

WPLYW ODKSZTAŁCALNEJ TARCZY NA DEFORMACJE WALCOWEGO KOŁA ZĘBATEGO O KONSTRUKCJI TARCZOWEJ

MACIEJ KRASIŃSKI i JAN RYŚ (KRAKÓW)

W pracy wyznaczono przemieszczeniowe linie wpływowe powstające w wyniku działania siły skupionej, zaczepionej w dowolnym punkcie prostokąta przyporu dla walcowego koła zębatego o konstrukcji tarczowej. Wzięto pod uwagę tylko odkształcalność tarczy. Podano również prosty wzór inżynierski na obliczanie grubości tarczy. Wyprowadzone zależności zilustrowano przykładem liczbowym.

1. WSTĘP

Zwiększenie obciążalności zębatach kół tarczowych jest ściśle związane z takim doбором cech konstrukcyjnych, głównie geometrii koła, aby uzyskać najbardziej wyrównany stan obciążenia w strefie współpracy zębów. Stan ten w obliczeniach inżynierskich opisywany jest współczynnikami $K_{H\beta}$ i $K_{F\beta}$ [4 i 5] w zakresie nominalnych obciążeń statycznych. Statyczny rozkład obciążeń wzdłuż szerokości koła jest pewnym stanem wyjściowym również w zakresie obciążeń dynamicznych. Polepszenie w strefie zazębienia rozkładu obciążeń statycznych praktycznie jest równoważne zwiększeniu obciążalności dynamicznej, gdyż większość przekładni pracuje w strefach pozarezonansowych, przy amplitudzie drgań nie przekraczającej statycznej deformacji zębów. Tym należy tłumaczyć fakt, że w obliczeniach dynamicznych wymienione wyżej współczynniki zachowują swoją ważność praktyczną. Analiza statyczna deformacji i naprężenia w kole tarczowym nabiera więc znaczenia praktycznego. Przez dobór wymiarów koła i usytuowania średnika (tarczy) można osiągnąć wyrównanie obciążenia nie ponosząc dodatkowych kosztów technologicznych związanych np. z modyfikacją linii zębów. Drugim równie ważnym efektem analizy deformacji jest znalezienie przemieszczeniowej funkcji wpływu, co pozwala, po jej dodaniu do funkcji wpływu od zginania i skręcania wałów a także zginania zębów, na pełną symulację dynamiczną pracy

przekładni. Jak się okaże dalej udało się stworzyć wzór wytrzymałościowy, pozwalający na określenie grubości tarczy koła. Dotychczas stosowane zależności miały charakter ściśle empiryczny.

2. MODEL OBLICZENIOWY KOŁA TARCZOWEGO

W dalszych rozważaniach przyjmujemy pewne założenia, które określają model obliczeniowy konstrukcji oraz podamy techniczne uzasadnienie założeń. Założenia te wynikają z faktu, że najbardziej odkształcalnym fragmentem konstrukcji koła jest tarcza-środek o dowolnym usytuowaniu względem wieńca. Środek podlega asymetrycznemu i symetrycznemu zginaniu oraz stanowi tarczowemu. Następnym elementem silnie odkształcalnym są same zęby koła podlegające zginaniu i ścinaniu, traktowane zazwyczaj jako krótka trapezowa płyta [8]. Przemieszczenia w tym przypadku są dość dobrze przebadane metodami teoretyczno-eksperymentalnymi, np. [1 i 6]. Pozostaje wreszcie wieńiec dwupłaszczyznowo zginany i skręcany, którego odkształcenia nie mają większego wpływu na pracę ząbienia. Natomiast z kształtem wieńca związana jest silnie wytrzymałość zębów koła. Jeżeli jednak zastosować empiryczną zależność na grubość wieńca, to rozwiązanie wymaga jedynie jego deformacja. Najbardziej znanymi pracami w tym przypadku są prace [2 i 3], które ujmują wieńiec jako krótką powłokę izo- i ortotropową. Prace te jednak dają mało efektowny wynik i mogą być stosowane w szczególnych przypadkach obciążenia będącego tylko częścią faktycznych obciążeń w przekładni.

Stosownie do przeprowadzonych tu rozważań i mając na uwadze uzyskanie efektywnych rozwiązań możliwych do zastosowania w obliczeniach wytrzymałościowych i dynamicznych, poczynimy następujące założenia: 1) elementami decydującymi o deformacji koła są środek i zęby (odkształcenia wieńca pomijamy), 2) stan tarczowy środka nie jest sprzężony ze stanem giętnym, co pozwala na stosowanie prostej superpozycji; 3) obciążenie o współrzędnych punktu przyłożenia x, y w prostokącie przyporu będziemy traktować jako obciążenie jednostkowe; 4) obciążenie wywołuje równocześnie skupiony moment zginający M , siłę zginającą symetrycznie P_2 i siłę tarczową P_1 .

3. SIŁY WEWNĘTRZNE I PRZEMIESZCZENIA WIEŃCA WZGLĘDEM PIASTY

Obliczenia przeprowadzimy kolejno dla środka (tarczy) jako płyty kołowo-symetrycznej oraz tarczy o utwierdzonych brzegach. Przyjmujemy następujące oznaczenia: h — grubość środka oraz a, b — odpowiednio promienie wewnętrzny i zewnętrzny środka.

Rozwiązaniem ostatecznym będzie superpozycja trzech kolejno omawianych przypadków.

3.1. Płyta kołowo-symetryczna obciążona niesymetrycznie momentem M

Równanie płytowe na ugięcie we współrzędnych biegunowych r , θ ma znaną postać [7]

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p}{D},$$

a siły wewnętrzne warażają się wzorami

$$(3.2) \quad \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_t &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ M_{rt} &= (1-\nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ Q_t &= -D \frac{\partial}{r \partial \theta} (\nabla^2 w). \end{aligned}$$

Całka równania jednorodnego (3.1) na ugięcie w ma postać

$$(3.3) \quad w_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \sin m\theta,$$

gdzie

$$R_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r,$$

$$R_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \quad \text{dla } m = 1,$$

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{2+m} + D_m r^{2-m} \quad \text{dla } m > 1.$$

Dla obciążenia momentem M (por. rys. 2) mamy następujące rozwiązanie

$$(3.4) \quad w = \frac{Ma}{8\pi D k_1} (k_2 \varrho^3 + k_3 \varrho + k_4 \varrho \ln \varrho + k_5 \varrho^{-1}) \cos \theta,$$

gdzie

$$\varrho = \frac{r}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a},$$

oraz układ warunków brzegowych

$$(3.5) \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varrho} = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = 1.$$

$$\text{dla} \quad \varrho = \beta \quad \frac{\partial w}{\partial \varrho} = \frac{w}{\varrho},$$

$$-b \int_{-\pi}^{\pi} M_r \cos \theta \, d\theta - b \int_{-\pi}^{\pi} M_{r,t} \sin \theta \, d\theta + b^2 \int_{-\pi}^{\pi} Q_r \cos \theta \, d\theta + M = 0.$$

Wykorzystując (3.4) i (3.2) siły wewnętrzne oraz kąt deformacji $\Phi_r = \partial w / \partial r$ wyrazić można wzorami

$$(3.6) \quad M_r = -\frac{M}{8\pi a k_1} [2(3+\nu)k_2 \varrho + (1+\nu)k_4 \varrho^{-1} + 2(1-\nu)k_5 \varrho^{-3}] \cos \theta,$$

$$M_t = -\frac{M}{8\pi a k_1} [2(1+3\nu)k_2 \varrho + (1+\nu)k_4 \varrho^{-1} - 2(1-\nu)k_5 \varrho^{-3}] \cos \theta,$$

$$M_{r,t} = (1-\nu) \frac{M}{8\pi a k_1} (2k_2 \varrho + k_4 \varrho^{-1} - 2k_5 \varrho^{-3}) \sin \theta,$$

$$Q_r = \frac{M}{4\pi a^2 k_1} (4k_2 - k_4 \varrho^{-2}) \cos \theta,$$

$$Q_t = -\frac{M}{4\pi a^2 k_1} (4k_2 + k_4 \varrho^{-2}) \sin \theta,$$

$$\Phi_r = \frac{M}{8\pi D k_1} [3k_3 \varrho^2 + k_3 + k_4 (1 + \ln \varrho) - k_5 \varrho^{-2}] \cos \theta.$$

Stałe k można wyznaczyć z warunków brzegowych.

Stąd

$$(3.7) \quad k_1 = 1 + \beta^2, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = 1 - \beta^2, \quad k_4 = 2k_1, \quad k_5 = \beta^2.$$

Całkowity kąt deformacji wieńca względem piasty wyniesie

$$(3.8) \quad \Phi_0 = \Phi_r|_{\varrho=\beta, \theta=0} = \frac{M}{8Dk_1} [3k_2^2 + k_3 + k_4 (1 + \ln \beta) - k_5 \beta^{-2}],$$

co po podstawieniu (3.7) do (3.8) i przekształceniach daje

$$(3.9) \quad \Phi_0 = \frac{M}{Eh^3 \gamma},$$

gdzie

$$\gamma = \frac{\pi}{3(1-\nu^2)} \frac{1}{\ln \beta^{-1} - \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}}.$$

W podobny sposób można obliczyć siły wewnętrzne na konturze wewnętrznej $\varrho = \beta$ i zewnętrznej $\varrho = 1$. Ponieważ w dalszych obliczeniach wykorzystamy M_r , M_t , Q_r , dlatego określamy te siły w dogodniejszej postaci:

dla $\varrho = \beta$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{M_r a}{M} &= \frac{-(1-\beta^2)}{2\pi\beta(1+\beta^2)} \cos \theta, \\ M_t &= \nu M_r, \quad M_{rt} = 0, \\ \frac{Q_r a^2}{M} &= -\frac{1+3\beta^2}{2\pi\beta^2(1+\beta^2)} \cos \theta; \end{aligned}$$

dla $\varrho = 1$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \frac{M_r a}{M} &= \frac{1-\beta^2}{2\pi(1+\beta^2)} \cos \theta, \\ M_t &= \nu M_r, \quad M_{rt} = 0, \\ \frac{Q_r a^2}{M} &= -\frac{3+\beta^2}{2\pi(1+\beta^2)} \cos \theta. \end{aligned}$$

Z przedstawionych wzorów wynika, że największe siły wewnętrzne występują na konturze wewnętrznej $\varrho = \beta < 1$, tj. w miejscu połączenia środnika z piastą dla kąta $\theta = 0 \vee \pi$, tzn. w płaszczyźnie działania momentu M .

3.2. Płyta kołowo-symetryczna obciążona symetrycznie siłą P_2

W tym przypadku podamy tylko wynik rozwiązania dla płyty o promieniach podanych wyżej, utwierdzonej na brzegach i obciążonej siłą skupioną P_2 . Rozwiązując równanie różniczkowe

$$(3.12) \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{p}{2\pi r D},$$

mamy

$$(3.13) \quad w = \frac{P_2 r^2}{8\pi D} \left(\ln \frac{r}{a} - 1 \right) + \frac{Ar^2}{2} + B \ln \frac{r}{a} + C,$$

a po podstawieniu warunków brzegowych obliczymy

$$(3.14) \quad \begin{aligned} A &= \frac{P_2}{4\pi D} \left(1 + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right), \\ B &= \frac{P_2}{4\pi D} \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

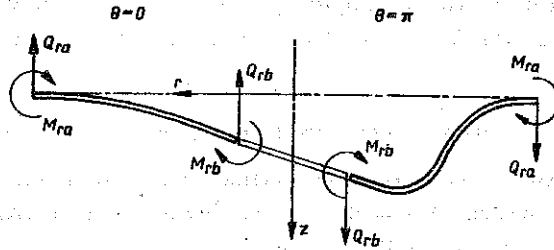
$$(3.14) \quad C = \frac{P_2 a^2}{8\pi D} \left(0,5 - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right).$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy ugięcie osiowe piasty względem wieńca $w = w|_{r=b}$

$$(3.15) \quad w_0 = \frac{P_2 a^2}{16D} \left(1 - \beta^2 - \frac{4\beta^2}{1 - \beta^2} \ln^2 \beta \right).$$

W podobny sposób obliczymy siły wewnętrzne na konturze wewnętrznym $\varrho = \beta$ i zewnętrznym $\varrho = 1$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} M_r(\beta) &= -\frac{P_2}{4\pi} \left(1 + \frac{2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right), \\ Q_r(\beta) &= -\frac{P_2}{2\pi\beta a}, \\ M_r(1) &= -\frac{P_2}{4\pi} \left(1 - \frac{2\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right), \\ Q_r(1) &= -\frac{P_2}{2\pi a}. \end{aligned}$$



Rys. 1

Wypadkową deformację środnika wywołaną zginaniem M i P_2 dla przekroju w płaszczyźnie działania momentu M przedstawia rys. 1, gdzie zaznaczono zwroty sił na konturach zewnętrznym i wewnętrznym.

3.3. Tarcza kołowa obciążona siłą promieniową P_1

Dla tarczy o promieniach b , a utwierdzonej na obwodach i obciążonej w środku siłą promieniową P_1 zastosowanie funkcji naprężeń daje naprężenia następujące:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{r} (C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta), \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0; \end{aligned}$$

stąd odkształcenia i przemieszczenia wyniosą

$$(3.18) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \sigma_r, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\nu}{E} \sigma_r, \quad v_{r\theta} = 0,$$

$$\varepsilon_t = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$(3.19) \quad u_r = \frac{2}{E} (C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta) \ln r + C_3,$$

$$u_\theta = \frac{2}{E} (C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta) \left(\ln r + \frac{2\nu}{r^2} \right).$$

Z warunków brzegowych

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \text{dla } r = b & \quad u_r = u_0 \cos \theta; \\ \text{dla } r = a & \quad u_r = 0, \end{aligned}$$

otrzymamy

$$(3.21) \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{2}{E} C_1 \ln a \cos \theta, \quad u_0 = -\frac{2}{E} C_1 \ln \frac{a}{b}.$$

Wykorzystując całkę

$$(3.22) \quad P_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r b \cos \theta d\theta,$$

mamy ostatecznie

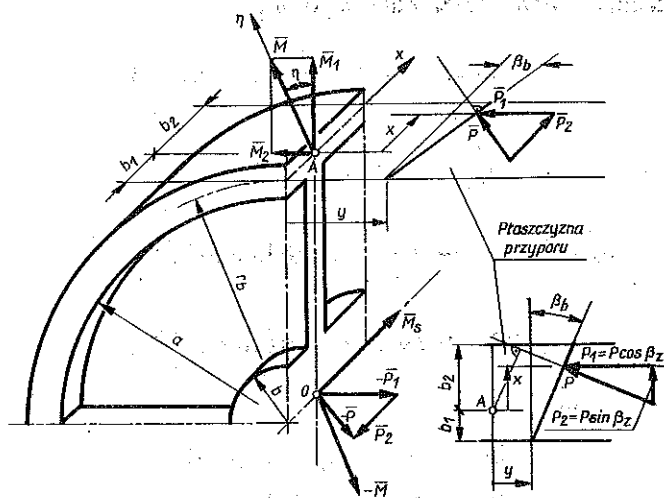
$$(3.23) \quad u_0 = \frac{2P_1}{\pi E h} \ln \beta^{-1},$$

oraz siły osiowe na konturach

$$(3.24) \quad \text{dla } \varrho = \beta, \quad N_r = \frac{2P_1}{\pi \beta a} \cos \theta, \quad \text{dla } \varrho = 1, \quad N_r = \frac{2P_1}{\pi a} \cos \theta.$$

4. SIŁY KONTUROWE W ŚRODNIKU ORAZ DEFORMACJA KOŁA WYWOŁANA JEDNOSTKOWĄ SIŁĄ W STREFIE ZAZĘBIENIA

Na rys. 2 przedstawiono konstrukcję koła przyjmując, że w płaszczyźnie przyporu normalnie do linii zęba działa w punkcie o współrzędnych x, y siła jednostkowa P . Położenie środka względem wieńca określa wymiar b_1 . Jak wynika z rys. 2 po wyznaczeniu reakcji w piąście koła otrzymujemy obciążenie środka momentem M w płaszczyźnie odchylonej od płaszczyzny AO o kąt η . Ponadto środek zginany jest siłą P_2 oraz poddany jest działaniu siły P_1 leżącej w płaszczyźnie tarczy i prostopadłej do płaszczyzny



Rys. 2

AO. Możemy więc obliczyć wszystkie obciążenia, o których była mowa w rozdziale 3. Moment M (jak widać na rys. 2) ma dwie składowe:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} M_1 &= Px \cos \beta_b + P [y + (x + b_1) \operatorname{tg} \beta_b] \sin \beta_b, \\ M_2 &= P b_b \sin \beta_b, \quad M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \\ \operatorname{tg} \eta &= \frac{r_b \sin \beta_b}{x \cos \beta_b + [y + (x + b_1) \operatorname{tg} \beta_b] \sin \beta_b}. \end{aligned}$$

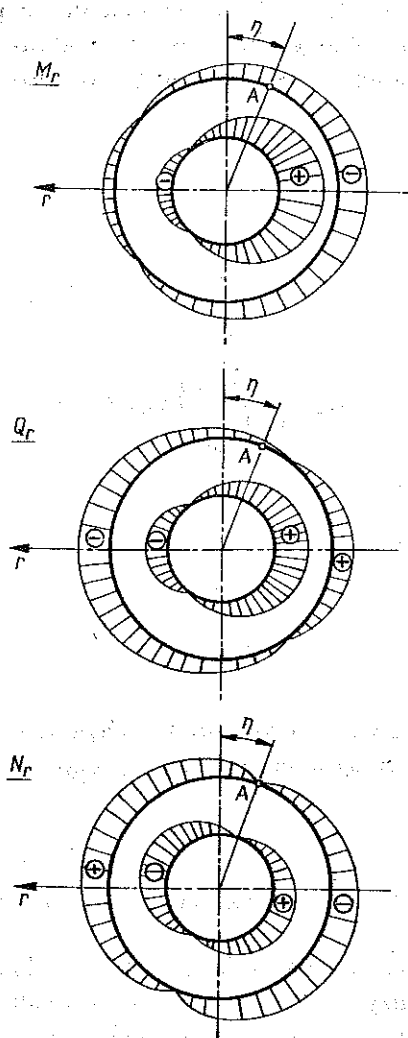
Siły tarczowa P_1 i symetrycznie zginająca P_2 wynoszą

$$(4.2) \quad \begin{aligned} P_1 &= P \cos \beta_b; \quad x \in \langle -b_1, b_2 \rangle, \\ P_2 &= P \sin \beta_b; \quad y \in \langle y_1, y_2 \rangle, \end{aligned}$$

gdzie P oznacza siłę jednostkową, β_b kąt pochylenia linii zęba na kole zasadniczym oraz y_1, y_2 współrzędne początku i końca strefy ząbienia w przekroju czołowym.

Zgodnie ze wzorami (3.10), (3.11), (3.16) i (3.24) siły wewnętrzne na konturach można napisać następująco:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} M_{ra} &= \frac{M}{a} \frac{1 - \beta^2}{2\pi(1 + \beta^2)} \cos \theta - \frac{P_2}{4\pi} \left(1 - \frac{2\beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right), \\ M_{rb} &= -\frac{M}{a} \frac{1 - \beta^2}{2\pi\beta(1 + \beta^2)} \cos \theta - \frac{P_2}{4\pi} \left(1 - \ln \beta^{-1} - \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \ln \beta \right), \\ Q_{ra} &= -\frac{M}{a^2} \frac{3 + \beta^2}{2\pi(1 + \beta^2)} \cos \theta - \frac{P_2}{2\pi a}, \\ Q_{rb} &= -\frac{M}{a^2} \frac{1 + 3\beta^2}{2\pi\beta^2(1 + \beta^2)} \cos \theta + \frac{P_2}{2\pi\beta a}, \end{aligned}$$



Rys. 3

$$(4.3) \quad N_{ra} = \frac{2P_1}{\pi a} \cos(\theta - \eta),$$

[cd]

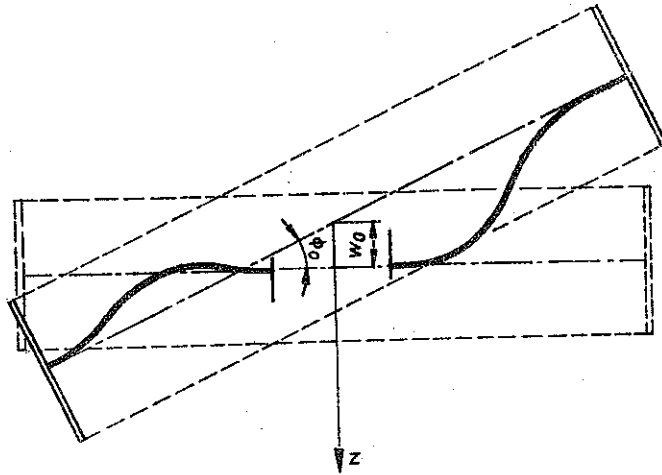
$$N_{rb} = \frac{2P_1}{\pi \beta a} \cos(\theta - \eta).$$

Wykres sił (4.3) pokazano na rys. 3.

Z rys. 3 wynika, że najbardziej wyężonym punktem środnika jest punkt o współrzędnych $r = b$, $\theta = \pi$.

Przechodząc do przemieszczeń można na podstawie przedstawionych obciążeń zauważyć trzy składowe związane z analizowanymi obciążeniami, tj. kąt ugięcia asymetrycznego Φ_0 , ugięcie symetryczne w_0 i przemieszczenie

promieniowe u_0 . Wszystkie te wielkości sumują się dając wypadkową deformację wieńca względem piasty. Na rys. 4 pokazano deformację giętą w płaszczyźnie prostopadłej do osi zginania η . Ponadto średnik ulega jeszcze



Rys. 4.

przemieszczeniu radialnemu u_0 w kierunku odchylonym od kierunku r (rys. 3) o kąt η . Wartości przemieszczeń można wyliczyć ze wzorów (3.9), (3.15) i (3.23).

5. OBLICZENIA WYTRZYMAŁOŚCIOWE ŚRODNIKA

Przedstawione wzory można wykorzystać do obliczeń wytrzymałościowych średnika. Z analizy rys. 2 i wzoru (4.1) wynika, że największe wyężenie materiału średnika wystąpi, gdy obciążenie rozłoży się na krawędziach koła w strefie prostokąta przyporu ($y_1, y_2, x = -b_1, x = b_2$) oraz osiągnie wartość maksymalną. Maksymalną siłę w tym najbardziej niebezpiecznym przypadku można oszacować ze względu na tzw. złom krawędziowy zębów.

Opierając się na wzorach (4.3) i (4.1), naprężenia radialne i obwodowe (praktycznie „odzerowo” tętniące) w punkcie najbardziej wyężonym mogą być napisane następująco:

$$(5.1) \quad \frac{\sigma_r h^2}{P} = \frac{3}{2\pi} \left[\frac{2(1-\beta^2)d}{(1+\beta^2)} + e \left(\frac{2}{1-\beta^2} \ln \beta - 1 \right) \right] + \frac{2fh}{\pi\beta a} \cos \eta = H,$$

$$\frac{\sigma_\theta h^2}{P} = \frac{3vd(1-\beta^2)}{2\pi\beta(1+\beta^2)} = F,$$

gdzie

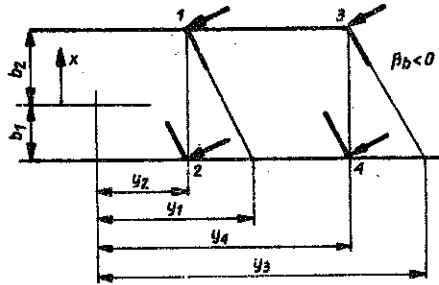
$$(5.2) \quad d = \frac{1}{a} \{ [x f + (y + (x + b_1) e / f) e]^2 + (r_b e)^2 \}^{1/2},$$

$$e = \sin \beta_b, \quad f = \cos \beta_b.$$

Korzystając z powyższych wzorów, naprężenia zastępcze można określić wzorem

$$(5.3) \quad \frac{\sigma h^2}{P} = \sqrt{H^2 + F^2 - EF} = H_0.$$

Wielkość H_0 zależy między innymi od współrzędnych punktu przyłożenia siły. Jej maksimum będzie osiągnięte w jednym z wierzchołków prostokąta przyporu. Na rys. 5 pokazano taki prostokąt 1, 2, 3, 4 dla lewego kierunku pochylenia linii zębów ($\beta_b < 0$).



Rys. 5

Wierzchołki prostokąta przyporu mają następujące współrzędne

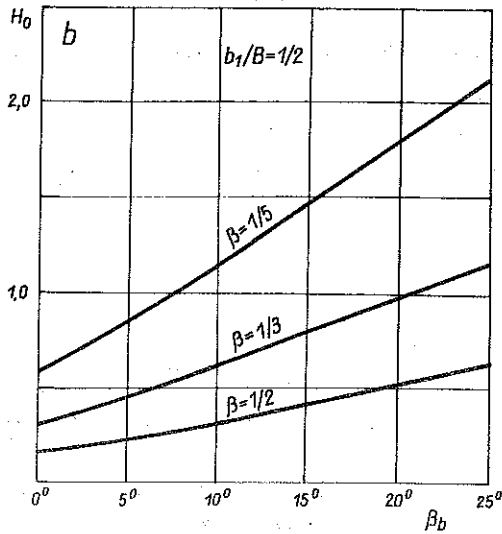
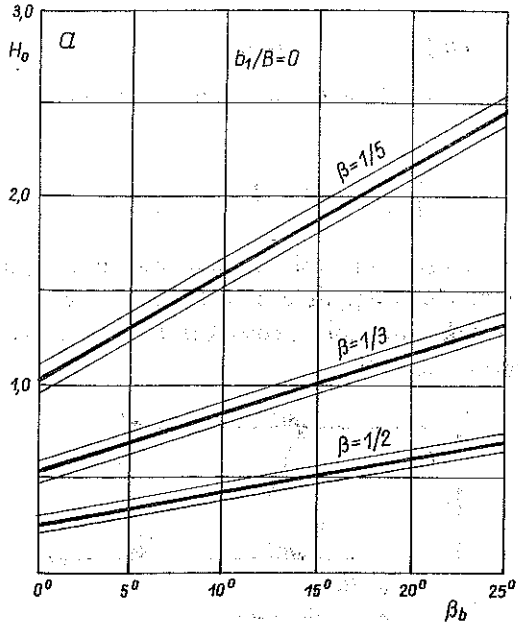
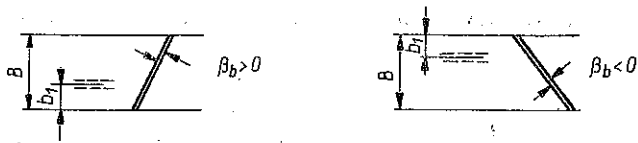
1. $x = b_2 \quad y = y_1,$
2. $x = -b_1 \quad y = y_2, \quad y_1 = y_2 - (b_1 + b_2) \operatorname{tg} \beta_b,$
3. $x = b_2 \quad y_3, \quad y_3 = y_4 - (b_1 + b_2) \operatorname{tg} \beta_b,$
4. $x = -b_1 \quad y = y_4.$

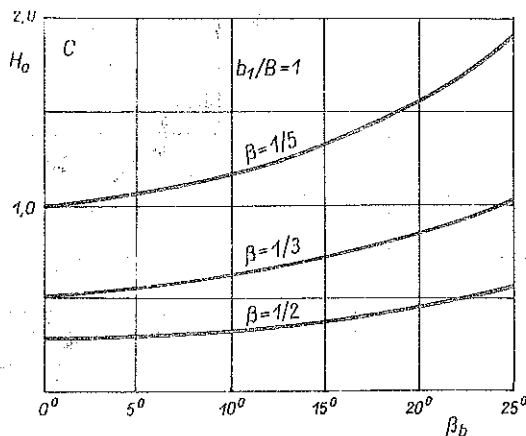
Z kształtu koła wynikają jednoznaczne współrzędne y_2 i y_4 jako współrzędne odcinka przyporu.

Na podstawie obliczeń numerycznych udało się ograniczyć ilość zmiennych wpływających na H_0 praktycznie do trzech; wpływ h jest znikomy i nie przekracza kilku procent, x, y eliminowane są automatycznie w procesie poszukiwania najbardziej niebezpiecznej strefy obciążeń. Przykładowe wykresy H_0 pokazane są na rys. 6.

Maksymalne naprężenie zastępcze można wyrazić przez naprężenie dopuszczalne dla zębów przekładni, gdyż siłę zniszczenia krawędziowego można oszacować wielkością

$$(5.4) \quad P = \frac{3}{q} q m_0^2 \sigma_{Flim},$$





Rys. 6

gdzie q oznacza współczynnik kształtu zęba [4], pozostałe oznaczenia wyjaśnimy później.

W ten sposób, wykorzystując (5.3) i (5.4), proponujemy następującą formułę inżynierską na określenie maksymalnych zastępczych naprężeń w środku:

$$(5.5) \quad \sigma = 4,5 (m_0/h)^2 \frac{B}{r_b} H_{\sigma F \lim},$$

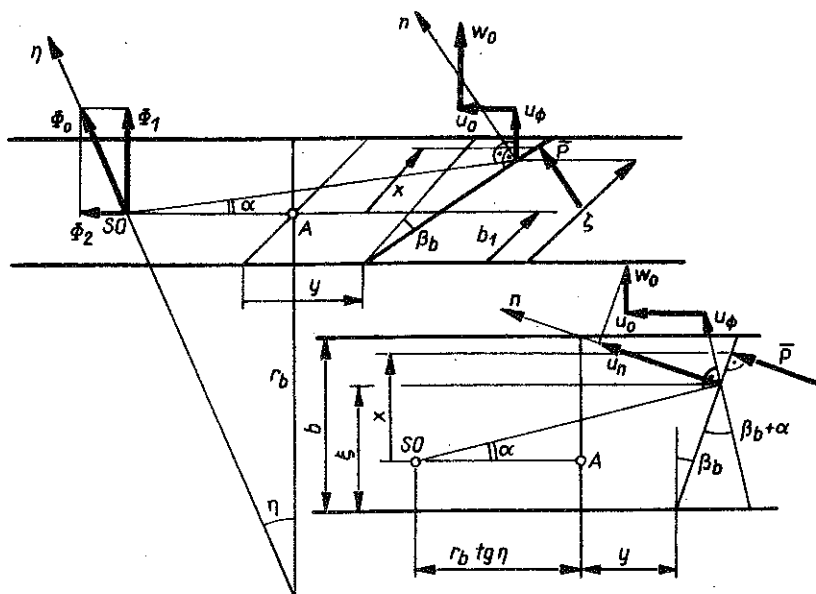
gdzie przyjęto następujące oznaczenia: $H_0 = f(\beta, \beta_b, b_1/B)$ wg (5.3), B szerokość koła, r_b promień koła zasadniczego, $\sigma_{F \lim}$ dopuszczalne naprężenia na zginanie dla zębów koła, m_0 moduł nominalny, h grubość środka, β_b kąt nachylenia linii zębów oraz $\beta = b/a$ stosunek promieni wewnętrznego do zewnętrznego środka.

Wzór (5.5) pozwala obliczyć grubość środka, a nie przyjmować ją na podstawie nieuzasadnionego zalecenia eksperymentalnego. Np. dla koła o średnicy zewnętrznej 610 mm, $m_0 = 10$ mm, $z = 60$, $r_b = 276,5$ mm, $\beta_b = 28^\circ$, $b_1 = b_2 = 50$ mm i naprężeń dopuszczalnych dla środka 200 MPa otrzymujemy $h = 25$ mm, a dla tego samego koła lecz o zębach prostych $h = 14$ mm.

6. WYZNACZENIE PRZEMIESZCZENIOWEJ FUNKCJI WPLYWU DLA KONSTRUKCJI TARCZOWEJ KOŁA ZĘBATEGO

Linie wpływu, które wyznaczymy w tym rozdziale będą dotyczyły tylko środka jako odkształcalnej tarczy-ptyły.

Poniżej na rys. 7 pokazano w płaszczyźnie przyporu przemieszczenia punktu leżącego na linii zęba obciążonego siłą P i niezbędne wielkości geometryczne wykorzystywane w dalszej części niniejszego rozdziału.



Rys. 7

Poszczególne składowe przemieszczenia punktu, w którym działa jednostkowa siła P , zostały wyrażone wzorami (3.9), (3.15) i (3.23).

W związku z tym interesujące nas przemieszczenie w płaszczyźnie przy-
poru, prostopadłe do linii zęba, można przedstawić następującym wzorem:

$$(6.1) \quad u_n = u_0 \cos \beta_b + w_0 \sin \beta_b + u_\phi \sin (|\beta_b| + \alpha \operatorname{sign} M_1).$$

W powyższym wzorze komentarza wymaga ostatni wyraz. Przemieszczenie u_ϕ jest wywołane obrotem punktu, w którym chcemy określić przemieszczenia, wokół chwilowego środka obrotu (S_0). Położenie tego punktu na linii zęba wyznaczają współrzędne ξ , y i związany z nimi kąt α . Wszystkie wielkości pokazane na rysunkach 2 i 7 należy (przy obliczeniach przemieszczeń) uważać za dodatnie.

Dla poczynionych w poprzednich rozdziałach założeń można wykazać, że linie wpływowe są prostymi o następującej postaci:

$$(6.2) \quad u_n = c\xi + d,$$

gdzie

$$c = \frac{u_\phi [\sin (|\beta_b| + \alpha (B) \operatorname{sign} M_1) - \sin (|\beta_b| + \alpha (0) \operatorname{sign} M_1)]}{B},$$

$$d = u_0 \cos \beta_b + w_0 \sin \beta_b + u_\phi \sin (|\beta_b| + \alpha (0) \operatorname{sign} M_1),$$

$$\alpha(\xi) = \arctg \left[\frac{\xi - b_1}{r_b \operatorname{tg} \eta + (y + \xi \operatorname{tg} \beta_b) \operatorname{sign} M_1 \operatorname{sign} \beta_b} \right],$$

$$\operatorname{tg} \eta = \left| \frac{M_2}{M_1} \right|,$$

$$u_0 = \Phi_1 R,$$

$$R = [r_b \operatorname{tg} \eta + (y + \xi \operatorname{tg} \beta_b) \operatorname{sign} M_1 \operatorname{sign} \beta_b] / \cos \alpha,$$

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cos \eta;$$

inne oznaczenia pozostają bez zmian.

Powyższe wzory są poprawne zarówno dla dodatnich jak i ujemnych kątów pochylenia linii zęba. W przypadku zębów prostych należy przyjąć $\eta = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = (\xi - b_1)/y$ a dla $M_1 = 0$ kąt $\alpha = 0$.

Posługując się wzorami omówionymi w tym rozdziale, obliczymy różnice przemieszczeń na brzegach wieńca koła, która ma wpływ na nierównomierność rozkładu obciążeń wzdłuż linii zęba.

Załóżmy, że na koło zębate o następujących danych: $z = 60$ (przy ilości zębów zębniaka $z = 13$) $\beta_0 = 30^\circ$, $m_0 = 10$ mm, $\beta = 0,2$, kąt przyporu $\alpha_0 = 20$, $h = 10$ mm, $b_1 = b_2 = 35$ mm, działa siła $P = 10$ kN pięciokrotnie niższa od wytrzymałości zęba ($k = 300$ MPa) przyłożona w punkcie o współrzędnych $x = b_2$, $y = 102$ mm (prawy górny wierzchołek prostokąta przyporu). Siła ta spowoduje różnicę przemieszczeń na brzegach wieńca wynoszącą około 204 μm .

7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy udało się uzyskać efektywny wzór na największe zastępcze naprężenie, pozwalający szacować grubość tarczy oraz przemieszczeniowe funkcje wpływu uwzględniające odkształcalność tarczy koła.

Zdajemy sobie sprawę z wagi uproszczeń tu przyjętych oraz nieuwzględnienia spiętrzeń naprężeń; niemniej jednak przy stosunkowo wiotkiej tarczy koła, upraszczające założenia wydają się uzasadnione. Dużą zaletą prostego wzoru na naprężenie zastępcze jest łatwość śledzenia wpływu różnych parametrów konstrukcyjnych na to naprężenie. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że im bardziej są wytrzymałe zęby koła, tym grubość tarczy musi być większa. Oczywiście dla zębów skośnych grubość tarczy musi być większa niż dla zębów prostych.

Z praktycznego punktu widzenia równie ważne jest wyznaczenie przemieszczeniowej funkcji wpływu, uwzględniającej odkształcenie tarczy, która wraz z innymi funkcjami wpływu dla pozostałych elementów realnej konstrukcji może być tak dobrana, aby wyrównać rozkład obciążenia wzdłuż linii zęba bez uciekania się do kosztownej modyfikacji kół wzdłuż linii zęba.

Dalszą sprawą jest uwzględnienie odkształcalności wieńca koła zębatego. Pewne prace z tego zakresu są już przez nas prowadzone.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Э. Л. Айрапетов, М. Д. Генкин, Ю. А. Ряснов, *Статика зубчатых переаач*, Наука, Москва 1983.
2. В. Н. Купчик, *Эффективные моменты инерции ободьев козозубьих колес при изгибе*, Детали машин, 20, Техника, Киев 1975.
3. В. Н. Купчык, *К расчоту изгибной податливости тонкостенного обода зубчатого колеса*, Детали машин, 22, Техника, Киев 1976.
4. L. MÜLLER, *Przekładnie zębate*, WNT, Warszawa 1979.
5. ISO/TC 60N 422E-Gears, *Basic principles for the calculation of load capacity of spur and helical gears*.
6. J. RYŚ, *Analiza obciążeń statycznych i dynamicznych w walcowych przekładniach zębatych*, Zesz. Nauk. Polit. Krakowskiej, 55, 1977.
7. S. TIMOSZENKO, S. WOYNOWSKY-KRIESER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
8. K. UMEZAWA, *Deflections and moments due to a concentrated load on a rack-shaped cantilever plate with finite width for gears*, Bull. JSME, 15, 79, 1972.

РЕЗЮМЕ

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ДИСКА НА ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА С ДИСКОВОЙ КОНСТРУКЦИЕЙ

В работе определены линии влияния в перемещениях, возникающие в результате действия сосредоточенной силы, зацепленной в произвольной точке прямоугольника поддержки для цилиндрического зубчатого колеса с дисковой конструкцией. Принимается во внимание только деформируемость диска. Приведена тоже простая инженерская формула для расчета толщины диска. Выведенные зависимости иллюстрированы числовым примером.

SUMMARY

EFFECT OF THE DEFORMABLE DISK ON THE DEFORMATION OF A FACE GEAR

Displacement influence lines are determined in the case of a concentrated force applied to an arbitrary point of the tooth contact rectangle in a cylindrical face gear; deformability of the disk is taken into account. A simple engineering formula for the disk thickness is also given. The solution is illustrated by a numerical example.

POLITECHNIKA KRAKÓWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 grudnia 1985 r.