

LEPKOSPĘŻYSTY ELEMENT CZASOPRZESTRZENNY (*)

ADAM PODHORECKI I ANNA PODHORECKA (BYDGOSZCZ)

Podano sposób modelowania ośrodka lepkospężystego w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. Praca zawiera ogólny algorytm budowy macierzy sztywności elementu czasoprzestrzennego dla dowolnego stanu naprężenia. Podany algorytm charakteryzuje się znaczną prostotą zachowując walory klasycznej metody elementów skończonych.

1. WSTĘP

W pracach KĄCZKOWSKIEGO [1, 2 i 3] przedstawione zostały podstawy metody elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Publikowane prace ilustrowały praktyczną przydatność tej metody (drgania pręta i struny). Analizowano też wpływ tłumienia zewnętrznego typu lepkiego przy drganiach podłużnych pręta [4] oraz tłumienia wewnętrznego według modelu Kelvina-Voigta [3].

Tłumienie wewnętrzne (materiałowe) w metodzie elementów skończonych (MES) i innych metodach numerycznych opisuje się głównie lepkospężystym modelem Kelvina-Voigta. Model ten nie w pełni opisuje lepkospężyste właściwości ciał rzeczywistych, w związku z czym zachodzi potrzeba tworzenia bardziej złożonych modeli. W liniowej lepkospężystości rozróżniamy następujące modele [5]: Hooke'a (rys. 1a), Kelvina-Voigta (rys. 1b), Maxwella (rys. 1c), Zenera I-go i II-go rodzaju (rys. 1d, e) oraz Bürgersa (rys. 1f).

2. RÓWNANIA STANU

Uogólnione prawo Hooke'a można napisać w formie dewiatorowej [6]:

$$(2.1) \quad s_{ij} = 2\mu\gamma_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}$$

*) Praca wykonana w ramach problemu resortowego RI-21 MNSzWIT, koordynowanego przez Politechnikę Warszawską

gdzie

$$(2.2) \quad \begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \\ \gamma_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \end{aligned} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Tensory s_{ij} i γ_{ij} są kolejno dewiatorami stanu naprężenia i odkształcenia. Naprężenia s_{ij} powodują jedynie zmianę postaci, a średnia wartość naprężeń normalnych $\left(\sigma_o = \frac{1}{3} \sigma_{kk}\right)$ — zmianę objętości. W równaniach (2.1) występują dwie stałe materiałowe, moduł odkształcenia postaciowego μ i moduł ściśliwości K :

$$(2.3) \quad \mu \equiv G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

gdzie E oznacza moduł Yunga, a ν — współczynnik Poissona.

W sposób analogiczny do wzorów (2.1) można przedstawić ogólne związki między stanem naprężenia i odkształcenia dla ośrodka lepkosprężystego [5, 6]:

$$\begin{aligned} P_1(D) s_{ij}(x, t) &= P_2(D) \gamma_{ij}(x, t), \\ P_3(D) \sigma_{kk}(x, t) &= P_4(D) \varepsilon_{kk}(x, t), \quad D = \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned}$$

gdzie $P(D)$ są liniowymi operatorami różniczkowymi względem czasu t . Równania (2.4) można napisać w postaci rozwiniętej z wykorzystaniem rachunku wskaźnikowego [5 i 6]

$$(2.5) \quad \begin{aligned} P_1(D) P_3(D) \sigma_{ij} &= P_2(D) P_3(D) \varepsilon_{ij} + \\ &+ \frac{1}{3} \delta_{ij} [P_1(D) P_4(D) - P_2(D) P_3(D)] \varepsilon_{kk}, \end{aligned}$$

lub rachunku macierzowego

$$(2.6) \quad P_1(D) P_3(D) \sigma_x = E^* \varepsilon_x,$$

gdzie

$$(2.7) \quad E^* = \frac{1}{3} P_1(D) P_4(D) L_1 + \frac{1}{2} P_2(D) P_3(D) L_2,$$

jest macierzą lepkosprężystości. Opisy macierzy L_1 i L_2 oraz σ_x i ε_x zależą od analizowanego stanu naprężenia i odkształcenia np. dla przestrzennego stanu naprężenia mamy

$$(2.8) \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \\ & & & & & & 3 \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \text{col} \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \},$$

$$\varepsilon_x = \text{col} \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23} \}.$$

Zakładając, że przy wszechstronnym rozciąganiu lub ściskaniu ośrodki lepkosprężyste zachowuje się tak samo jak ciała sprężyste, otrzymamy niezmiennione równanie (2.1)₂:

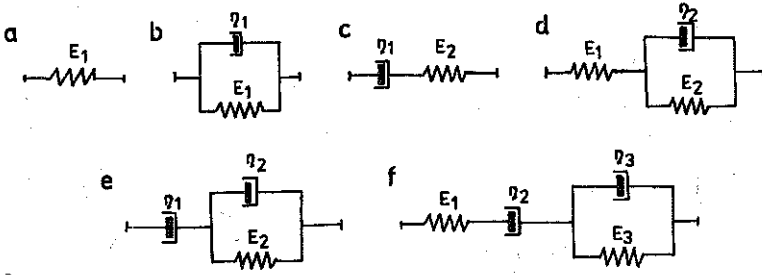
$$(2.9) \quad P_3(D) = 1, \quad P_4(D) = 3K.$$

Operatory różniczkowe $P_1(D)$ i $P_2(D)$ w tym przypadku opisuje się analogicznie do jednoosiowego stanu naprężenia (rys. 1); zawiera je tablica 1.

Można też przyjmować inne założenia [5 i 6] np., że współczynnik Poissona ν jest stały i nie zależy od czasu lub że ciało lepkosprężyste ma właściwość nieściśliwości (wtedy $P_3 = 0$).

Tablica 1

Nazwa modelu	$P_1(D)$	$P_2(D)$	Oznaczenia
Hooke'a	1	$2\mu_1$	$\lambda_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1}$
Kelvina-Voigta	1	$2\mu_1 \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right)$	$\lambda_2 = \frac{\eta_1}{\mu_2}$
Maxwella	$1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}$	$2\lambda_2 \mu_2 \frac{\partial}{\partial t}$	$\lambda_3 = \frac{\eta_2}{\mu_2}$
Zenera I-go rodzaju	$1 + \lambda_3 \theta_1 \frac{\partial}{\partial t}$	$2\theta_1 \mu_1 \left(1 + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$	$\lambda_4 = \frac{\eta_2}{\mu_1}$
Zenera II-go rodzaju	$1 + (\lambda_2 + \lambda_3) \frac{\partial}{\partial t}$	$2\lambda_2 \mu_2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$	$\lambda_5 = \frac{\eta_3}{\mu_3}$
Bürgersa	$1 + \left(\frac{\lambda_4}{\theta_2} + \lambda_5 \right) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_4 \lambda_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$2\lambda_4 \mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$	$\theta_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ $\theta_2 = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3}$



Rys. 1

3. RÓWNANIE CZTEROPRACY WIRTUALNEJ

Rozpatrzmy ciało lepkosprężyste, poddane działaniu sił zewnętrznych $p_i(\mathbf{x}, t)$ zmieniających się w czasie. Pod wpływem tych przyczyn utworzy się w ciele pole przemieszczeń $u_i(\mathbf{x}, t)$ i związane z nim pole odkształceń $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ oraz naprężeń $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$. Równania ruchu nie zależą od własności mechanicznych materiału [5 i 6]:

$$(3.1) \quad \sigma_{ij,j} + X_i - \rho \ddot{u}_i = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t > 0.$$

Warunki brzegowe mają charakter statyczny i kinematyczny

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}) &= p_i(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in S_\sigma, \\ u_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}_i(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in S_u. \end{aligned}$$

Powyższe równania można napisać w postaci macierzowej:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \partial_x^T \sigma_x + X - \rho \ddot{u} &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in V, \\ \mathbf{n} \sigma_x &= \mathbf{p}, & \mathbf{x} \in S_\sigma, \\ \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}}, & \mathbf{x} \in S_u. \end{aligned}$$

Wymiary i opisy poszczególnych macierzy występujących w związkach (3.3) zależą od analizowanego stanu naprężenia. W przypadku przestrzennego stanu naprężenia mamy kolejno

$$(3.4) \quad \partial_x^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & & & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} & & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ & & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$(3.4) \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 & & & n_2 & n_3 \\ & & & & \\ & n_2 & & n_1 & n_3 \\ & & & & \\ & & & n_3 & n_1 & n_2 \end{bmatrix},$$

$$n_i = \cos \angle (\vartheta; x_i),$$

$$\mathbf{X} = \text{col} \{X_1, X_2, X_3\}, \quad \mathbf{p} = \text{col} \{p_1, p_2, p_3\}.$$

Pierwsze dwa równania (3.3) pomnóżmy obustronnie przez $P_1(D)P_3(D)$:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} P_1 P_3 \partial_x^T \sigma_x + P_1 P_3 \mathbf{X} - P_1 P_3 \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ P_1 P_3 \mathbf{n} \sigma_x &= P_1 P_3 \mathbf{p}. \end{aligned}$$

W celu wyprowadzenia równania czteropracy wirtualnej, bryle o objętości V , obserwowanej w czasie od t_i do t_k , nadajemy wirtualne przemieszczenie $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$. Pomnóżmy równanie (3.5)₁ przez $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ i ten iloczyn scałkujemy po obszarze ciała V oraz względem czasu. Brzegowy warunek statyczny (3.5)₂ także pomnóżmy przez $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ i scałkujemy po powierzchni S_σ oraz względem czasu. Z całek tych utwórzmy równanie

$$(3.6) \quad \int_{t_i}^{t_k} \left\{ \int_V \bar{\mathbf{u}}^T [\partial_x^T (P_1 P_3 \sigma_x) + P_1 P_3 \mathbf{X} - P_1 P_3 (\rho \ddot{\mathbf{u}})] dV - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^T [P_1 P_3 (\mathbf{n} \sigma_x) - P_1 P_3 \mathbf{p}] dS \right\} dt = 0.$$

Po zastosowaniu wzoru na obliczenie pochodnej iloczynu funkcji

$$(3.7) \quad \bar{\mathbf{u}}^T \partial_x^T (P_1 P_3 \sigma_x) = \partial_x^T [\bar{\mathbf{u}}^T (P_1 P_3 \sigma_x)] - \bar{\varepsilon}_x^T (P_1 P_3 \sigma_x), \quad \varepsilon_x = \partial_x \mathbf{u}$$

równanie (3.6) możemy sprowadzić do postaci

$$(3.8) \quad \int_{t_i}^{t_k} \left\{ \int_V \bar{\mathbf{u}}^T [P_1 P_3 \mathbf{X} - P_1 P_3 (\rho \ddot{\mathbf{u}})] dV + \int_V \partial_x^T [\bar{\mathbf{u}}^T (P_1 P_3 \sigma_x)] dV - \int_V \bar{\varepsilon}_x^T (P_1 P_3 \sigma_x) dV - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^T [P_1 P_3 (\mathbf{n} \sigma_x)] dS + \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^T (P_1 P_3 \mathbf{p}) dS \right\} dt = 0.$$

Po dokonaniu przekształcenia Gaussa-Ostrogradzkiego [6] na drugiej całce równania (3.8)

$$(3.9) \quad \int_V \partial_x^T [\bar{\mathbf{u}}^T (P_1 P_3 \sigma_x)] dV = \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^T [P_1 P_3 (\mathbf{n} \sigma_x)] dS$$

oraz dobierając dowolne wirtualne przemieszczenie $\bar{\mathbf{u}}$ w ten sposób, aby warunki kinematyczne na powierzchni S_u nie były naruszone, otrzymamy

równanie

$$(3.10) \quad \int_{t_i}^{t_k} \left\{ \int_V \bar{\mathbf{u}}^T [P_1 P_3 \mathbf{X} - P_1 P_3 (\rho \ddot{\mathbf{u}})] dV + \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^T (P_1 P_3 \mathbf{p}) dS - \right. \\ \left. - \int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_x^T (P_1 P_3 \boldsymbol{\sigma}_x) dV \right\} dt = 0.$$

Drugi wyraz pierwszej całki (3.10) może być scałkowany przez części względem czasu:

$$(3.11) \quad \int_{t_i}^{t_k} \int_V \bar{\mathbf{u}}^T [P_1 P_3 (\rho \ddot{\mathbf{u}})] dV dt = \int_V [\bar{\mathbf{u}}_k^T P_1 P_3 (\rho \dot{\mathbf{u}}_k) - \bar{\mathbf{u}}_i^T P_1 P_3 (\rho \dot{\mathbf{u}}_i)] dV - \\ - \int_{t_i}^{t_k} \int_V \dot{\bar{\mathbf{u}}}^T [P_1 P_3 (\rho \dot{\mathbf{u}})] dV dt.$$

W końcu uzyskujemy równanie

$$(3.12) \quad \int_V [\bar{\mathbf{u}}_i^T P_1 P_3 (\rho \dot{\mathbf{u}}_i) - \bar{\mathbf{u}}_k^T P_1 P_3 (\rho \dot{\mathbf{u}}_k)] dV + \int_{t_i}^{t_k} \left\{ \int_V \bar{\mathbf{u}}^T (P_1 P_3 \mathbf{X}) dV + \right. \\ \left. + \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{u}}^T (P_1 P_3 \mathbf{p}) dS \right\} dt = \int_{t_i}^{t_k} \int_V [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_x^T (P_1 P_3 \boldsymbol{\sigma}_x) - \dot{\bar{\mathbf{u}}}^T P_1 P_3 (\rho \dot{\mathbf{u}})] dV dt.$$

Lewą stronę powyższego równania interpretujemy jako „pracę impulsów” zewnętrznych wykonaną na przemieszczeniach wirtualnych, natomiast strona prawa wyraża „pracę impulsów” wewnętrznych wykonaną na odkształceniach wirtualnych. KĄCZKOWSKI takie równanie nazywa równaniem czteropracy wirtualnej [2].

4. MACIERZ SZTYWNOŚCI SKOŃCZONEGO ELEMENTU CZASOPRZESTRZENNEGO

Pole przemieszczeń, odkształceń i prędkości przemieszczeń opisujemy w sposób charakterystyczny dla metody elementów skończonych [7]

$$(4.1) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\delta}_e, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_x = \partial_x \mathbf{u} = \partial_x \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}_e, \\ \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}_e = \dot{\mathbf{N}} \boldsymbol{\delta}_e,$$

gdzie \mathbf{N} jest macierzą kształtu zawierającą funkcje czasoprzestrzenne, a $\boldsymbol{\delta}_e$ zawiera przemieszczenia węzłowe SKECZ.

Do opisu naprężeń wykorzystujemy równanie stanu ośrodka lepkosprężystego (2.6):

$$(4.2) \quad P_1 P_3 \sigma_x = E^* \varepsilon_x = E^* B \delta_e.$$

Nadajemy teraz skończonemu elementowi czasoprzestrzennemu (SKECZ) wirtualne przemieszczenia δ_e^T . Wirtualne przemieszczenia i odkształcenia można uzyskać podstawiając ich wirtualne przyrosty do wzorów (4.1). Równanie czteropracy wirtualnej przyjmuje dla skończonego elementu czasoprzestrzennego o obszarze $\Omega = V \times t$ lub $\Omega_s = S_\sigma \times t$ następującą postać [2]:

$$(4.3) \quad \delta_e^T F_e + \iint_{\Omega} \bar{u}^T (P_1 P_3 X) d\Omega + \iint_{\Omega_s} \bar{u}^T (P_1 P_3 p) d\Omega_s = \\ = \iint_{\Omega} [\bar{\varepsilon}_x^T (P_1 P_3 \sigma_x) - \dot{\bar{u}}^T P_1 P_3 (\rho \dot{u})] d\Omega.$$

Po wykorzystaniu związków (4.1) otrzymujemy znany wzór

$$(4.4) \quad F_e = K_e \delta_e - F_e^p,$$

w którym

$$(4.5) \quad K_e = \iint_{\Omega} [B^T E^* B - \dot{N}^T (P_1 P_3 \rho \dot{N})] d\Omega$$

oznacza macierz sztywności SKECZ, a

$$(4.6) \quad F_e^p = \iint_{\Omega} N^T (P_1 P_3 X) d\Omega + \iint_{\Omega_s} N^T (P_1 P_3 p) d\Omega_s,$$

impulsy węzłowe SKECZ od obciążenia objętościowego X i powierzchniowego p . Macierz lepkosprężystości E^* określa wzór (2.7). Jeżeli obowiązywać będzie założenie o sprężystym odkształceniu objętościowym (2.9), to na podstawie tablicy 1, zawierającej operatory $P(D)$, możemy inaczej wyrazić wzory (4.5) i (4.6):

$$(4.7) \quad K_e = \iint_{\Omega} \{ B^T [(KL_1 + \alpha_1 \mu L_2) B + (\alpha_4 KL_1 + \alpha_2 \mu L_2) \dot{B} + \\ + (\alpha_5 KL_1 + \alpha_3 \mu L_2) \ddot{B}] - \dot{N}^T \rho [\dot{N} + \alpha_4 \ddot{N} + \alpha_5 \ddot{\ddot{N}}] \} d\Omega, \\ F_e^p = \iint_{\Omega} N^T (X + \alpha_4 \dot{X} + \alpha_5 \ddot{X}) d\Omega + \iint_{\Omega_s} N^T (p + \alpha_4 \dot{p} + \alpha_5 \ddot{p}) d\Omega_s,$$

przy czym współczynniki α zawiera tablica 2.

W przypadku założenia, że ośrodek ma jednakowe własności lepkosprężyste przy odkształceniu objętościowym i postaciowym macierz sztywności SKECZ ma postać

$$(4.8) \quad K_e = \iint_{\Omega} [\alpha_1 B^T E B + \alpha_2 B^T E \dot{B} + \alpha_3 B^T E \ddot{B}] d\Omega - \\ - \iint_{\Omega} [\dot{N}^T \rho \dot{N} + \alpha_4 \dot{N}^T \rho \ddot{N} + \alpha_5 \dot{N}^T \rho \ddot{\ddot{N}}] d\Omega,$$

Tablica 2

Nazwa modelu	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Hooke'a	1				
Kelvina-Voigta	1	λ_1			
Maxwella		λ_2		λ_2	
Zenera I-go rodzaju	θ_1	$\theta_1 \lambda_3$		$\theta_1 \lambda_3$	
Zenera II-go rodzaju		λ_2	$\lambda_2 \lambda_3$	$\lambda_2 + \lambda_3$	
Bürgersa		λ_4	$\lambda_4 \lambda_5$	$\frac{\lambda_4}{\theta_2} + \lambda_5$	$\lambda_4 \lambda_5$

gdzie \mathbf{E} oznacza macierz sprężystości [7]. Macierz \mathbf{F}_e^p określa wzór (4.6) lub (4.7)₂.

5. FUNKCJE KSZTAŁTU SKECZ

Funkcje kształtu dla skończonego elementu czasoprzestrzennego dobiera się w sposób charakterystyczny dla MES [7]. Ze wzorów (4.7) lub (4.8) wynika, że zmienność funkcji kształtu względem czasu musi być różnego stopnia w zależności od przyjętego modelu lepkosprężystości. I tak w przypadku modeli Hooke'a i Kelvina-Voigta wystarcza liniowa zmienność względem czasu [1, 2, 3 i 4]. Jeżeli natomiast ośrodek lepkosprężysty opisujemy modelami Maxwella lub Zenera muszą to być funkcje co najmniej kwadratowe, a jeżeli jest to model czteroparametrowy (Bürgersa), muszą być co najmniej sześciennne. Kształt i liczba węzłów SKECZ mogą być dowolne (rys. 2).

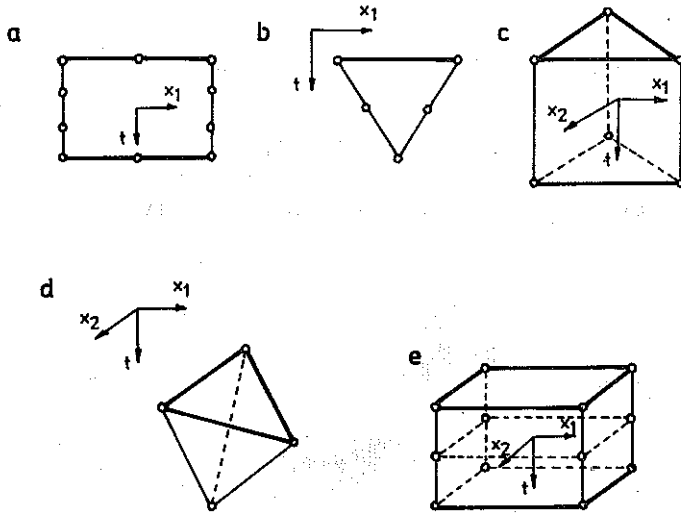
W przypadku równomiernej dyskretyzacji po współrzędnej czasowej (rys. 3) macierz kształtu $\mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$ możemy rozdzielić przy pomocy iloczynu tensorowego macierzy „ \otimes ” [3] na dwie macierze: jedną zależną wyłącznie od zmiennej czasowej \mathbf{N}_t i drugą zależną od zmiennych przestrzennych \mathbf{N}_x :

$$(5.1) \quad \mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_t \otimes \mathbf{N}_x$$

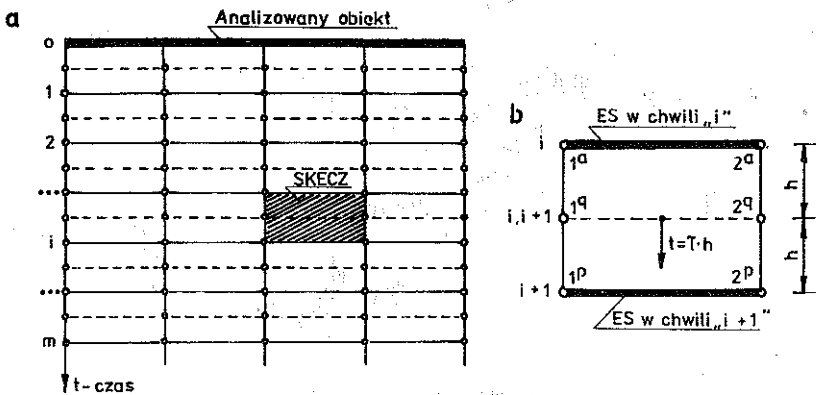
Formuła (5.1) umożliwia różniczkowanie względem czasu macierzy kształtu \mathbf{N}_t . Macierze sztywności można więc napisać w innej postaci:

dla przypadku jednakowych własności lepkosprężystych przy odkształceniu objętościowym i postaciowym (4.8):

$$(5.2) \quad \mathbf{K}_e = \int_t (\alpha_1 \mathbf{N}_t^T \mathbf{N}_t + \alpha_2 \mathbf{N}_t^T \dot{\mathbf{N}}_t + \alpha_3 \mathbf{N}_t^T \ddot{\mathbf{N}}_t) dt \otimes \mathbf{S}_e - \\ - \int_t (\mathbf{N}_t^T \dot{\mathbf{N}}_t + \alpha_4 \mathbf{N}_t^T \ddot{\mathbf{N}}_t + \alpha_5 \mathbf{N}_t^T \ddot{\mathbf{N}}_t) dt \otimes \mathbf{M}_e,$$



Rys. 2



Rys. 3

gdzie

$$(5.3) \quad S_e = \int_V B_x^T E B_x dV, \quad M_e = \int_V N_x^T \rho N_x dV$$

oznaczają kolejno statyczną macierz sztywności i macierz bezwładności [3, 7];
dla przypadku własności sprężystych przy odkształceniu objętościowym
i lepkosprężystych przy odkształceniu postaciowym (4.7)₁:

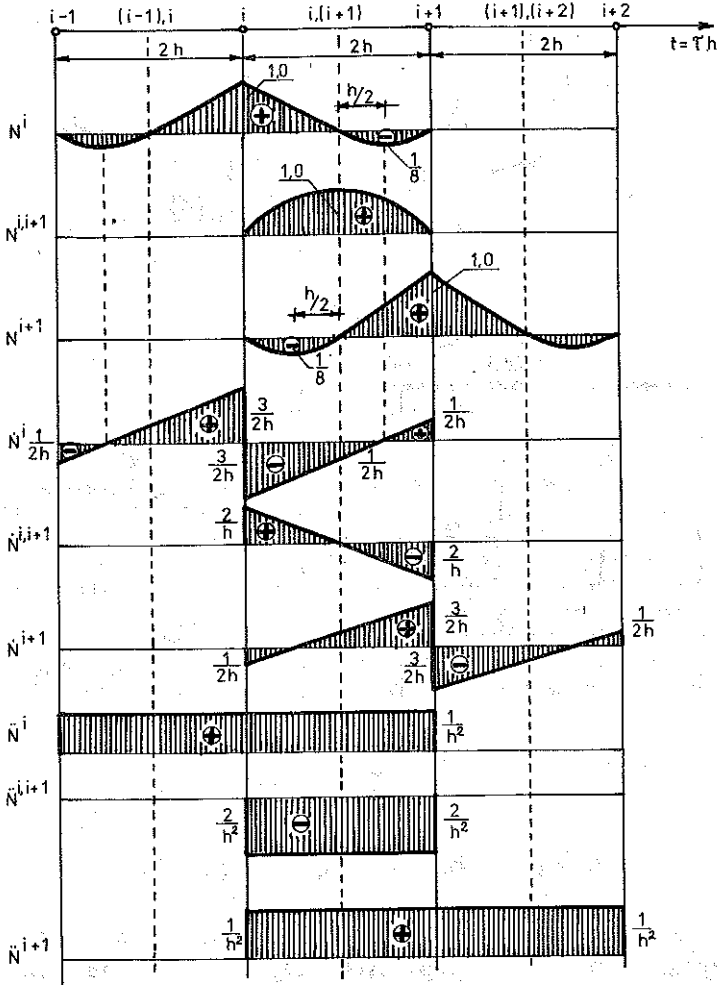
$$(5.4) \quad K_e = \int_t (N_t^T N_t + \alpha_4 N_t^T \dot{N}_t + \alpha_5 N_t^T \ddot{N}_t) dt \otimes S_{e0} + \\ + \int_t (\alpha_1 N_t^T N_t + \alpha_2 N_t^T \dot{N}_t + \alpha_3 N_t^T \ddot{N}_t) dt \otimes S_{ep} - \\ - \int_t (\dot{N}_t^T \dot{N}_t + \alpha_4 \dot{N}_t^T \ddot{N}_t + \alpha_5 \ddot{N}_t^T \ddot{N}_t) dt \otimes M_e,$$

gdzie

$$(5.5) \quad S_{e0} = K \int_V \mathbf{B}_x^T \mathbf{L}_1 \mathbf{B}_x dV, \quad S_{ep} = \mu \int_V \mathbf{B}_x^T \mathbf{L}_2 \mathbf{B}_x dV$$

oznaczają kolejno statyczne macierze sztywności objętościowej i postaciowej.

Dla elementu czasoprzestrzennego przedstawionego na rysunku 3b macierz kształtu \mathbf{N}_i opisana jest funkcjami kwadratowymi (rys. 4):



Rys. 4

$$(5.6) \quad \mathbf{N}_i^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau(\tau-1) \\ \dots \\ 2(1-\tau^2) \\ \dots \\ \tau(\tau+1) \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \tau \leq 1.$$

Można z kolei obliczyć pochodne N_i :

$$(5.7) \quad \dot{N}_i^T = \frac{d}{dt} N_i^T = \frac{d}{hd\tau} N_i^T = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 2\tau - 1 \\ \dots \\ -4\tau \\ \dots \\ 2\tau + 1 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{N}_i^T = \frac{d}{hd\tau} \dot{N}_i^T = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ -2 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

oraz scałkować iloczyny zależne od macierzy kształtu N_i , które zawarte są we wzorach (5.2) i (5.4):

$$(5.8) \quad \int_i N_i^T N_i dt = \int_{-1}^1 N_i^T N_i h d\tau = \frac{h}{15} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 2 & 16 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\int_i N_i^T \dot{N}_i dt = \int_{-1}^1 N_i^T \dot{N}_i h d\tau = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -4 & 0 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\int_i \dot{N}_i^T N_i dt = \int_{-1}^1 \dot{N}_i^T N_i h d\tau = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 4 & -8 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\int_i \dot{N}_i^T \dot{N}_i dt = \int_{-1}^1 \dot{N}_i^T \dot{N}_i h d\tau = \frac{1}{6h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -8 & 16 & -8 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\int_i \ddot{N}_i^T \ddot{N}_i dt = \int_{-1}^1 \ddot{N}_i^T \ddot{N}_i h d\tau = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przyjęcie kwadratowych funkcji kształtu pozwala opisać ośrodek lepko-sprężysty następującymi modelami: Hooke'a, Kelvina-Voigta, Maxwella i Zenera. Wykorzystując wzory (5.8), macierzom sztywności SKECZ (5.2) i (5.4) nadamy kolejno następujące formy:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \alpha_1 h - \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{3h} \alpha_3 & \frac{2}{15} \alpha_1 h + \frac{2}{3} \alpha_2 - \frac{2}{3h} \alpha_3 \\ \frac{2}{15} \alpha_1 h - \frac{2}{3} \alpha_2 + \frac{4}{3h} \alpha_3 & \frac{16}{15} \alpha_1 h - \frac{8}{3h} \alpha_3 \\ -\frac{1}{15} \alpha_1 h + \frac{1}{6} \alpha_2 + \frac{1}{3h} \alpha_3 & \frac{2}{15} \alpha_1 h - \frac{2}{3} \alpha_2 - \frac{2}{3h} \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$(5.9) \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} \alpha_1 h - \frac{1}{6} \alpha_2 + \frac{1}{3h} \alpha_3 \\ \frac{2}{15} \alpha_1 h + \frac{2}{3} \alpha_2 + \frac{4}{3h} \alpha_3 \\ \frac{4}{15} \alpha_1 h + \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{3h} \alpha_3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} \frac{7}{6h} - \frac{1}{h^2} \alpha_4 & -\frac{4}{3h} + \frac{2}{h^2} \alpha_4 \\ -\frac{4}{3h} & \frac{8}{3h} \\ \frac{1}{6h} + \frac{1}{h^2} \alpha_4 & -\frac{4}{3h} - \frac{2}{h^2} \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\otimes \mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{6h} - \frac{1}{h^2} \alpha_4 \\ -\frac{4}{3h} \\ \frac{7}{6h} + \frac{1}{h^2} \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} h - \frac{1}{2} \alpha_4 + \frac{1}{3h} \alpha_5 & \frac{2}{15} h + \frac{2}{3} \alpha_4 - \frac{2}{3h} \alpha_5 \\ \frac{2}{15} h - \frac{2}{3} \alpha_4 + \frac{4}{3h} \alpha_5 & \frac{16}{15} h - \frac{8}{3h} \alpha_5 \\ -\frac{1}{15} h + \frac{1}{6} \alpha_4 + \frac{1}{3h} \alpha_5 & \frac{2}{15} h - \frac{2}{3} \alpha_4 - \frac{2}{3h} \alpha_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad & \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{15}h - \frac{1}{6}\alpha_4 + \frac{1}{3h}\alpha_5 \\ \frac{2}{15}h + \frac{2}{3}\alpha_4 + \frac{4}{3h}\alpha_5 \\ \frac{4}{15}h + \frac{1}{2}\alpha_4 + \frac{1}{3h}\alpha_5 \end{array} \right] \otimes \mathbf{S}_{e0} + \left[\begin{array}{c} \frac{4}{15}\alpha_1 h - \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{3h}\alpha_3 \\ \frac{2}{15}\alpha_1 h - \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{4}{3h}\alpha_3 \\ -\frac{1}{15}\alpha_1 h + \frac{1}{6}\alpha_2 + \frac{1}{3h}\alpha_3 \end{array} \right] \\
 & \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{15}\alpha_1 h + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3h}\alpha_3 & -\frac{1}{15}\alpha_1 h - \frac{1}{6}\alpha_2 + \frac{1}{3h}\alpha_3 \\ \frac{16}{15}\alpha_1 h - \frac{8}{3h}\alpha_3 & \frac{2}{15}\alpha_1 h + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{4}{3h}\alpha_3 \\ \frac{2}{15}\alpha_1 h - \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3h}\alpha_3 & \frac{4}{15}\alpha_1 h + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{3h}\alpha_3 \end{array} \right] \otimes \mathbf{S}_{ep} - \\
 & \left[\begin{array}{ccc} \frac{7}{6h} - \frac{1}{h^2}\alpha_4 & -\frac{4}{3h} + \frac{2}{h^2}\alpha_4 & \frac{1}{6h} - \frac{1}{h^2}\alpha_4 \\ -\frac{4}{3h} & \frac{8}{3h} & -\frac{4}{3h} \\ \frac{1}{6h} + \frac{1}{h^2}\alpha_4 & -\frac{4}{3h} - \frac{2}{h^2}\alpha_4 & \frac{7}{6h} + \frac{1}{h^2}\alpha_4 \end{array} \right] \otimes \mathbf{M}_e.
 \end{aligned}$$

Macierze \mathbf{S}_e i \mathbf{M}_e nie zależą od modelu lepkospłężystego. Ustala się je w sposób typowy dla klasycznej metody elementów skończonych, a więc dla przestrzennego elementu skończonego (ES).

Struktura macierzy sztywności dla przyjętego SKECZ jak na rysunku 3b jest następująca:

$$(5.10) \quad \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{aa} & \mathbf{K}_e^{aq} & \mathbf{K}_e^{ap} \\ \mathbf{K}_e^{qa} & \mathbf{K}_e^{qq} & \mathbf{K}_e^{qp} \\ \mathbf{K}_e^{pa} & \mathbf{K}_e^{pq} & \mathbf{K}_e^{pp} \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{K}_e^{rs} ($r, s = a, p, q$) jest podmacierzą macierzy \mathbf{K}_e zawierającą współczynniki sztywności w chwili r , które powstają od jednostkowych przemieszczeń w chwili s . Współczynniki te obliczamy wprost ze wzorów (5.9).

gdzie

$$(6.6) \quad \Delta^i = \begin{bmatrix} \delta^{i,i+1} \\ \vdots \\ \delta^{i+1,i} \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} K^{aa} & K^{ap} \\ \vdots & \vdots \\ K^{qa} & K^{qp} \end{bmatrix},$$

$$P^i = \begin{bmatrix} F^i - rK^{pa} \delta^{i-1} - rK^{pq} \delta^{i-1,i} - (K^{aa} + rK^{pp}) \delta^i \\ \vdots \\ F^{i,i+1} - K^{qa} \delta^i \end{bmatrix},$$

$$r = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0, \\ 1 & \text{dla } i \geq 1. \end{cases}$$

Macierz K_0 oraz inne podmacierze występujące we wzorach (6.6) mogą być stałe bądź zmieniać się w czasie, jeżeli zmianie ulegają np. własności lepkospřężyste ośrodka, bezwładność lub kinematyczne warunki brzegowe.

Proces rekurencyjny można też ustalić eliminując z układu równań (6.1) przemieszczenia w chwilach pośrednich $\delta^{0,1}, \delta^{1,2}, \delta^{2,3}, \dots$:

$$(6.7) \quad \delta^1 = B^{-1} \tilde{F}^0 - B^{-1} A \delta^0,$$

$$\delta^i = B^{-1} \tilde{F}^{i-1} - B^{-1} (A+D) \delta^{i-1} - B^{-1} C \delta^{i-2}, \quad i = 2, 3, 4, \dots,$$

gdzie

$$(6.8) \quad \tilde{F}^0 = (K^{aa})^{-1} F^0 - (K^{qa})^{-1} F^{0,1},$$

$$A = -(K^{qa})^{-1} K^{qa} + (K^{aa})^{-1} K^{aa},$$

$$B = (K^{aa})^{-1} K^{ap} - (K^{qa})^{-1} K^{qp},$$

$$C = (K^{aa})^{-1} K^{pa},$$

$$D = (K^{aa})^{-1} K^{pp},$$

$$\tilde{F}^{i-1} = (K^{aa})^{-1} F^{i-1} - (K^{qa})^{-1} F^{i-1,i} - (K^{aa})^{-1} K^{pq} \delta^{i-2,i-1},$$

$$\delta^{0,1} = B_1^{-1} (K^{ap})^{-1} F^0 - B_1^{-1} (K^{qp})^{-1} F^{0,1} + B_1^{-1} A_1 \delta^0,$$

$$\delta^{i-1,i} = B_1^{-1} (K^{ap})^{-1} F^{i-1} - B_1^{-1} (K^{qp})^{-1} F^{i-1,i} - B_1^{-1} C_1 \delta^{i-2} -$$

$$- B_1^{-1} (K^{ap})^{-1} K^{pa} \delta^{i-2,i-1} + B_1^{-1} (A_1 + D_1) \delta^{i-1},$$

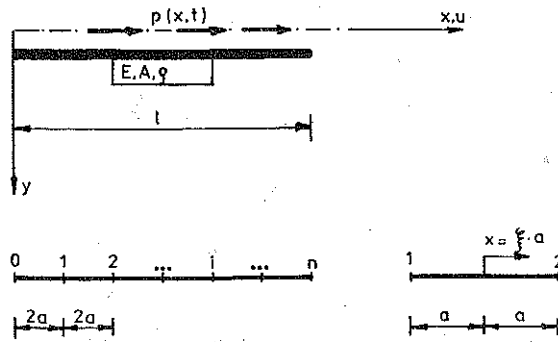
$$A_1 = (K^{ap})^{-1} K^{qa} - (K^{qp})^{-1} K^{aa},$$

$$B_1 = (K^{ap})^{-1} K^{aa} - (K^{qp})^{-1} K^{qa},$$

$$C_1 = (K^{ap})^{-1} K^{pa}, \quad D_1 = -(K^{qp})^{-1} K^{pp}.$$

7. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Rozważmy pręt prosty o długości l , polu przekroju poprzecznego A i gęstości ρ (rys. 5a). Działające obciążenie $p(x, t)$ wywołuje drgania podłużne $u(x, t)$.



Rys. 5

Przestrzenną macierz kształtu przyjęto w postaci wielomianów Hermite'a [2 i 4]:

$$(7.1) \quad \mathbf{N}_x^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \vdots \\ 1 + \xi \end{bmatrix}, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Zdecydowano się rozpatrywać przypadek jednakowych własności lepko-sprężystych przy odkształceniu objętościowym i postaciowym. Ze wzorów (5.3) wyznaczmy statyczną macierz sztywności i macierz bezwładności:

$$(7.2) \quad \mathbf{S}_e = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_x^T \mathbf{E} \mathbf{B}_x a d\xi = \frac{EA}{2a} \begin{bmatrix} 1 & \vdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_x^T \rho \mathbf{N}_x a d\xi = \frac{\rho A a}{3} \begin{bmatrix} 2 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz impulsów węzłowych działających w chwili „j” od obciążenia zewnętrznego określa wzór (4.7)₂

$$(7.3) \quad \mathbf{F}_{ep}^j = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_t^T \otimes \mathbf{N}_x^T) (p^j + \alpha_4 \dot{p}^j + \alpha_5 \ddot{p}^j) h d\tau a d\xi.$$

Jeśli w obszarze SKECZ $p = \text{const}$, to impulsy dla przyjętych macierzy kształtu przyjmują postać

$$(7.4) \quad \mathbf{F}_{ep}^j = ah p^j \left\{ \int_{-1}^1 \mathbf{N}_t^T d\tau \otimes \int_{-1}^1 \mathbf{N}_x^T d\xi \right\} = \frac{ah}{3} p^j \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 4 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Struktura macierzy \mathbf{K}^{rs} jest budowana jak macierz globalna dla zagadnienia

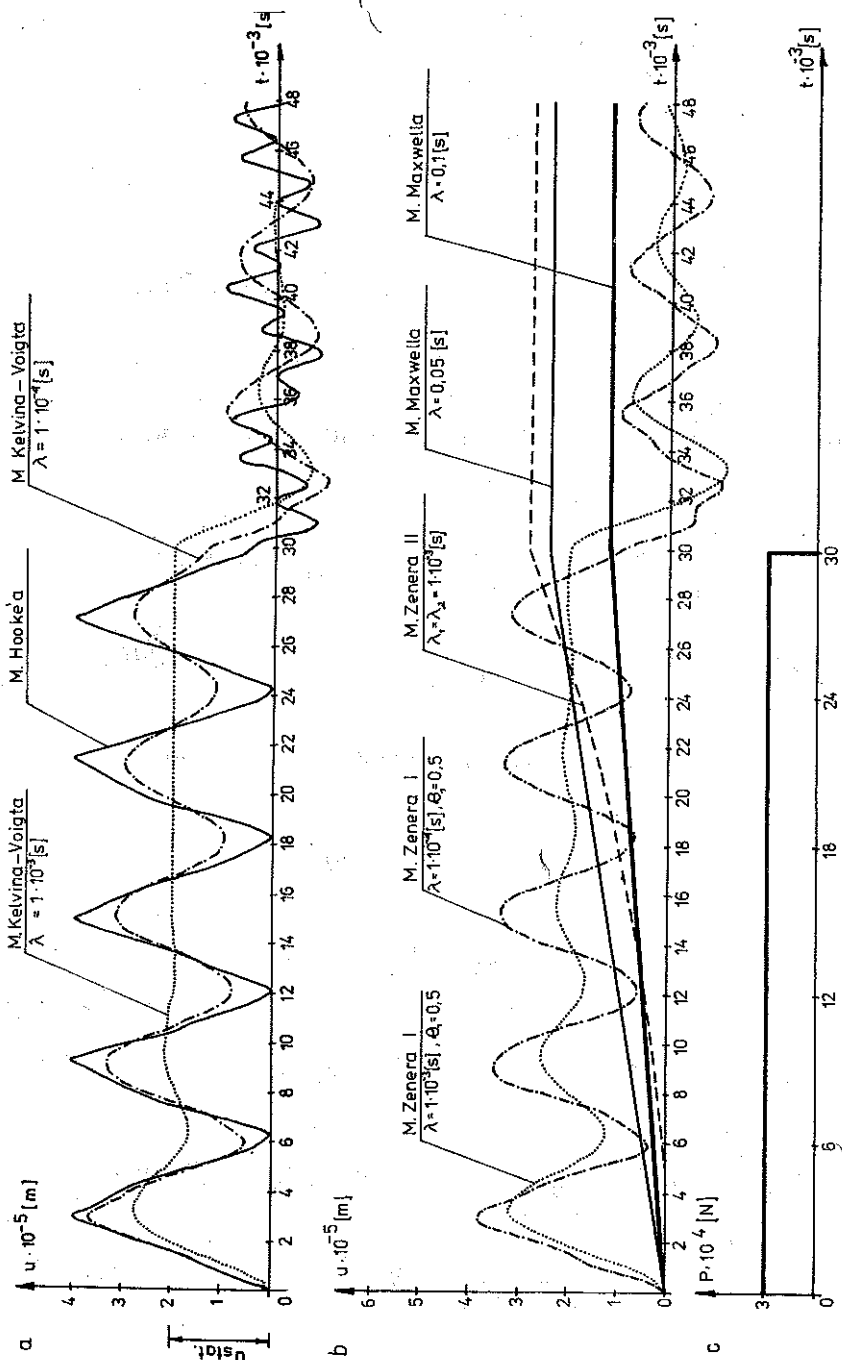
statycznego:

$$(7.5) \quad \mathbf{K}^{rs} = \begin{matrix} n \times n \\ \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{11}^{rs} & \mathbf{K}_{12}^{rs} & & \\ \mathbf{K}_{21}^{rs} & \mathbf{K}_{22}^{rs} + \mathbf{K}_{11}^{rs} & \mathbf{K}_{12}^{rs} & \\ & \mathbf{K}_{21}^{rs} & \mathbf{K}_{22}^{rs} + \mathbf{K}_{11}^{rs} & \mathbf{K}_{12}^{rs} \\ & & & \mathbf{K}_{21}^{rs} & \mathbf{K}_{22}^{rs} + \mathbf{K}_{11}^{rs} & \mathbf{K}_{12}^{rs} \\ & & & & & \mathbf{K}_{21}^{rs} & \mathbf{K}_{22}^{rs} \end{array} \right] \end{matrix}$$

gdzie $r, s = a, q, p$, n —liczba ES (rys. 5b).

Poszczególne wyrazy macierzy (7.5) opisujemy na podstawie wzoru (5.9)₁:

$$(7.6) \quad \begin{aligned} K_{ik}^{aa} &= \left(\frac{4}{15} \alpha_1 h - \frac{1}{2} \alpha_2 + \frac{1}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} - \left(\frac{7}{6h} - \frac{1}{h^2} \alpha_4 \right) M_{ik}, \\ K_{ik}^{aq} &= \left(\frac{2}{15} \alpha_1 h + \frac{2}{3} \alpha_2 - \frac{2}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} - \left(-\frac{4}{3h} + \frac{2}{h^2} \alpha_4 \right) M_{ik}, \\ K_{ik}^{ap} &= \left(-\frac{1}{15} \alpha_1 h - \frac{1}{6} \alpha_2 - \frac{1}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} - \left(\frac{1}{6h} - \frac{1}{h^2} \alpha_4 \right) M_{ik}, \\ K_{ik}^{qa} &= \left(\frac{2}{15} \alpha_1 h - \frac{2}{3} \alpha_2 + \frac{4}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} + \frac{4}{3h} M_{ik}, \\ K_{ik}^{qa} &= \left(\frac{16}{15} \alpha_1 h - \frac{8}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} - \frac{8}{3h} M_{ik}, \\ K_{ik}^{qp} &= \left(\frac{2}{15} \alpha_1 h + \frac{2}{3} \alpha_2 + \frac{4}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} + \frac{4}{3h} M_{ik}, \\ K_{ik}^{pa} &= \left(-\frac{1}{15} \alpha_1 h + \frac{1}{6} \alpha_2 - \frac{1}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} - \left(\frac{1}{6h} + \frac{1}{h^2} \alpha_4 \right) M_{ik}, \\ K_{ik}^{pq} &= \left(\frac{2}{15} \alpha_1 h - \frac{2}{3} \alpha_2 - \frac{2}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} - \left(-\frac{4}{3h} - \frac{2}{h^2} \alpha_4 \right) M_{ik}, \\ K_{ik}^{pp} &= \left(\frac{4}{15} \alpha_1 h + \frac{1}{2} \alpha_2 - \frac{1}{3h} \alpha_3 \right) S_{ik} - \left(\frac{7}{6h} + \frac{1}{h^2} \alpha_4 \right) M_{ik}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$



Rys. 6

i wzorów (7.2)

$$(7.7) \quad \begin{aligned} S_{11} = S_{22} &= \frac{EA}{2a}, & S_{12} = S_{21} &= -\frac{EA}{2a}, \\ M_{11} = M_{22} &= \frac{2}{3} \varrho Aa, & M_{12} = M_{21} &= \frac{1}{3} \varrho Aa. \end{aligned}$$

Współczynniki α zależą od modelu lepkosprężystego i zawiera je tablica 2.

Można teraz przystąpić do obliczeń przemieszczeń w kolejnych chwilach czasowych wg formuły rekurencyjnej (6.5) lub (6.7).

Przykład liczbowy dotyczy drgań podłużnych wspornika o długości $l = 16,0$ [m], polu przekroju poprzecznego $A = 0,12$ [m²], gęstości $\varrho = 7500$ [kg/m³] i module sprężystości $E = 2 \cdot 10^{11}$ [N/m²]. Wspornik ten został podzielony na dwa elementy skończone o długości 8,0 [m] każdy ($a = 4,0$ [m]). Czasowy wymiar SKECZ ustalono wg wzoru (5.11):

$$(7.8) \quad \begin{aligned} h &< \frac{\sqrt{3}}{\omega_{\max}} = \frac{\sqrt{3}}{1014} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}, \\ \omega_{\max} &= \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = \frac{\pi}{16} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{7500}} = 1014 \left[\frac{1}{\text{s}} \right]. \end{aligned}$$

Do obliczeń przyjęto $h = 1 \cdot 10^{-4}$ [s]. Obciążenie stanowi nagle przyłożona do końca wspornika siła $P = 30$ [kN] w chwili $t_0 = 0$ i odjęta w chwili $t_{30} = 30 \cdot 10^{-3} = 0,03$ [s] (rys. 6c).

Na rysunku 6a i 6b przedstawia się drgania końca wspornika dla różnych modeli lepkosprężystych. Uzyskane wyniki obliczeń w przypadku modeli Hooke'a i Kelvina-Voigta są wysoce dokładne w odniesieniu do rozwiązań ścisłych tak pod względem ilościowym (błąd amplitudy przemieszczeń i okresu drgań ok. 2%) jak i jakościowym. W odniesieniu do modeli Maxwella i Zenera otrzymane wyniki są zgodne jakościowo z rozwiązaniami analitycznymi ([9] s. 92–96).

8. ZAKOŃCZENIE

W pracy podano sposób modelowania ośrodka lepkosprężystego w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. Praca zawiera algorytm budowy macierzy sztywności SKECZ dla dowolnego stanu naprężenia. Podany sposób obliczeń charakteryzuje się znaczną prostotą zachowując walory klasycznej metody elementów skończonych. Po przeprowadzeniu dokładniejszej analizy ilościowej można budować programy obliczeń na maszynie cyfrowe dla złożonych zagadnień inżynierskich.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. KĄCZKOWSKI, *The method of finite space-time elements of structures*, J. Tech. Phys., **16**, 1, 69-84, 1975
2. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Arch. Inżyn. Ładow., **22**, 3, 365-378, 1976.
3. Z. KĄCZKOWSKI, *General formulation of the stiffness matrix for the space-time finite elements*, Arch. Inżyn. Ładow., **25**, 3, 351-357, 1979.
4. Z. KĄCZKOWSKI, M. WITKOWSKI, *Uwzględnienie tłumienia zewnętrznego w metodzie elementów czasoprzestrzennych*, Arch. Inżyn. Ładow., **23**, 3, 247-254, 1977.
5. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
6. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1972.
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
8. J. LANGER, *Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu*, Arch. Inżyn. Ładow., **25**, 3, 359-369, 1979.
9. W. DERSKI, S. ZIEMBA, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, Warszawa 1968.

РЕЗЮМЕ

ВЯЗКОУПРУГИЙ ВРЕМЕНИ-ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Приведен способ моделирования вязкоупругой среды в методе времени-пространственных конечных элементов. Работа содержит общий алгоритм строения матрицы жесткости времени-пространственного элемента для произвольного напряженного состояния. Приведенный алгоритм характеризуется значительной простотой, сохраняя достоинства классического метода конечных элементов.

SUMMARY

VISCOELASTIC TIME-SPACE ELEMENT

The method of modelling viscoelastic media in the time-space finite element method is presented. The paper contains the general algorithm of constructing the stiffness matrix of the time-space element subject to an arbitrary state of stress. The method is very simple in spite of preserving the properties of the classical finite element method.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 kwietnia 1984 r.