie oraz obciążenia w postaci sił i momentów skupionych przyłożone są w węzłach.

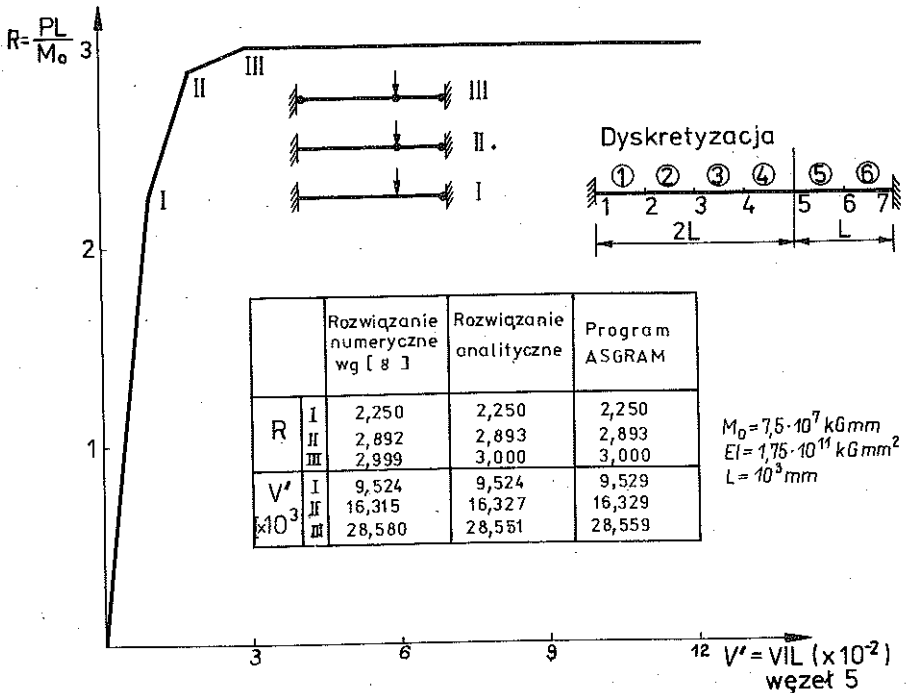
Ze względu na konieczność dokonania porównań we wszystkich przykładach przyjęto takie same dane, jak w cytowanych przy ich opisie pracach. Dlatego między innymi przykłady nr 1, nr 2 i nr 4 policzono przyjmując $V_{gr} = 99999999$, kG, co pozwoliło w praktyce zmniejszyć wpływ siły tnącej prawie do zera. Z tych samych powodów w przykładach nr 3 i nr 5 pominięto wpływ siły podłużnej N . Większość danych dotyczących poniższych przykładów naniesiono na rysunkach.

Przykłady 1—6 policzono stosując warunek stanu granicznego w k -tym przekroju przywęzłowym w postaci

$$(4.1) \quad n_{(k)}^2 + v_{(k)}^2 + m_{(k)} - 1 = 0,$$

czyli podobny do tego, jaki zwykle przyjmuje się dla pełnych przekrojów prostokątnych, lecz uzupełniony o siłę tnącą. We wzorze (4.1).

$$n(k) = \frac{N(k)}{N_{gr}}, \quad v(k) = \frac{V(k)}{V_{gr}}, \quad m(k) = \frac{M(k)}{M_{gr}},$$

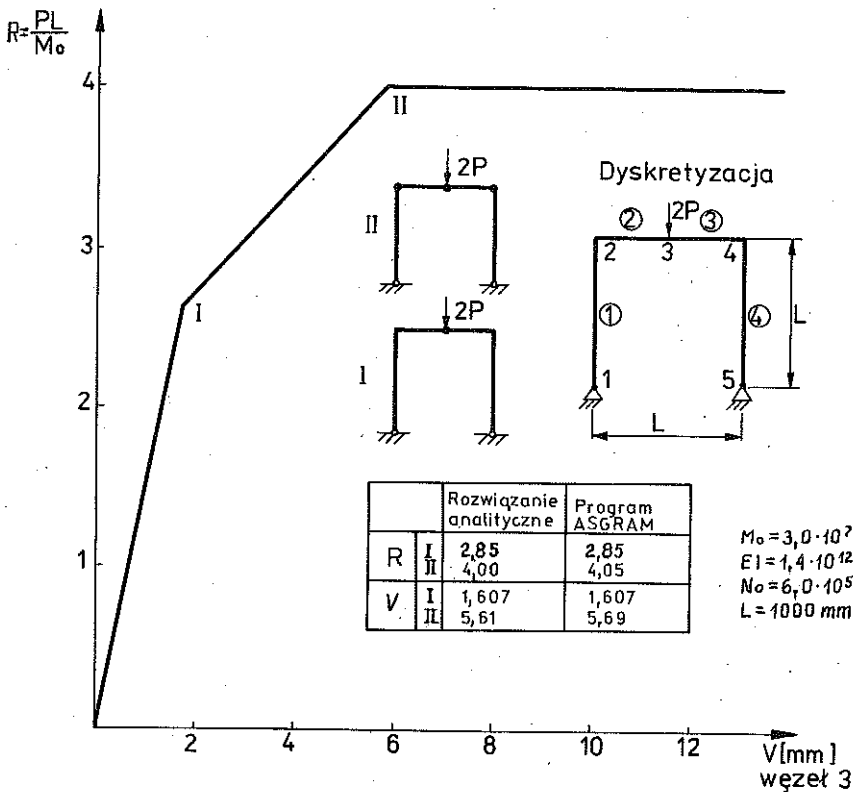


Rys. 6

N_{gr} , V_{gr} i M_{gr} zaś oznaczają wielkości graniczne odpowiednio dla siły podłużnej N , siły tnącej V i momentu zginającego M i liczone są z uwzględnieniem wielkości geometrycznych przekrojów dwuteowych.

PRZYKŁAD 1. Pręt jak na rys. 6, utwierdzony na obydwu końcach, jest obciążony siłą skupioną. W tablicy na rysunku pokazano wyniki uzyskane za pomocą metody kolejnych rozwiązań sprężystych wg podejścia statycznego [7] oraz otrzymane na drodze numerycznej wg [8] i przez autorów niniejszej pracy.

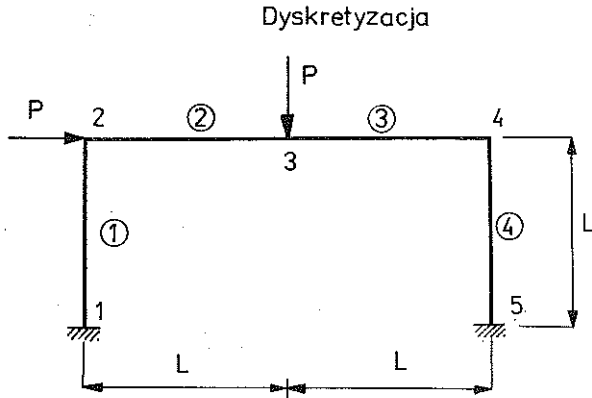
PRZYKŁAD 2. Przy obliczaniu ramy dwuprzegubowej jak na rys. 7 zastosowano 13 przyrostów obciążenia, z których każdy stanowił 5% obciąże-



Rys. 7

nia wywołującego powstanie pierwszego przegubu plastycznego. Wyniki porównano z rozwiązaniem analitycznym zamieszczonym w [9].

PRZYKŁAD 3. Trzykrotnie statycznie niewyznaczalną ramą jednonawową rys. 8, rozwiązano analitycznie w pracy [7]. W tablicy 1 zestawiono wyniki



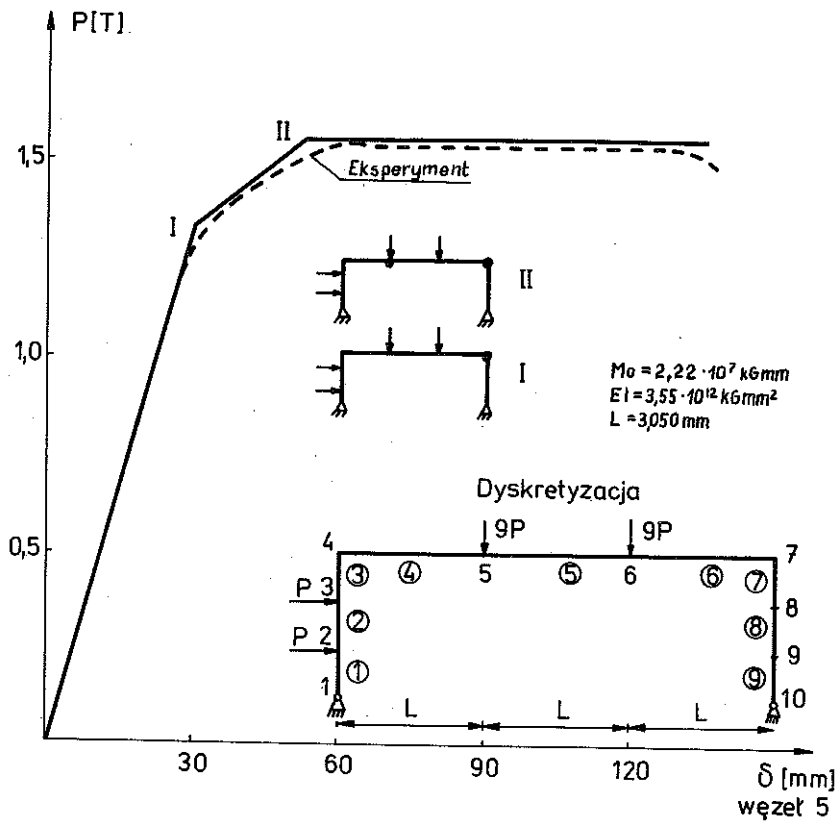
Rys. 8

Tabela 1

	Schemat statyczny	Pl/M_0 [7]	Pl/M_0 ASGRAM
1		2,424	2,46
2		2,567	2,57
3		2,957	2,98
4		3,0	3,01

i porównano je z wynikami obliczeń programem ASGRAM. Kolejność pojawienia się przegubów plastycznych oraz moment utraty nośności a także wartości obciążeń odpowiadające powstawaniu stref aktywnych zgadzają się, a błąd względny nie przekracza 0,5% obciążenia niszczącego.

PRZYKŁAD 4 (rys. 9) Rama pokazana na rys. 9 była wykonana specjalnie w celu przeprowadzenia doświadczeń w Leigh University w Stanach Zjednoczonych. Dwuteowniki ze-stali 12WF36 miały następujące wymiary: 1) wysokość średnika: $2H = 30,8$ cm, 2) grubość półki: $t_f = 1,28$ cm, 3) szerokość półki: $b_f = 16,7$ cm oraz 4) grubość średnika: $t_w = 0,77$ cm.



Rys. 9

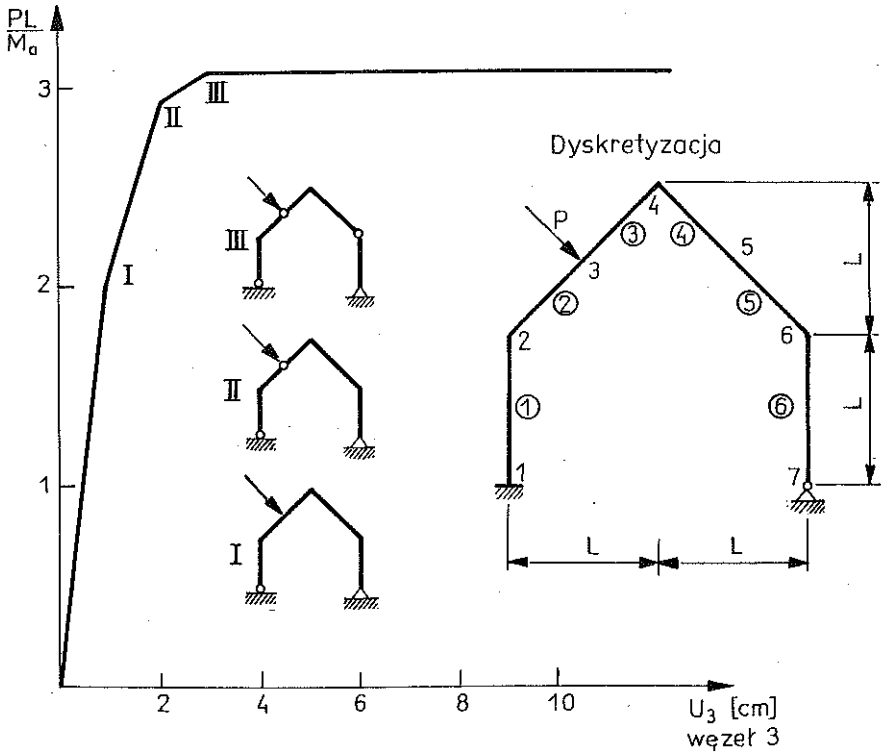
Granica plastyczności dla użytej stali $\sigma_0 = 3000 \text{ kG/cm}^2$. Pozostałe dane, dotyczące wymiarów ramy oraz sposobu obciążenia, przedstawiono na rys. 9.

Otrzymana krzywa obciążenia — przemieszczenie pionowe środka belki poziomej — przebiega bardzo blisko krzywej sporządzonej podczas doświadczeń [10].

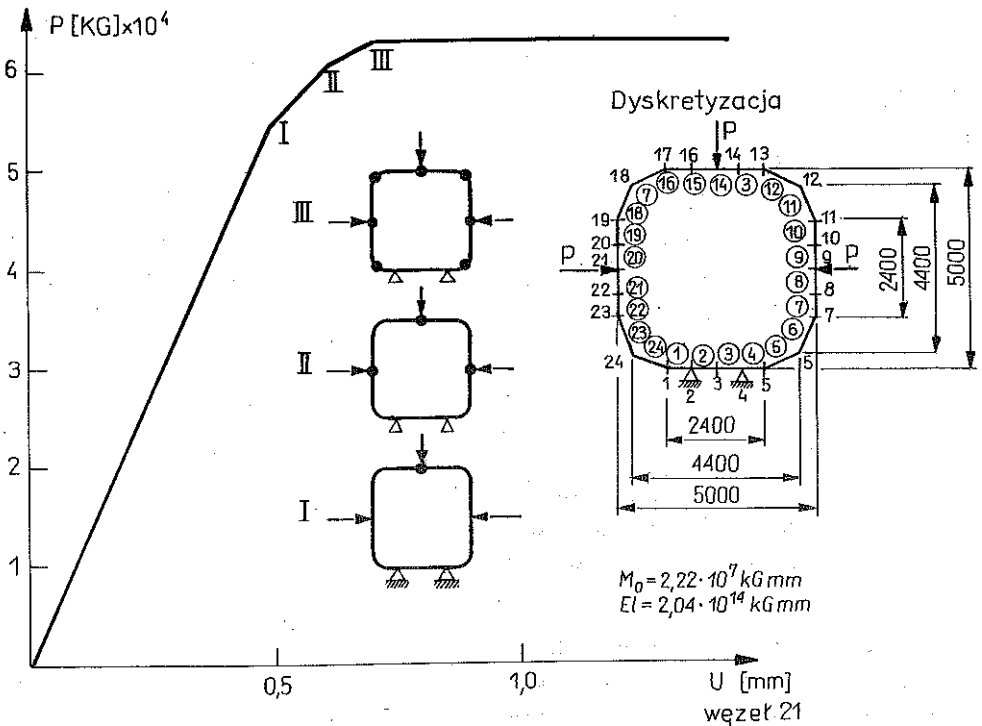
PRZYKŁAD 5. Dwukrotnie statycznie niewyznaczalną ramę z załamanym rygłem obliczono metodą superpozycji podstawowych mechanizmów zniszczenia w pracy [7], uzyskując wartość obciążenia granicznego $PL/M_0 = 3,095$.

Wynik obliczeń programem ASGRAM wyniósł $PL/M_0 = 3,099$, a ponadto pozwolił określić kolejność tworzenia się przegubów plastycznych (rys. 10).

PRZYKŁAD 6. W przykładzie tym policzono zamkniętą ramę płaską o wymiarach charakterystycznych dla okrętownictwa. Zależność obciążenie — przemieszczenie węzła nr 21 pokazano na rys. 11, na którym zilustrowano również kolejność tworzenia się stref aktywnych.



Rys. 10



Rys. 11

ZALĄCZNIK I

Jawną postać współczynników macierzy sprężysto-plastycznych elementu skończonego można wyznaczyć w następujący sposób.

Oznaczamy składowe wektora gradientów powierzchni granicznej względem odpowiednich sił wewnętrznych w przekrojach przywęzłowych 1 oraz 2 elementu skończonego następująco:

$$(I.1) \quad \Phi_1^T = \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right)_1^T = \{NA, TA, MA\}, \quad \Phi_2^T = \left(\frac{\partial F}{\partial Q} \right)_2^T = \{NB, TB, MB\}.$$

Ponadto wprowadźmy ze względu na przejrzystość zapisu następujące oznaczenia:

$$(I.2) \quad \begin{aligned} EAL &= \frac{EA}{L}, & EJL1 &= \frac{(4+\gamma) EJ}{(1+\gamma) L}, \\ EJL2 &= \frac{6EJ}{L^2 (1+\gamma)}, & EJL3 &= \frac{12EJ}{(1+\gamma) L^3}, \end{aligned}$$

gdzie współczynnik deformacji pochodzących of ścinania

$$\gamma = \frac{12EJ}{GA_{ef} L^2};$$

przekrój efektywny ze względu na ścinanie (równy w obszarze sprężystym przekrojowi średnika elementu dwuteowego) wynosi A_{ef} ; moduł Kirchoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Macierz sprężystą elementu możemy wtedy napisać w postaci

$$(I.3) \quad \mathbf{k}^{(s)} = \begin{bmatrix} EAL & 0 & 0 & -EAL & 0 & 0 \\ & EJL3 & EJL2 & 0 & -EJL3 & EJL2 \\ & & EJL1 & 0 & -EJL2 & \frac{EJL1(2-\gamma)}{(4+\gamma)} \\ & & & EAL & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & EJL3 & -EJL2 \\ & & & & & EJL1 \end{bmatrix}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$(I.4) \quad \begin{aligned} RA1 &= EAL \cdot NA, \\ RA2 &= EJL3 \cdot TA + EJL2 \cdot MA, \\ RA3 &= EJL2 \cdot TA + EJL1 \cdot MA, \\ RA4 &= EJL2 \cdot TA + EJL1 \cdot MA \cdot (2-\gamma)/(4+\gamma); \end{aligned}$$

Podzielmy macierz sprężysto-plastyczną na podmacierze o wymiarze 3×3 i oznaczmy je następująco:

$$(I.5) \quad \mathbf{k}_{6 \times 6}^{(P)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(P)} & \mathbf{k}_{12}^{(P)} \\ \text{sym} & \mathbf{k}_{22}^{(P)} \end{bmatrix}.$$

W przypadku uplastycznienia lewego przekroju przywęzłowego pręta podmacierze te wyglądają następująco:

$$(I.6) \quad \mathbf{k}_{11}^{(P)} = \mathbf{k}_{11}^{(s)} - \frac{1}{CA} \begin{bmatrix} (RA1)^2 & RA1 \cdot RA2 & RA1 \cdot RA3 \\ & (RA2)^2 & RA2 \cdot RA3 \\ \text{sym} & & (RA3)^2 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$CA = RA1 \cdot NA + RA2 \cdot TA + RA3 \cdot MA,$$

$$\mathbf{k}_{12}^{(P)} = \mathbf{k}_{12}^{(s)} - \frac{1}{CA} \begin{bmatrix} -(RA1)^2 & -RA1 \cdot RA2 & RA1 \cdot RA4 \\ -RA1 \cdot RA2 & -(RA2)^2 & RA2 \cdot RA4 \\ -RA1 \cdot RA3 & -RA2 \cdot RA3 & RA3 \cdot RA4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{22}^{(P)} = \mathbf{k}_{22}^{(s)} - \frac{1}{CA} \begin{bmatrix} RA1^2 & RA1 \cdot RA2 & -RA1 \cdot RA4 \\ \text{sym} & RA2^2 & -RA2 \cdot RA4 \\ & & RA4^2 \end{bmatrix}.$$

Wprowadźmy oznaczenia następujące:

$$(I.7) \quad \begin{aligned} RB1 &= EAL \cdot NB, \\ RB2 &= EJL3 \cdot TB - EJL2 \cdot MB, \\ RB3 &= -EJL2 \cdot TB + EJL1 \cdot MB, \\ RB4 &= -EJL2 \cdot TB + EJL1 \cdot MB \cdot (2 - \gamma) / (4 + \gamma), \\ CB &= RB1 \cdot NB + RB2 \cdot TB + RB3 \cdot MB. \end{aligned}$$

W przypadku uplastycznienia prawego przekroju przywęzłowego pręta podmacierze macierzy sprężysto-plastycznej są następujące:

$$(I.8) \quad \mathbf{k}_{11}^{(P)} = \mathbf{k}_{11}^{(s)} - \frac{1}{CB} \begin{bmatrix} RB1^2 & RB1 \cdot RB2 & +RB1 \cdot RB4 \\ \text{sym} & RB2^2 & -RB2 \cdot RB4 \\ & & RB4^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{12}^{(P)} = \mathbf{k}_{12}^{(s)} - \frac{1}{CB} \begin{bmatrix} -(RB1)^2 & -RB1 \cdot RB2 & -RB1 \cdot RB3 \\ -RB1 \cdot RB2 & -(RB2)^2 & -RB2 \cdot RB3 \\ -RB1 \cdot RB4 & RB2 \cdot RB4 & RB3 \cdot RB4 \end{bmatrix},$$

$$k_{22}^{(P)} = k_{22}^{(s)} - \frac{1}{CB} \begin{bmatrix} RB1^2 & RB1 \cdot RB2 & RB1 \cdot RB3 \\ & RB2^2 & RB2 \cdot RB3 \\ \text{sym} & & RB3^2 \end{bmatrix}$$

Ponadto wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(I.9) \quad \begin{aligned} CAB &= CA \cdot CB - (-RA1 \cdot NB - RA2 \cdot TB + RA4 \cdot MB)^2, \\ RB5 &= EJL3 \cdot TB + EJL2 \cdot MB, \\ RB6 &= EJL2 \cdot TB + EJL1 \cdot MB, \\ RAA &= RA1 \cdot NA + RA2 \cdot TA + RA3 \cdot MA, \\ RAB &= RA1 \cdot NB + RA2 \cdot TB - RA4 \cdot MB, \\ RBA &= RB1 \cdot NA + RB2 \cdot TA - RB4 \cdot MA, \\ RBB &= RB1 \cdot NB + RB2 \cdot TB + RB3 \cdot MB, \\ RAA1 &= RBA \cdot RA1 - RAA \cdot RB1, \\ RAA2 &= RBA \cdot RA2 - RAA \cdot RB2, \\ RAA3 &= RBA \cdot RA3 + RAA \cdot RB4, \\ RBB1 &= RBB \cdot RA1 - RAB \cdot RB1, \\ RBB2 &= RBB \cdot RA2 - RAB \cdot RB2, \\ RBB3 &= RBB \cdot RA3 + RAB \cdot RB4, \\ RAB1 &= RBB \cdot RA4 + RAB \cdot RB3, \\ RAB2 &= RAA \cdot RB3 + RBA \cdot RA4. \end{aligned}$$

W przypadku uplastycznienia obydwu końców elementu prętowego podmacierze macierzy sprężysto-plastycznej są wówczas następujące:

$$(I.10) \quad k_{11}^{(P)} = k_{11}^{(s)} - \frac{1}{CAB} \begin{bmatrix} RA1 \cdot RBB1 + & RA1 \cdot RBB2 + & RA1 \cdot RBB3 + \\ -RB1 \cdot RAA1 & -RB1 \cdot RAA2 & -RB1 \cdot RAA3 \\ & RA2 \cdot RBB2 + & RA2 \cdot RBB3 \\ & -RB2 \cdot RAA2 & -RB2 \cdot RAA3 \\ \text{sym} & & RA3 \cdot RBB3 + \\ & & +RB4 \cdot RAA3 \end{bmatrix}$$

$$k_{12}^{(P)} = k_{12}^{(s)} - \frac{1}{CAB} \begin{bmatrix} RAA1 \cdot RB1 + & RAA2 \cdot RB1 & RAB1 \cdot RA1 + \\ -RBB1 \cdot RA1 & -RBB1 \cdot RA1 & -RAB2 \cdot RB1 \\ RAA1 \cdot RB2 & RAA2 \cdot RB2 & RAB1 \cdot RA2 + \\ -RBB1 \cdot RA2 & -RBB2 \cdot RA2 & -RAB2 \cdot RB2 \\ -RA3 \cdot RBB1 & -RA3 \cdot RBB2 + & RA3 \cdot RAB1 + \\ -RB4 \cdot RAA1 & -RB4 \cdot RAA2 & +RB4 \cdot RAB2 \end{bmatrix}$$

$$(I.10) \quad k_{22}^{(P)} = k_{22}^{(S)} - \frac{1}{CAB} \begin{bmatrix} RA1 \cdot RBB1 + & RA1 \cdot RBB2 + & -RA1 \cdot RAB1 + \\ -RB1 \cdot RAA1 & -RB1 \cdot RAA2 & +RB1 \cdot RAB2 \\ & RA2 \cdot RBB2 + & -RA2 \cdot RAB1 \\ & -RB2 \cdot RAA2 & +RB2 \cdot RAB2 \\ & & RA4 \cdot RAB1 + \\ & & +RB3 \cdot RAB2 \end{bmatrix}$$

sym

Warunek stanu granicznego dla przekroju dwuteowego poddanego działaniu momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej wyprowadzono w pracy [6].

Siły graniczne przy założeniu niezależnego ich działania można obliczyć następująco:

$$(I.11) \quad \begin{aligned} V_{gr} &= h_s t_s \tau_0, \\ N_{gr} &= (A_s + A_{mp} + A_{dp}) \sigma_0, \\ M_{gr} &= (A_{mp} + A_{dp}) \sigma_0 h_s + \frac{h_s^2 t_s \sigma_0}{4} + \frac{q^2}{4t_s \sigma_0}, \end{aligned}$$

gdzie

$$q = (A_{dp} - A_{mp}) \sigma_0.$$

Przypadki typowych stanów chwilowego rozkładu naprężeń. W przypadku 1 mamy zależności

$$(I.12) \quad \begin{aligned} \frac{V}{V_{gr}} &= a_1 \eta, \\ \frac{N}{N_{gr}} &= a_2 + a_3 \xi + a_4 \eta, \\ \frac{M}{M_{gr}} &= a_5 + a_6 \xi + a_7 \xi^2, \end{aligned}$$

przy czym

$$(I.13) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2t_s s_1 \tau_0}{V_{gr}}, \\ a_2 &= \frac{(AR - 2b_{mp} s_1) \sigma_0}{N_{gr}}, \\ a_3 &= \frac{2b_{mp} s_1 \sigma_0}{N_{gr}}, \\ a_4 &= \frac{-2t_s s_1 \sigma_0}{N_{gr}}, \end{aligned}$$

$$(I.13) \quad a_5 = \frac{\sigma_0}{M_{gr}} \left\{ 2b_{mp} s_1 s_2 - \frac{b_{mp}^2 s_1^2}{b_{dp}} + A_{mp} \left(s_1 - \frac{t_{mp}}{2} \right) - A_{dp} \left(s_2 - \frac{t_{dp}}{2} \right) + \frac{1}{2} t_s (s_1 - t_{mp})^2 - \frac{1}{2} t_s (s_2 - t_{dp})^2 \right\},$$

$$a_6 = \frac{\sigma_0}{M_{gr}} \left(\frac{2b_{mp}^2 s_1^2}{b_{dp}} - 2b_{mp} s_1 s_2 \right),$$

$$a_7 = -\frac{b_{mp}^2 s_1^2 \sigma_0}{b_{dp} M_{gr}}.$$

AR oznacza pole powierzchni przekroju poprzecznego dwuteownika, tzn. $AR = A_s + A_{mp} + A_{dp}$.

Eliminując z równań (I.12) parametry η i ξ otrzymamy dla przypadku 1 równanie powierzchni stanu granicznego w postaci

$$(I.14) \quad F(\mathbf{Q}_i) = a_5 + a_6 \left(\frac{n}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_4 v}{a_1 a_3} \right) + a_7 \left(\frac{n}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} - \frac{a_4 v}{a_1 a_3} \right)^2 - m = 0.$$

Dla pozostałych czterech przypadków założonego rozkładu naprężeń i dla wszystkich kombinacji znaków naprężeń wyprowadzono podobne równanie w pracy [6]. Na rys. 4 pokazano powierzchnie graniczne odpowiadające sile tnącej $V=0$ dla czterech różnych profili dwuteowych. Dane geometryczne dotyczące tych profili zestawiono w tabelicy 2.

Tablica 2

Nr profilu pręta	b_{mp} [cm]	b_{dp} [cm]	H [cm]	t_s [cm]	t_{mp} [cm]	t_d [cm]
1	25	50	45	1	1	1
2	25	25	40	1	1	1
3	25	50	44	1	2	2
4	25	65	60	1	1	1

Na rys. 5 przedstawiono warstwicę powierzchni granicznej dla profilu nr 1 odcięte płaszczyznami $V=0, 0,25; 0,5; 0,75; 1$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Y. UEDA, S. M. H. RASHED, *An ultimate transverse strength analysis of ship structures*, J. Soc. Naval Arch. Japan, 136, 87–104, 1974.
2. Y. UEDA, S. M. H. RASHED, *The idealized structural unit method and its application to deep girder structures*, Computers and Structures, 18, 2, 277–293, 1984.
3. J. BAUER, M. KLEIBER, A. SAWCZUK, W. SOSNOWSKI, A. ZUBELEWICZ, *Numeryczna analiza sprężysto-plastycznych ram dwuteowych z uwzględnieniem możliwości wybooczenia środników*, Sprawozdanie dla Polskiego Rejestru Statków, etap I, Warszawa 1980.
4. J. BAUER, B. BONI, M. KLEIBER, A. SAWCZUK, W. SOSNOWSKI, *Numeryczna analiza nośności granicznej dwuteowych ram okrętowych z uwzględnieniem lokalnego wybooczenia środników*, Sprawozdanie dla Polskiego Rejestru Statków, etap II, Warszawa 1980.
5. W. SOSNOWSKI, *Statyczną analizą płaskich sprężysto-plastycznych ram dwuteowych z uwzględnieniem możliwości lokalnego wybooczenia środników*, Praca doktorska, Prace IPPT, 18, 1982.
6. B. BONI, M. KLEIBER, A. SAWCZUK, *Warunek stanu granicznego przekroju belki dwuteowej, poddanej działaniu momentu zginającego, siły podłużnej i siły poprzecznej*, Prace IPPT, 6, 1982.
7. A. SAWCZUK, *Nośność graniczna ram płaskich*, Warszawa 1964.
8. Y. UEDA *et al.*, *Elastic-plastic analysis of framed structures using matrix method*, J. Soc. Naval Arch. Japan, 124, 45–51, 1968.
9. C. G. SCHILLING, F. W. SCHUTZ, L. S. BEEDLE, *Behaviour of welded single-span frames under combined loading*, Welding J. Research, Suppl., 35, 234–252, 1956.
10. P. HODGE, *Plastic analysis of structures*, Mc Graw-Hill, New York 1959.

РЕЗЮМЕ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДВУТАВРОВЫХ ПЛОСКИХ РАМ С УЧЕТОМ БОКОВОГО ИЗГИБА ПОЛОТНА

ЧАСТЬ I. ОСНОВЫ АНАЛИЗА И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Представлены основы численного анализа плоских двутавровых рам с учетом неупругих эффектов и бокового изгиба. Рассмотрены рамы, состоящие из произвольно расположенных на плоскости двутавровых балок с разными полками. Проблема решена, применяя метод структурных элементов. Неупругие эффекты учтены, приняв упруго-идеально пластическую модель материала и концентрацию пластических зон в приузловых сечениях балок. Из-за предложенных геометрических характеристик системы и рассматриваемых нагрузений, учтено взаимодействие трех внутренних сил: изгибающего момента, продольной силы и поперечной силы. Это требовало определения соответствующих условий предельного состояния в пространстве обобщенных сил. Эффекты бокового изгиба учтены, допуская возможность упругого или упруго-пластического бокового изгиба стенок и анализируя подробно несущую способность элементов после бокового изгиба.

SUMMARY

PLANE I-BEAM FRAMES — NUMERICAL ANALYSIS ACCOUNTING FOR INELASTIC MATERIAL PROPERTIES AND THE LOCAL WEB BUCKLING

PART I. FUNDAMENTALS AND ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS

The load — deformation relationships for frames composed of deep I girders is investigated both before and after local failure of the frame members. Using the concept of the idealized structural unit a large I beam element is proposed and used to analyse highly nonlinear structural behaviour. The elastic-perfectly plastic material model is assumed. Yield and ultimate strength criteria are derived for combined action of the axial force, bending moment and shear force.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 października 1984 r.
