

DOBÓR SCHEMATU BELKI DRGAJĄCEJ Z WARUNKU NA OPTYMALNE PRZESTROJENIE(*)

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

Na przykładzie belki dwuprzęsłowej wykonującej drgania giętne pod wpływem wymuszenia harmonicznego o ustalonej częstotliwości kołowej przeprowadzono analizę numeryczną jej widma częstotliwości drgań własnych jako funkcji jednej zmiennej decyzyjnej. Na podstawie tej analizy rozwiązano problem optymalizacji dyskretnej metodą systematycznego przeszukiwania. Przedyskutowano jakościowe własności strategii optymalnej w przypadku, gdy zmienna decyzyjna może zmieniać się w sposób ciągły.

WYKAZ NIEKTÓRYCH OZNACZEŃ

- ω kołowa częstotliwość wymuszająca,
- ω_n n -ta kołowa częstotliwość własna,
- ω_{ni} n -ta kołowa częstotliwość własna i -tego podukładu,
- β bezwymiarowa częstotliwość wymuszająca,
- β_n n -ta bezwymiarowa częstotliwość własna.

1. WSTĘP

Zapobieganie zjawiskom rezonansowym w konstrukcjach poddanych wymuszeniom harmonicznym stanowi ciągle nieodłączny problem ich projektowania i eksploatacji. Szkodliwość nadmiernych drgań dla otoczenia, ich niekorzystny wpływ na procesy technologiczne i zagrożenie zmęczeniowe samej konstrukcji stanowią przy tym wystarczającą motywację dla poszukiwania coraz to bardziej skutecznych metod eliminacji tych oddziaływań.

Sformułowanie problemu optymalnego przestrajania układów drgających zostało podane w pracy [5], a wyniki kilkuletnich badań w tej dziedzinie omówiono w [8]. Obszerny przegląd literatury zagadnienia można znaleźć w pracach [5-9].

(*) Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego PW.05.12

Efektywne rozwiązywanie problemów optymalnego przestrajania konstrukcji wymaga stosowania odpowiednich technik numerycznych o bardzo wysokiej sprawności. Ze względu na specyfikę zagadnienia dotyczy to w równym stopniu metod analizy dynamicznej, jak również metod optymalizacji. Z doświadczeń autora wynika, że dla celów optymalnego kształtowania złożonych konstrukcji prętowych najskuteczniejszą metodę analizy dynamicznej można zbudować na podstawie modelu składającego się z tzw. ścisłych elementów skończonych w postaci prętów o nieskończonej liczbie stopni swobody. Model taki ma minimalną liczbę węzłowych stopni swobody, a scalanie (synteza) układu złożonego z jego poszczególnych elementów może się odbywać na różne sposoby polegające na zastosowaniu podstawowych metod mechaniki konstrukcji: metody sił, metody przemieszczeń oraz metody mieszanej. Wykorzystanie do obliczania częstości drgań własnych koncepcji algorytmu [3, 7 i 10] i zastosowanie przy optymalizacji warunkowej odpowiedniej transformacji zmiennych nieswobodnych w swobodne [1, 2 i 9], daje możliwość budowania algorytmów o zupełnie zadowalającej efektywności [8 i 9].

Celem obecnej pracy jest 1) analiza numeryczna widma częstości drgań własnych układu jako funkcji jego schematu konstrukcyjnego uzależnionego od jednej zmiennej decyzyjnej oraz 2) analiza zagadnienia optymalnego wyboru wartości tej zmiennej z warunku na przestrojenie układu dla danej częstości kołowej wymuszenia. Dla celów studialnych rozważania ograniczono do prostych układów prętowych wykonujących tylko drgania giętne. Przy obliczaniu widm posłużono się metodą dynamicznej syntezy podkonstrukcji.

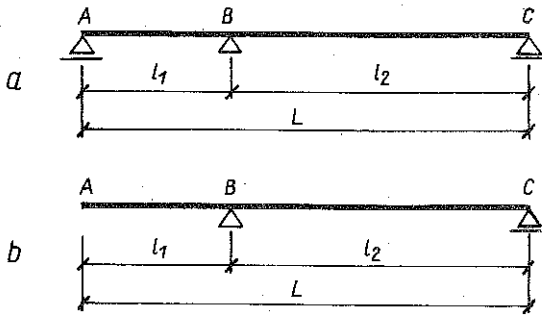
2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Zagadnienie optymalnego przestrajania będziemy analizować dla dwu prostych konstrukcji prętowych (rys. 1a, b) poddanych działaniu wymuszenia harmonicznego o ustalonej częstości kołowej ω . Zadanie będzie polegać na optymalnym doborze wartości zmiennej $x = l_1/L$, określającej położenie podpory B. Jeżeli kolejne kołowe częstości własne konstrukcji oznaczymy przez $\omega_n(x)$, to funkcję celu możemy przyjąć w postaci [8]

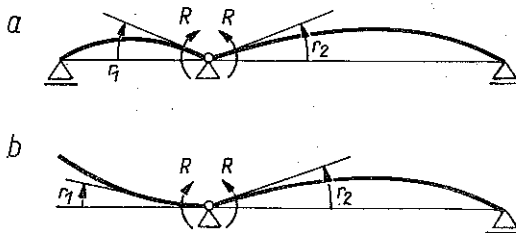
$$(2.1) \quad F(x, \omega) = \min(\omega - \omega_i, \omega_{i+1} - \omega),$$

przy czym $\omega_i(x)$, $\omega_{i+1}(x)$ spełniają warunek $\omega_i < \omega < \omega_{i+1}$. Zadanie sprowadza się więc do poszukiwania $\max_x F(x, \omega)$, przy czym na zmienną x nałożymy ograniczenie $0,0 \leq x \leq 0,5$.

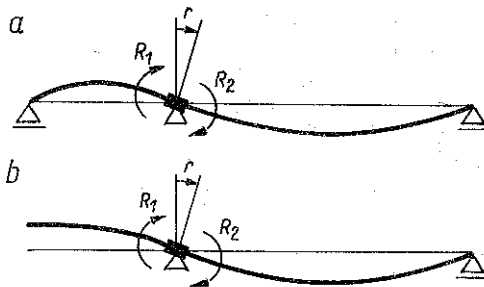
Analizę rozwiązań optymalnych tak sformułowanego problemu przeprowadzimy w p. 5. Podstawę tej analizy stanowić będzie zbiór widm częstości $\omega_n(x)$ odpowiadających ciągowi wartości $x = 0,0 (0,025) 0,5$. Dla obliczenia



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

każdego z tych widm zastosujemy metodę dynamicznej syntezy podkonstrukcji [3, 7 i 10].

Realizując ideę tej metody dokonamy: 1) podziału rozważanej konstrukcji na dwie podkonstrukcje drgające zupełnie niezależnie od siebie, 2) obliczenia widm częstości $\omega_{ni}(x)$, $i = 1, 2$ każdej z podkonstrukcji i 3) syntezy widm na podstawie algorytmu [3, 7 i 10]. Podziału na podkonstrukcje, a następnie ich syntezy można przy tym dokonać na dwa różne sposoby zgodnie z ideą metody sił (rys. 2a, b) lub metody przemieszczeń (rys. 3a, b). W p. 3 i 4 omówimy obydwa sposoby postępowania oraz ich wzajemne współzależności.

W obliczeniach numerycznych natomiast posłużymy się tylko metodą sił, rzadziej stosowaną w zagadnieniach dynamiki, a w naszym przypadku nieco korzystniejszą ze względów algorytmicznych.

3. WIDMA PODKONSTRUKCJI

Obliczanie widma częstości drgań własnych dowolnej podkonstrukcji odbywa się najsprawniej na podstawie znajomości jej sztywności dynamicznej. Dla podkonstrukcji o jednym węzłowym stopniu swobody sztywność tę możemy zdefiniować jako stosunek R/r amplitudy obciążenia węzła do amplitudy jego przemieszczenia wywołanego tym obciążeniem. Odwrotność r/R sztywności dynamicznej określa się jako podatność dynamiczną.

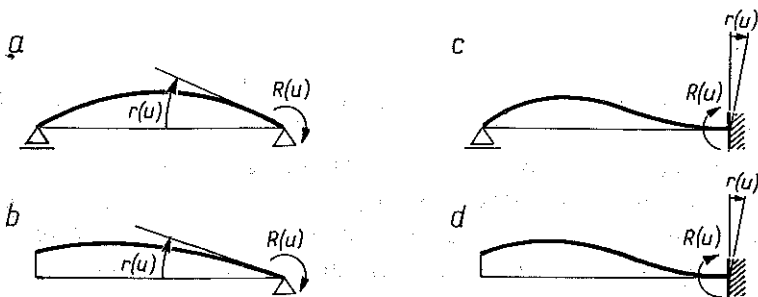
Dla podkonstrukcji w postaci pojedynczych prętów ich sztywności dynamiczne wyrażają się za pomocą odpowiednich funkcji KOŁOŪSEK'A [4, 11 i 12]. I tak dla prętów z rys. 4a, b mamy odpowiednio

$$(3.1) \quad \begin{aligned} R(u)/r(u) &= (EI/l) K_7(u), \\ R(u)/r(u) &= (EI/l) K_{15}(u). \end{aligned}$$

Widma częstości drgań własnych dla tych prętów otrzymujemy na podstawie warunku zerowania się ich sztywności dynamicznych. Widma te są więc określone przez rosnące ciągi pierwiastków odpowiednich równań $K_7(u) = 0$, $K_{15}(u) = 0$. Równania częstości dla prętów z rys. 4c, d mają postać $K_7^{-1}(u) = 0$, $K_{15}^{-1}(u) = 0$ i są warunkami zerowania się odpowiednich podatności dynamicznych. W tym przypadku widma częstości własnych są więc określone przez rosnące ciągi biegunów funkcji K_7 i K_{15} .

Dla wyjaśnienia związku zmiennej u występującej w (3.1), z częstością kołową ω zauważmy, że równanie różniczkowe drgań pręta ($EI = \text{const}$)

$$EI\bar{w}^{IV}(x, t) + \mu\ddot{\bar{w}}(x, t) = 0$$



Rys. 4

możemy sprowadzić do postaci bezwymiarowej

$$(3.2) \quad w^{IV}(\xi, \tau) + (\pi l/l_0)^4 \ddot{w}(\xi, \tau) = 0,$$

przyjmując $\bar{w} = lw$, $x = l\xi$, $t = \tau/\omega_0$, $\omega_0 = (\pi/l_0)^2 \sqrt{EI/\mu}$, i oznaczając przez l

długość tego pręta, a przez l_0 pewną dowolną wielkość porównawczą o wymiarze długości. Jeżeli rozwiązania równania (3.2) będziemy poszukiwać w postaci

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) (A \cos \beta\tau + B \sin \beta\tau),$$

gdzie $\beta = \omega/\omega_0$ oznacza bezwymiarową częstość drgań, to dla wyznaczenia funkcji $W(\xi)$ otrzymamy równanie

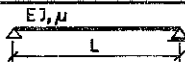



$$W^{IV}(\xi) - u^4 W(\xi) = 0,$$

w którym

$$(3.3) \quad u = (\pi l/l_0) \sqrt{\beta} = (\pi l/l_0) \sqrt{\omega/\omega_0}.$$

Dla czterech typów podkonstrukcji występujących w naszych rozważaniach ich równania częstości oraz widma bezwymiarowych częstości własnych $\beta_n = \omega_n/\omega_0$ zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

		$\omega_n = \beta_n \omega_0$,		$\omega_0 = (\pi/L)^2 \sqrt{EI/\mu}$		
	Schemat pręta	Równanie częstości	β_1	β_2	β_3	$\beta_n (n \geq 4)$
1		$\sin u = 0$	1,000	4,000	9,000	n^2
2		$ch u \cdot \sin u - sh u \cdot \cos u = 0$	1,562	5,063	10,563	$(n + 0,25)^2$
3		$1 + ch u \cdot \cos u = 0$	0,3562	2,233	6,251	$(n - 0,5)^2$
4		$ch u \cdot \sin u - sh u \cdot \cos u = 0$	0	1,562	5,063	$(n - 0,75)^2$

4. SYNTeza WIDMA KONSTRUKCJI

W zależności od przyjętego sposobu podziału na podkonstrukcje (rys. 2 i 3) ich dynamiczną syntezę przeprowadzamy albo z warunku zgodności przemieszczeń (metoda sił, rys. 2a, b)

$$(4.1) \quad \delta(u) = (r_1(u) + r_2(u))/R(u) = 0,$$

albo z warunku równowagi sił (metoda przemieszczeń, rys. 3a, b)

$$(4.2) \quad k(u) = (R_1(u) + R_2(u))/r(u) = 0.$$

Za pomocą funkcji Koloušek'a warunki (4.1) i (4.2) możemy zapisać odpowiednio dla układów z rys. 2a, b i 3a, b w postaci

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \delta(u) &= (l_1/EI) K_7^{-1}(u_1) + (l_2/EI) K_7^{-1}(u_2) = 0, \\ \delta(u) &= (l_1/EI) K_{15}^{-1}(u_1) + (l_2/EI) K_7^{-1}(u_2) = 0, \\ k(u) &= (EI/l_1) K_7(u_1) + (EI/l_2) K_7(u_2) = 0, \\ k(u) &= (EI/l_1) K_{15}(u_1) + (EI/l_2) K_7(u_2) = 0, \end{aligned}$$

gdzie l_1, l_2 są długościami prętów (rys. 1), a

$$\begin{aligned} u_1 &= \pi \sqrt{\beta} (l_1/l_0) = \pi \sqrt{\beta} x, \\ u_2 &= \pi \sqrt{\beta} (l_2/l_0) = \pi \sqrt{\beta} (1-x) \end{aligned}$$

na podstawie (3.3) przy założeniu, że $l_0 = L$ i uwzględnieniu, że $l_1/L = x$, $l_2/L = 1-x$.

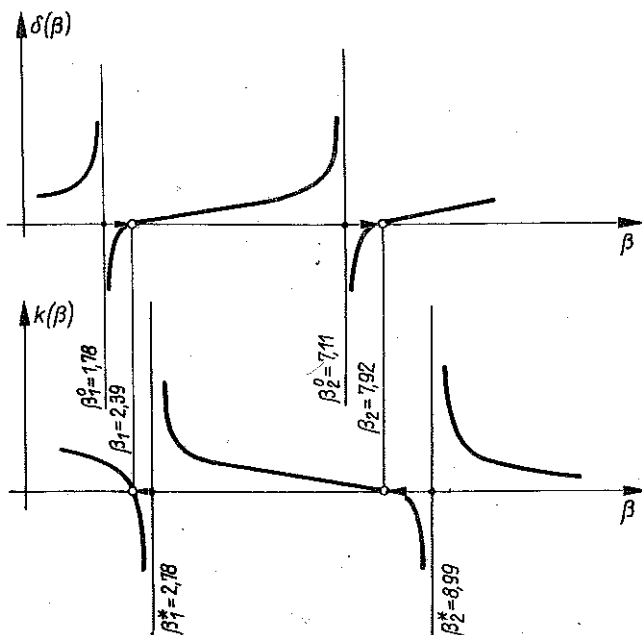
Zgodnie z koncepcją algorytmu [3, 7 i 10] działającego na zasadzie wykorzystania własności ciągów Sturm'a, liczbę N częstości drgań własnych β_n układu złożonego, spełniających warunek $\beta_n \leq \beta$ obliczymy dla metody sił i metody przemieszczeń odpowiednio ze wzorów

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N(\beta) &= N^0(\beta) - L^0(\beta), \\ N(\beta) &= N^*(\beta) + L^*(\beta). \end{aligned}$$

We wzorach tych N^0, N^* oznaczają liczby częstości własnych β_n^0, β_n^* obydwu podkonstrukcji odpowiednio z rys. 2a, b i 3a, b takich, że $\beta_n^0 \leq \beta, \beta_n^* \leq \beta$, a

$$(4.5) \quad \begin{aligned} L^0 &= \begin{cases} 0 & \text{dla } \delta(u) \geq 0, \\ 1 & \text{dla } \delta(u) < 0, \end{cases} \\ L^* &= \begin{cases} 0 & \text{dla } k(u) > 0, \\ 1 & \text{dla } k(u) \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dla wyjaśnienia sensu wzorów (4.4) i (4.5) zauważmy, że zgodnie z (4.3) i rozważaniami p. 3 zbiory biegunów funkcji $\delta(u)$ i $k(u)$ są odpowiednio identyczne z sumami logicznymi widm obydwu podkonstrukcji z rys. 2a, b i 3a, b. Z charakteru przebiegu funkcji $\delta(u)$ i $k(u)$ pokazanych schematycznie na rys. 5 wynika, że widmo konstrukcji złożonej powstaje przez przesuwanie się poszczególnych elementów łącznego widma obu podkonstrukcji. Przesuwanie to, znajdujące swój wyraz we wzorach (4.4) i (4.5), następuje w prawo dla metody sił i w lewo dla metody przemieszczeń. Wiąże się to z nakładaniem więzów kinematycznych przy scalaniu układu w przypadku pierwszym i ich usuwaniem — w drugim. Z rozważań tych wynikają istotne



Rys. 5

dla celów numerycznych oszacowania

$$\beta_n^0 < \beta_n < \beta_n^*, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

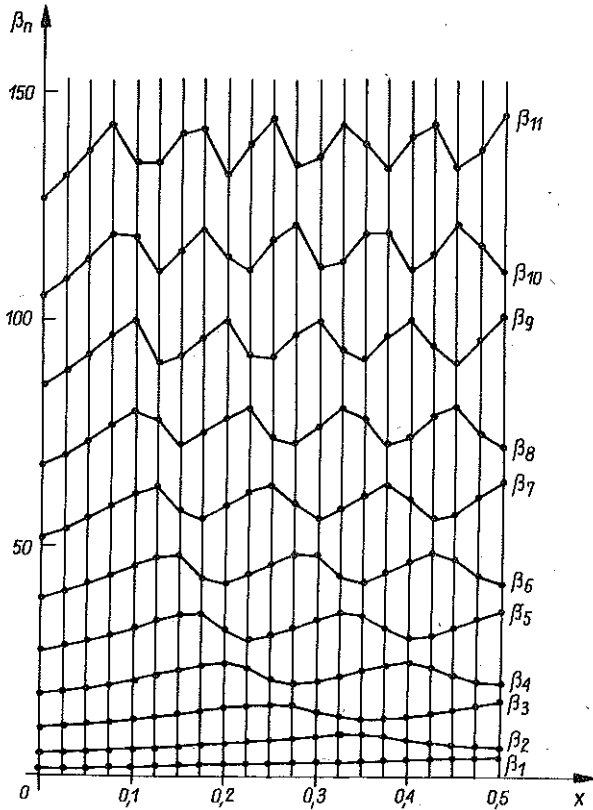
Na podstawie wzorów (4.4) i (4.5) można obliczyć każdą z częstości własnych układu złożonego wykorzystując znajomość częstości własnych wszystkich jego podukładów. Wyniki obliczeń dolnych odcinków widm układów z rys. 1a, b przedstawiono na rys. 6 i 7 w postaci zbiorów rzędnych funkcji $\beta_n(x)$ odpowiadających wartościom $x = 0,0$ (0,025) 0,5.

5. ROZWIĄZANIA OPTYMALNE

Jak wynika ze sporządzonych wykresów (rys. 6 i 7) częstości własne $\beta_n(x)$ są funkcjami o wzrastającej wraz z n liczbie ekstremów oraz rosnącej amplitudzie ich oscylacji. W takiej sytuacji przy poszukiwaniu rozwiązania optymalnego $x^*(\beta)$, odpowiadającego pewnej ustalonej częstości wymuszenia β , z reguły nie wiadomo *a priori*, które z częstości własnych powinny występować w określeniu funkcji celu o dotąd stosowanej postaci [5, 8 i 9]

$$F(x, \beta) = \min(\beta - \beta_i(x), \beta_{i+1}(x) - \beta).$$

Zależnie od wyboru wartości β może się bowiem zdarzyć, że ta sama z częstości własnych będzie oscylować wraz ze zmianą wartości zmiennej x przyjmując



Rys. 6

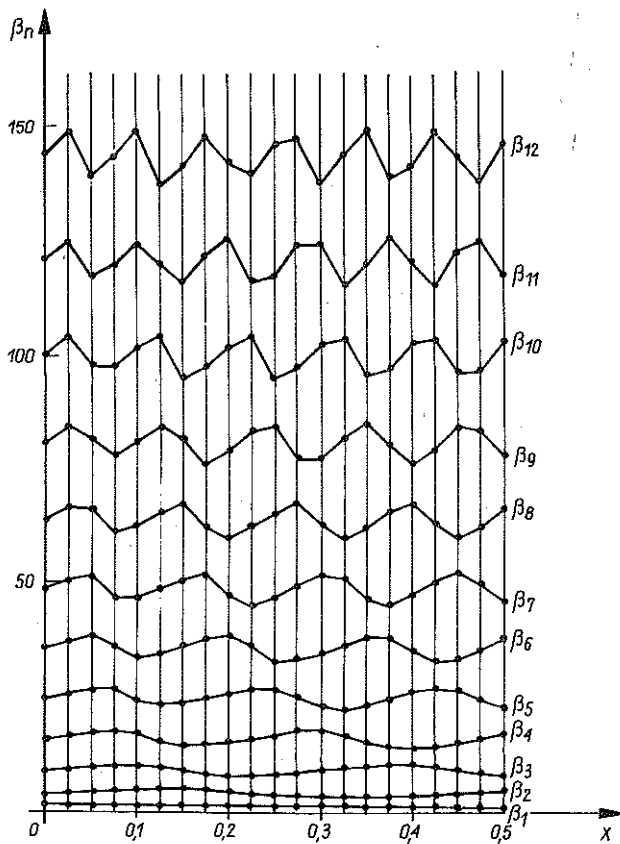
wartości zarówno większe, jak też i mniejsze od β .

Z powyższego wynika, że zbudowanie uniwersalnego algorytmu przestrajania optymalnego wymaga uogólnienia stosowanej dotąd postaci funkcji celu. Jak się obecnie wydaje, w określeniu tej funkcji powinny występować nie dwie, a co najmniej cztery częstotliwości własne

$$(5.1) \quad F(x, \beta) = \min (|\beta_i(x) - \beta|, \quad i = l-1, l, l+1, l+2),$$

przy czym liczbę $l = N(\beta)$ należy wyznaczać dla początkowej wartości zmiennej $x = x^0$ z właściwych wzorów (4.4) i (4.5). Ze względu na złożoność zagadnień dynamiki trudno obecnie przewidzieć, czy funkcja celu o postaci (5.1) jest już dostatecznie ogólna dla wszystkich zadań przestrajania optymalnego.

W związku z wieloekstremalnością funkcji $F(x, \beta)$ względem zmiennej x —przy budowie algorytmu uniwersalnego powstaje problem właściwego doboru metody poszukiwania $\max F(x, \beta)$ przy dowolnym, ale ustalonym β . Problem ten pozostawimy w obecnej pracy jako otwarty, rozwiążemy natomiast zagadnienie optymalizacji dyskretnej posługując się metodą systematycznego



Rys. 7

przeszukiwania. Zadanie będzie polegać na wyznaczeniu rozwiązań optymalnych $x^*(\beta)$ w dyskretnym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych

$$D_0 = \{x_i = 0,025(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, 21\}$$

przy założeniu, że zmienna β należy do zbioru

$$E_0 = \{\bar{\beta}_j = 0,5j, \quad j = 1, 2, \dots, N\}.$$

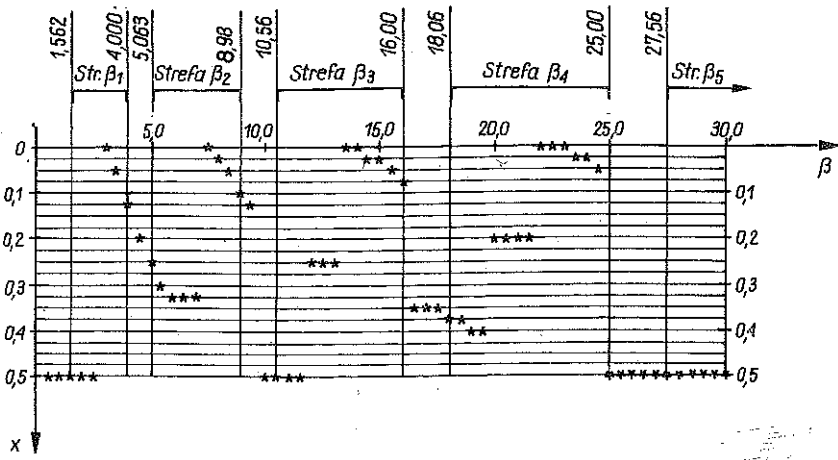
Jako optymalne dla danego $\beta \in E_0$ przyjmujemy takie rozwiązanie $x^*(\beta) \in D_0$, dla każdego osiągnięte jest maksimum funkcji celu

$$F(x, \beta) = \min_{k \in J} |\beta_k(x) - \beta|, \quad J = \{1, 2, \dots, n\},$$

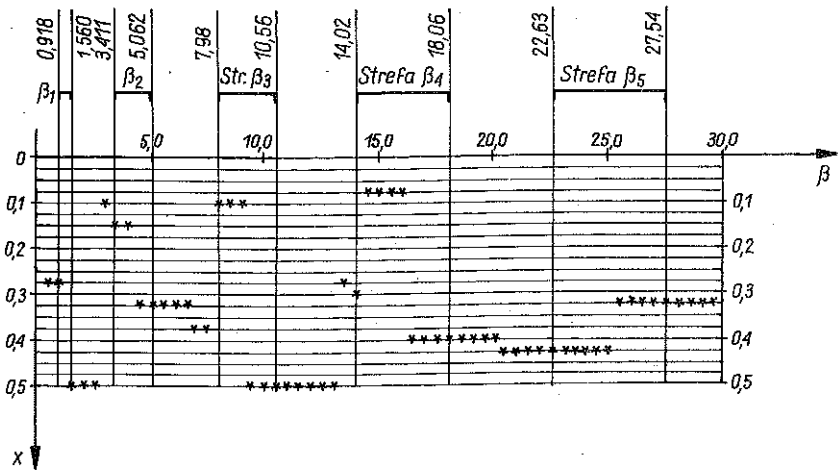
tzn.

$$\max_{x \in D_0} F(x, \beta) = F(x^*(\beta), \beta) = F^*(\beta), \quad \beta \in E_0.$$

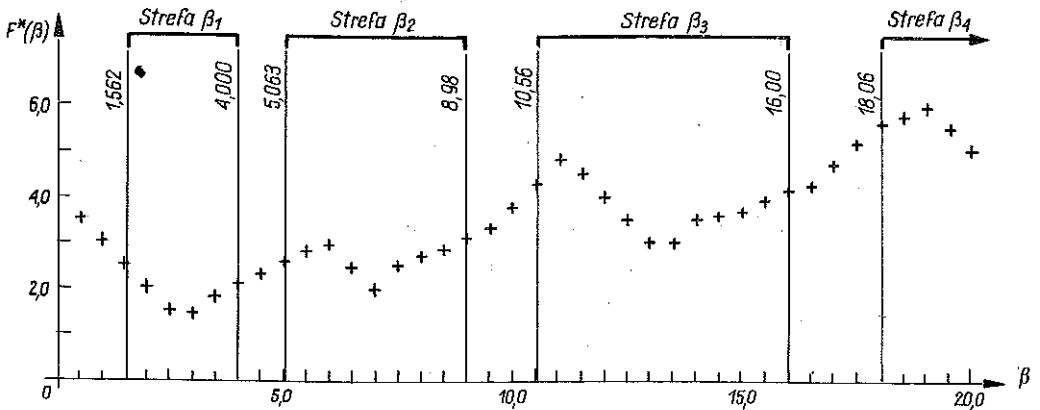
W obliczeniach przeprowadzonych dla konstrukcji z rys. 1a, b przyjęto odpowiednio: $N = 300, n = 11$ oraz $N = 310, n = 12$.



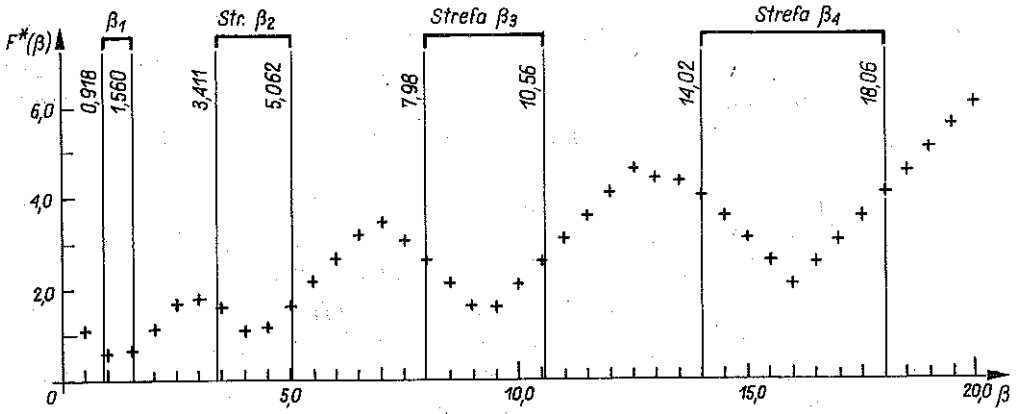
Rys. 8



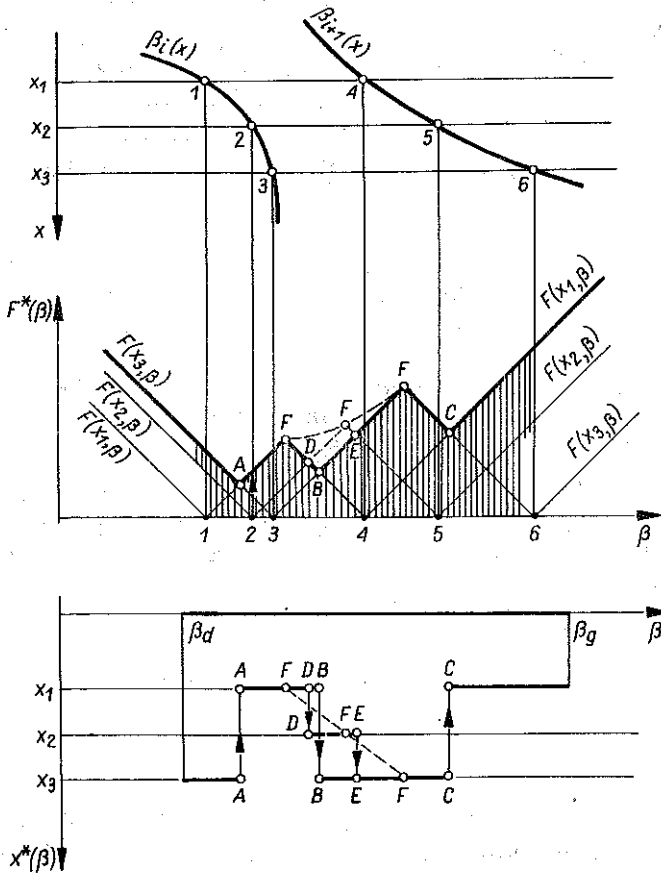
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Otrzymane na drodze numerycznej rozwiązania optymalne oraz odpowiadające im wartości funkcji celu przedstawiono na rys. 8–11 w postaci rzędnych oznaczonych krzyżykami. Każda z wartości $F^*(\beta)$ jest odległością pomiędzy daną częstością wymuszenia $\beta \in E_0$, a najbliższą częstością własną β_n konstrukcji.

Jak wykazuje dokładniejsza analiza, w przypadku gdy $x \in D_0$ i $\beta \in E = \{\beta: \beta_d \leq \beta \leq \beta_g\}$ rozwiązanie optymalne $x^*(\beta)$ staje się odcinkowo stałe z nieciągłościami typu skokowego na dyskretnym zbiorze $E_1 \subset E$ minimów lokalnych funkcji $F^*(\beta)$. Funkcja ta jest w tym przypadku ciągła i odcinkowo liniowa o dwuwartościowej pochodnej $F^{*'}(\beta) = \pm 1$ nieokreślonej na E_1 . Jeżeli natomiast $x \in D = \{x: x_d \leq x \leq x_g\}$ i $\beta \in E$, to funkcja $x^*(\beta)$ jest odcinkowo ciągła z mniejszą niż w poprzednim przypadku liczbą punktów nieciągłości na $E_2 \subset E_1$. Odpowiedni wykres $F^*(\beta)$ ulega odcinkowym wygładzeniom powodującym znikanie części minimów lokalnych.

Omawiane własności funkcji $x^*(\beta)$ i $F^*(\beta)$ zostały zilustrowane na rys. 12 przy założeniu, że $\beta \in E$ dla trzech różnych zbiorów rozwiązań dopuszczalnych: $D_1 = \{x_1, x_3\}$, $D_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $D_3 = \{x: x_1 \leq x \leq x_3\}$. Wykresy funkcji $F(x_1, \beta)$, $F(x_2, \beta)$ i $F(x_3, \beta)$ są liniami łamanymi o wierzchołkach odpowiednio 1F4, 2F5 i 3F6 (rys. 12b). W każdym z rozważanych trzech przypadków wykresy funkcji $F_i^*(\beta)$, $i = 1, 2, 3$ otrzymuje się na podstawie sumowania logicznego

$$F_i^*(\beta) = \bigcup_{x \in D_i} F(x, \beta), \quad i = 1, 2, 3,$$

obejmującego zbiory rzędnych wszystkich funkcji $F(x, \beta)$ określonych dla $x \in D_i$, $\beta \in E$, $i = 1, 2, 3$. Wykresy funkcji $x_i^*(\beta)$, $F_i^*(\beta)$, $i = 1, 2, 3$ pokazane na rys. 12b, c są liniami przechodzącymi przez odpowiednie ciągi punktów: AFBFC, AFDFEFC, AFFFC. Jak widać, powiększanie liczebności zbioru rozwiązań dopuszczalnych powoduje polepszenie efektu optymalizacji określonego wartością $F^*(\beta)$ oraz równoczesne podwyższenie regularności strategii optymalnej $x^*(\beta)$.

6. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie przeprowadzonej analizy rozwiązań optymalnych stwierdzamy, że optymalny dobór schematu każdej z rozważanych belek (rys. 1a, b) wymaga przemieszczania jej środkowej podpory w szerokim zakresie wartości zmiennej x . Takie modyfikowanie schematu konstrukcji jest w praktyce na ogół rzadko wykonalne, schemat ten bowiem ustalany jest zazwyczaj

na podstawie innych niż dynamiczne przesłanek projektowania. Sformułowane i rozwiązane w pracy zadanie ma więc przede wszystkim znaczenie poznawcze, tym zresztą większe, że możliwości optymalnego przestrajania konstrukcji drgających nie zostały jeszcze dotąd ostatecznie zbadane. Zadanie to nabiera jednak również istotnego znaczenia praktycznego w przypadkach, gdy położenie podpory może się zmieniać choćby nawet tylko w niewielkich granicach. Przypadki takie zdarzają się w praktyce dość często zwłaszcza przy projektowaniu konstrukcji nośnych i fundamentów maszyn. W przypadkach tych dążenie do uzyskania optymalnego przestrojenia układu w ramach istniejących możliwości staje się naturalne i celowe.

Przy ocenie otrzymanych wyników analizy na podkreślenie zasługuje fakt, że dotyczą one takich własności rozważanego zagadnienia, które są typowe dla większości zadań związanych z optymalną modyfikacją widm częstości drgań własnych. Przeprowadzona w pracy analiza ma więc znaczenie ogólniejsze od tego, jakie wynika z rozwiązania konkretnego zadania. Można w związku z tym mieć nadzieję, że przyczyni się ona do ostatecznego wyjaśnienia i oceny możliwości przestrajania optymalnego w aspekcie zastosowań praktycznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. J. BOX, *A comparison of several current optimization methods and the use of transformations in constrained problems*, Computer J., 9, 1966, 67—77.
2. R. L. FOX, *Optimization methods for engineering design*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1971.
3. O. FRIBERG, *Exact methods in coupled vibrations of beams and in dynamic substructure synthesis*, Chalmers University of Technology, Division of Solid Mechanics, Göteborg 1984.
4. В. КОЛОУШЕК, *Динамика строительных конструкций*, Стройиздат, Москва 1965.
5. B. OLSZOWSKI, *Some problems of optimum design of vibrating systems*, Arch. Mech., 27, 4, 605—615, 1975.
6. B. OLSZOWSKI, *O rekurencyjności widm częstości drgań własnych, część I i II*, Rozpr. Inż., 26, 1, 51—64, 65—89, 1978.
7. B. OLSZOWSKI, *Analiza ciągów drgań własnych w płaskich układach prętowych*, Zesz. Nauk., nr 1, Polit. Krakowska, 1980.
8. B. OLSZOWSKI, A. TOMANA, *Optymalne kształtowanie prętowych układów drgających*, W: Optymalizacja wytrzymałościowa konstrukcji, Ossolineum, 403—421, 1983.
9. A. TOMANA, *Zastosowanie ściśtych elementów skończonych do optymalnego kształtowania prętowych układów drgających*, Rozpr. doktorska, Polit. Krakowska, 1980.
10. W. H. WITTRICK, F. W. WILLIAMS, *A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 24, 3, 1971, 263—284.
11. B. ÅKESSON, H. TÄGNFORS, O. JOHANESSON, *Böjsvängande balkar och ramar*, Almqvist et Wiksell, Stockholm 1972.
12. B. ÅKESSON, H. TÄGNFORS, *Tables of eigenmodes for vibrating uniform one-span beams*, Publication no 23, Division of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Gothenburg 1971.

РЕЗЮМЕ

ПОДБОР СХЕМЫ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ БАЛКИ ИЗ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕСТРОЙКИ

На примере двухпролетной балки, колеблющейся под гармоническим вынуждением с постоянной частотой, проведен численный анализ спектра собственных частот как функции одной децизионной переменной. На основе этого анализа решена задача дискретной оптимизации методом прямого поиска. Приведено обсуждение качественных свойств оптимальной стратегии в случае, когда децизионная переменная может изменяться непрерывным образом.

SUMMARY

THE CHOICE OF A VIBRATING BEAM SCHEME BASED ON THE OPTIMAL DETUNING CONDITION

Stationary flexural vibrations of a two-span beam subject to harmonic excitation are considered. Numerical analysis of the frequency spectrum considered as a function of one decision variable is performed, and the discrete optimization problem is solved by the means of direct search method. Qualitative properties of the optimal strategy are discussed in the case when the decision variable may change continuously.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lipca 1984 r.
