

DRGANIA SWOBODNE I WYMUSZONE BELKI Z DUŻYMI UGIĘCIAMI

WACŁAW SZCZEŚNIAK (WARSZAWA)

W pracy omawia się drgania swobodne i wymuszone belki lepkosprężystej z nieprzesuw-
nymi podporami. Ugięcia belki są duże. Nieliniowe równanie ruchu całkowano numerycznie,
opierając się na metodzie SSPj i punktu środkowego. Praca jest ilustrowana szeregiem
przykładów obliczeniowych.

1. WSTĘP I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Zagadnienie drgań swobodnych i wymuszonych belki sprężystej z dużymi
ugięciami ma bogatą bibliografię. Efektywne analityczne rozwiązanie uzyskał
Wojnowski-Krygier w pracy [1]. Zastosowanie metody perturbacji było
przedmiotem badań w pracy [2]. W pracy [3] przy analizie drgań wy-
muszonych zastosowano szereg funkcji własnej zagadnienia liniowego. Wpływ
zewnętrznej siły osiowej uwzględniono w pracy [4]. Z polskich opracowań
należy zacytować [5–6]. W ostatnim okresie czasu masowe zastosowanie
techniki komputerowej w mechanice nasiliło lawinowo liczbę publikacji
z zakresu geometrycznie nieliniowej dynamiki konstrukcji. Z bardzo wielu
prac ostatniego okresu należy wymienić pozycje [7–14]. Stosowane algorytmy
numeryczne wynikają z zastosowania metody przemieszczeń w sformułowaniu
macierzowym [7], metody macierzy przeniesienia [8], wreszcie metody ele-
mentów skończonych [9–14].

Niniejsza praca jest poświęcona zastosowaniu metody numerycznej do
bezpośredniego całkowania równania ruchu lepkosprężystej belki przyzma-
tycznej z nieprzesuwnymi podporami.

Amplitudy drgań są duże i porównywalne z wysokością przekroju po-
przecznego, nie są jednak dowolnie duże. Całkowite naprężenie w dowolnym
punkcie belki jest sumą naprężeń zginających i naprężeń od dużej siły
rozciągającej

$$(1.1) \quad \sigma(x) = \sigma_f(x) + \sigma_0(x).$$

Odształcenie jednostkowe jest sumą odpowiednio dwu odształceń składowych

$$(1.2) \quad \varepsilon(x) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2.$$

W pracy pominiemy zjawisko sprzężenia drgań giętnych i podłużnych traktując te ostatnie jako pomijalnie małe w stosunku do amplitud ugięć poprzecznych. W przypadku przyjęcia materiału pręta w postaci reologicznego modelu Kelvina-Voigta równanie równowagi problemu jest nieliniowe i cząstkowe:

$$(1.3) \quad \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{Eh}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q(x, t).$$

W równaniu (1.3) przyjęto następujące oznaczenia: EJ_y oznacza sztywność giętną belki, \bar{m} masę jednostkową belki, τ czas retardacji w modelu Voigta oraz w ugięcie belki.

Zakładamy obciążenie w postaci górki sinusoidalnej ze względu na zmienną przestrzenną. Przebieg obciążenia w czasie jest dowolny i opisany pewną daną funkcją $p(t)$. W takim przypadku ugięcie belki jest opisane za pomocą następujących wzorów:

$$(1.4) \quad w(x, t) = f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, \quad Q(x, t) = q_0 p(t) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Podstawienie (1.4)₁ i (1.4)₂ do równania (1.3) prowadzi do rozdziału zmiennych. W konsekwencji otrzymujemy nieliniowe skomplikowane równanie ruchu dowolnego punktu belki (1.5):

$$(1.5) \quad \dot{f}_1(t) + \omega_1^2 \tau \dot{f}_1(t) + \omega_1^2 f_1(t) + \frac{9\omega_1^2 \tau}{h^2} f_1(t) f_1^2(t) + \frac{3\omega_1^2}{h^2} f_1^3(t) = \frac{q_0}{\bar{m}} P(t).$$

W przypadku drgań swobodnych należy zaniedbać prawą stronę równań (1.3) i (1.5). Równanie (1.5) może opisywać w tym przypadku ruch swobodny z n -tą częstością drgań:

$$(1.6) \quad \dot{f}_n(t) + \omega_n^2 \tau \dot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) + \frac{9\omega_n^2 \tau}{h^2} f_n(t) f_n^2(t) + \frac{3\omega_n^2}{h^2} f_n^3(t) = 0,$$

gdzie $\omega_n^2 = n^4 \pi^4 EJ_y / l^4 \bar{m}$ oznacza częstość drgań swobodnych belki wyznaczoną przy małych ugięciach. Równania (1.5) i (1.6) są przedmiotem badań niniejszej pracy. Rozwiązania analityczne tych równań nie istnieją. Jedyną drogą ich rozwiązania jest bezpośrednio całkowanie oparte na metodach numerycznych.

2. NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA RUCHU

W literaturze znanych jest wiele rodzajów metod całkowania numerycznego równań ruchu. Pewien ich przegląd podano w monografiach [16, 19 i 20]. W niniejszym opracowaniu stosowano metodę różnicową oraz ostatnio opublikowaną przez ZIENKIEWICZA i WOODE'A [21—22] metodę SSpj. Wszystkie szczegółowe zadania rozwiązywano tymi dwoma sposobami używając dwu mikrokomputerów Oric-1 i Zenith Z100.

Podstawowe wzory metody SSpj są określone w sposób następujący. Rozpatrując przedział czasu Δt , w którym funkcja f jest aproksymowana wielomianem stopnia p ze względu na czas możemy napisać

$$(2.1) \quad f = f_n + \dot{f}_n t + \ddot{f}_n \frac{1}{2} t^2 + \dots + \alpha_n^{(p)} t^p \frac{1}{p!},$$

lub w postaci skracającej zapis

$$(2.2) \quad f = \sum_{q=0}^{p-1} \hat{f}_n \frac{t^q}{q!} + \alpha_n^{(p)} t^p \frac{1}{p!}.$$

Znając wartości wyjściowe f_n, \dot{f}_n oraz $\alpha_n^{(p)}$ możemy określić wielkości f_{n+1}, \dot{f}_{n+1} na drugim końcu przedziału Δt :

$$(2.3) \quad f_{n+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \hat{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} = \hat{f}_{n+1} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!},$$

$$(2.4) \quad \dot{f}_{n+1} = \sum_{q=1}^{p-1} \hat{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} = \hat{\dot{f}}_{n+1} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Wielkości $\hat{f}_{n+1}, \hat{\dot{f}}_{n+1}$ mogą być traktowane jako proste ekstrapolacje poszukiwanych na końcu przedziału wartości funkcji f_{n+1}, \dot{f}_{n+1} a $\alpha_n^{(p)}$ może być traktowane jako uśredniona wielkość p -tej pochodnej funkcji f w rozważanym przedziale. Aby określić nieznaną współczynnik $\alpha_n^{(p)}$ spełniamy w sposób całkowity równanie ruchu (1.5) w przedziale Δt :

$$(2.5) \quad \int_0^{\Delta t} \mathbf{W}^m (\ddot{f}_1 + A \dot{f}_1 + B f_1 + C \dot{f}_1^2 + D f_1^3 - \mathbf{Q}) dt = 0, \quad m = 1, 3.$$

Z definicji określamy następujące ilorazy całkowe:

$$(2.6) \quad \frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W}^m t^q dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W}^m dt} = \theta_q \Delta t^q, \quad q \in (1, p), \quad \theta_0 = 1, \quad 0 \leq \theta_p \leq 1, \quad m = 1, 3.$$

Wykorzystanie (2.6) prowadzi do określenia całek występujących w (2.5):

$$(2.7) \quad \frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} f_1 dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} = \sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p,$$

$$\frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} f_1' dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} = \sum_{q=1}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \boldsymbol{\theta}_{q-1} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\theta}_{p-1},$$

$$\frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} f_1'' dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} = \sum_{q=2}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \boldsymbol{\theta}_{q-2} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \boldsymbol{\theta}_{p-2},$$

$$\frac{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} \mathbf{Q} dt}{\int_0^{\Delta t} \mathbf{W} dt} = \bar{\mathbf{Q}},$$

\mathbf{W} oznacza funkcje normy.

Dzieląc równanie (2.5) przez $\int_0^{\Delta t} \mathbf{W}^m dt$ i wykorzystując (2.7), możemy napisać

$$(2.8) \quad \left(\sum_{q=2}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \boldsymbol{\theta}_{q-2} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \boldsymbol{\theta}_{p-2} \right) + A \left(\sum_{q=1}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \boldsymbol{\theta}_{q-1} + \right. \\ \left. + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\theta}_{p-1} \right) + B \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \right) + \\ + C \left(\sum_{q=1}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \boldsymbol{\theta}_{q-1} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\theta}_{p-1} \right) \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q + \right. \\ \left. + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \right)^2 + D \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \right)^3 - \bar{\mathbf{Q}} = 0.$$

Z ostatniego równania wyliczamy nieznaną współczynnik $\alpha_n^{(p)}$. Przedtem dodatkowo przyjmujemy pewne uzasadnione uproszczenia w obliczeniach składników nieliniowych w równaniu (2.8) ograniczając wielkość $\alpha_n^{(p)}$ do pierwszej potęgi:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \right)^3 \approx \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right)^3 + \\
 & \quad + 3 \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right)^2 \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p, \\
 (2.9) \quad & \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \right)^2 \approx \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right)^2 + \\
 & \quad + 2 \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right) \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p, \\
 & \left(\sum_{q=1}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \boldsymbol{\theta}_{q-1} + \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\theta}_{p-1} \right) \left[\left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right) \alpha_n^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \right] \approx \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right)^2 \sum_{q=1}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \boldsymbol{\theta}_{q-1} + \\
 & \quad + \alpha_n^{(p)} \left[\frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\theta}_{p-1} \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left(\sum_{q=1}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \boldsymbol{\theta}_{q-1} \right) \left(\sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q \right) \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \right].
 \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.9) określamy $\alpha_n^{(p)}$ z równania (2.8):

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad \alpha_n^{(p)} = & \left\{ \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \boldsymbol{\theta}_{p-2} + A \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\theta}_{p-1} + B \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p + \right. \\
 & \left. + C \left[\frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \boldsymbol{\theta}_{p-1} \tilde{\mathbf{f}}_{n+1}^2 + 2 \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} \right] + 3D \frac{\Delta t^p}{p!} \boldsymbol{\theta}_p \tilde{\mathbf{f}}_{n+1}^2 \right\}^{-1} \times \\
 & \times \{ \bar{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} - A \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} - B \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} - C \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} \tilde{\mathbf{f}}_{n+1}^2 - D \tilde{\mathbf{f}}_{n+1}^3 \}.
 \end{aligned}$$

W równaniu (2.10) wielkości $\tilde{\mathbf{f}}_{n+1}$, ..., $\tilde{\mathbf{f}}_{n+1}^3$ mogą być traktowane jako średnie wartości \mathbf{f} , $\dot{\mathbf{f}}$ i $\ddot{\mathbf{f}}$ w przedziale Δt . Dodatkowo definiujemy następujące sumy:

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} &= \sum_{q=0}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^q}{q!} \boldsymbol{\theta}_q, \\
 \dot{\tilde{\mathbf{f}}}_{n+1} &= \sum_{q=1}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \boldsymbol{\theta}_{q-1}, \\
 \ddot{\tilde{\mathbf{f}}}_{n+1} &= \sum_{q=2}^{p-1} \mathbf{f}_n \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \boldsymbol{\theta}_{q-2}.
 \end{aligned}$$

Algorytm p -tego rzędu wymaga znajomości wartości f_0 oraz wszystkich wartości pochodnych f_0 do rzędu $p-1$. Sama procedura ma postać rekurencyjną opisaną poniżej w czterech następujących punktach: 1) określenie wielkości \tilde{f}_{n+1} , $\dot{\tilde{f}}_{n+1}$ i $\ddot{\tilde{f}}_{n+1}$ z równań (2.11). 2) Określenie z równania (2.10) współczynnika $\alpha_n^{(p)}$. 3) Wylczenie wielkości f_{n+1} , \dot{f}_{n+1} itd. z równań (2.3) i (2.4). 4) Powtórzenie obliczeń zawartych w punktach 1—3 w następnym kroku. Podstawowym problemem w tej jednokrokowej metodzie jest odpowiedni wybór współczynników $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ oraz odpowiednie przyjęcie przedziału czasu Δt .

Metoda powinna być bezwarunkowo stabilna i nie powinna wnosić tzw. tłumienia pasożytniczego. Obie te kwestie były przedmiotem badań szczegółowych w cytowanej pracy Woode'a [22] i nie będziemy o nich tutaj dyskutować. W pracy zastosujemy bezpośrednio do obliczeń algorytm SS22 polegający na ograniczeniu stopnia wielomianu aproksymującego do dwóch. Ten kwadratowy algorytm stanowi jedno z podstawowych narzędzi dynamiki konstrukcji w liniowym zakresie tej pracy. Niniejsza praca jest próbą rozszerzenia metody na zagadnienia geometrycznej nieliniowości. Podstawowe wzory robocze wynikające z rozważań ogólnych (2.3), (2.4), (2.10) i (2.11) są kreślone w sposób następujący:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_{n+1} &= f_n + \dot{f}_n \Delta t \theta_1, & A &= \omega_1^2 \tau, & B &= \omega_1^2, \\ \dot{\tilde{f}}_{n+1} &= \dot{f}_n, & C &= \frac{9\omega_1^2 \tau}{h^2}, & D &= \frac{3\omega_1^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Określamy współczynnik $\alpha_n^{(2)}$:

$$(2.13) \quad \alpha_n^{(2)} = \left\{ 1 + A \Delta t \theta_1 + B \frac{\Delta t^2}{2} \theta_2 + C [\Delta t \theta_1 \tilde{f}_{n+1}^2 + \Delta t^2 \theta_2 \dot{\tilde{f}}_{n+1} \tilde{f}_{n+1}] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} D \Delta t^2 \theta_2 \dot{\tilde{f}}_{n+1}^2 \right\}^{-1} \times \{ \bar{Q} - \dot{\tilde{f}}_{n+1} - A \tilde{f}_{n+1} - B \dot{\tilde{f}}_{n+1} - C \dot{\tilde{f}}_{n+1} \tilde{f}_{n+1} - D \dot{\tilde{f}}_{n+1}^2 \}.$$

Określamy poszukiwane wielkości f_{n+1} , \dot{f}_{n+1} na końcu kroku Δt :

$$(2.14) \quad \begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + \Delta t \dot{f}_n + \alpha_n^{(2)} \frac{\Delta t^2}{2}, \\ \dot{f}_{n+1} &= \dot{f}_n + \alpha_n^{(2)} \Delta t. \end{aligned}$$

Wielkość obciążenia zewnętrznego możemy określić za pomocą wzoru (2.15):

$$(2.15) \quad \bar{Q} = \theta_1 Q_{n+1} + (1 - \theta_1) Q_n, \quad Q = \frac{q_0}{m}.$$

Metoda SS22 jest bezwarunkowo stabilna przy $\theta_1 \geq \frac{1}{2}$ i $\theta_2 \geq \theta_1$.

Podobnie jak wszystkie metody algorytm SSPj jest obarczony pewnymi błędami numerycznymi. Według [21—22] błąd aproksymacji może być zdefiniowany w sposób następujący:

$$(2.16) \quad \frac{\Delta t^p}{(p+1)!} (\alpha_n^{(p)} - \alpha_{n-1}^{(p)}).$$

Błąd amplitudy jest rzędu $O(\Delta t^2)$, a błąd fazy rzędu $O(\Delta t)$. Jeśli poszukamy normy miary tego błędu, to może ona być kryterium zezwalającym na odpowiedni dobór kroku Δt :

$$(2.17) \quad \left\| \frac{\Delta t^p}{(p+1)!} (\alpha_n^{(p)} - \alpha_{n-1}^{(p)}) \right\| > E_{\max}.$$

Drugą metodą zastosowaną w pracy jest tzw. metoda punktu środkowego. Podstawowe formuły tej metody dla równania różniczkowego $f' = g(x, t)$ są określone w sposób następujący:

$$(2.18) \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{n-2} + 2\Delta t \dot{\mathbf{f}}_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad \Delta t = t_n - t_{n-1}.$$

Potrzebną do rozpoczęcia obliczeń wartość \mathbf{f}_1 można wyliczyć dowolną metodą, na przykład metodą Eulera:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_n &= \mathbf{f}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{f}}_{n-1}, \\ \dot{\mathbf{f}}_n &= g(x_n, t_n), \end{aligned} \quad \text{dla } n = 1.$$

Aby zastosować pokazaną metodę, przekształcamy równanie różniczkowe (1.5) do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu, stosując podstawienie

$$(2.20) \quad \dot{f} = z, \quad \dot{z} = Az - Bf - Cz f^2 - D f^3 - Q, \quad \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{z},$$

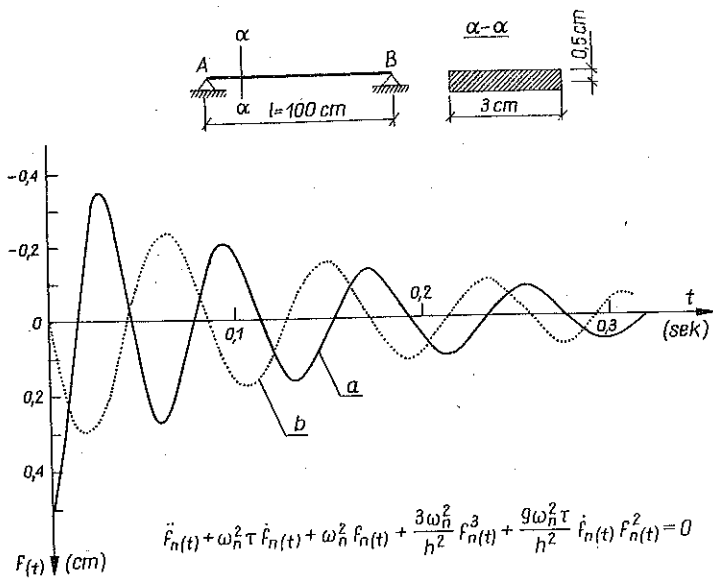
co prowadzi do wzorów rekurencyjnych następujących:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \mathbf{z}_n &= \mathbf{z}_{n-2} + 2\Delta t \dot{\mathbf{z}}_{n-1}, \\ \mathbf{f}_n &= \mathbf{f}_{n-2} + 2\Delta t \dot{\mathbf{f}}_{n-1}. \end{aligned}$$

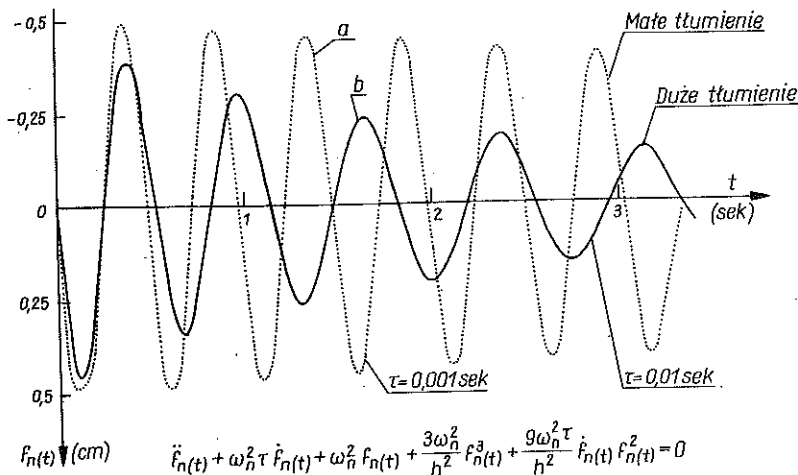
Błąd lokalny dwukrokowej jawnej metody różnicowej dyskutuje się w [16].

3. REZULTATY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH. WNIOSKI

W niniejszym rozdziale podamy wyniki rozwiązań numerycznych równania (1.6) opisującego drgania swobodne i równania (1.5) opisującego drgania wymuszone. Rozpatrywano belkę o przekroju prostokątnym $0,5 \times 3$ cm

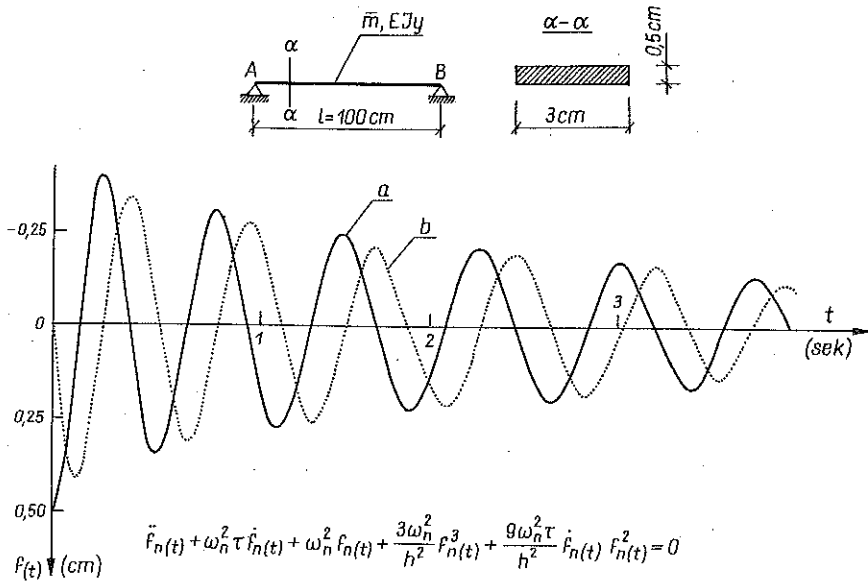


Rys. 1. Drgania swobodne belki z duzymi ugięciami, duze tłumienie. Warunki początkowe: $f_{(0)} = 0,5$ cm, $\dot{f}_{(0)} = 0$ — krzywa (a), $f_{(0)} = 0$, $\dot{f}_{(0)} = 5$ cm/s — krzywa (b). ORIC — 1 Mikrokomputer. $\omega_1^{\text{nl}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{EJ_y}{\bar{m}} \right)^{1/2}$, $\omega_1^2 = 5368,42^1/\text{s}^2$, $h^2 = 0,25$ cm², $n = 1$, $T_1 = 0,08601$ s, $\omega_1 = 73,27^1/\text{s}$, $\tau = 0,002$ s, $\frac{3\omega_1^2}{h^2} = 64421,04^1/\text{cm}^2 \text{s}^2$, $\omega_1^2 \tau = 10,7368^1/\text{s}$, $\frac{9\omega_1^2 \tau}{h^2} = 386,53^1/\text{cm}^2 \text{s}$, $\omega_1 \tau = 0,1465$, $\bar{m} = 0,0117$ kg/cm, $I_y = 0,0313$ cm⁴. Rzędne krzywej (b) należy dzielić przez 10. Materiał belki: stal.



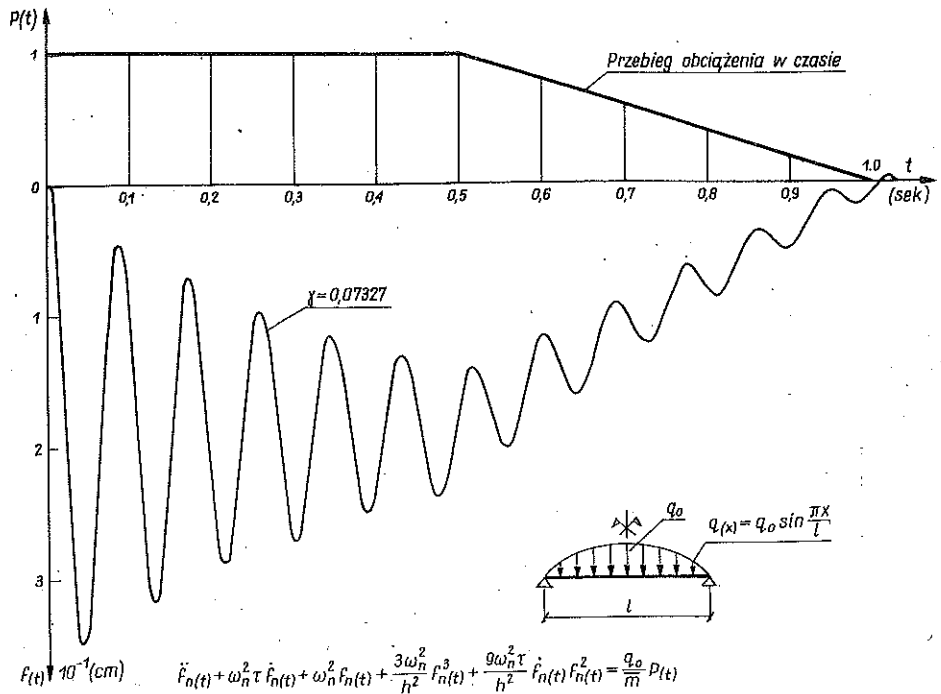
Rys. 2. Wpływ tłumienia na drgania swobodne. Warunki początkowe: $f_{(0)} = 0$, $\dot{f}_{(0)} = 6$ cm/s, ORIC — 1 Mikrokomputer $\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EJ_y}{l^4 \bar{m}}$, $\omega_1 = 7,33$ s⁻¹, $T_1 = 0,86$ s, a) krzywa z małym tłumieniem $\gamma_1 = \omega_1 \tau_2 = 0,0073$, b) krzywa z dużym tłumieniem $\gamma_2 = \omega_1 \tau_2 = 0,073$, $m = 100$. $\bar{m} = 1,17$ kg/cm⁻¹ lub $E_b = 10^{-2} E$ stali.

i długości 100 cm. Pierwsza częstość drgań swobodnych takiej belki obliczona klasyczną teorią przy uwzględnieniu małych ugięć wynosi $73,3 \text{ s}^{-1}$, a pierwszy okres drgań swobodnych wynosi 0,086 s. Materiałem belki jest stal. Drgania swobodne przy różnych warunkach początkowych i różnych współczynnikach tłumienia lub masy albo sztywności pokazano w formie graficznej na rysunkach 1, 2 i 3. Pod wszystkimi rysunkami podano szczegółowe wartości warunków początkowych i wartości współczynników A , B , C i D .

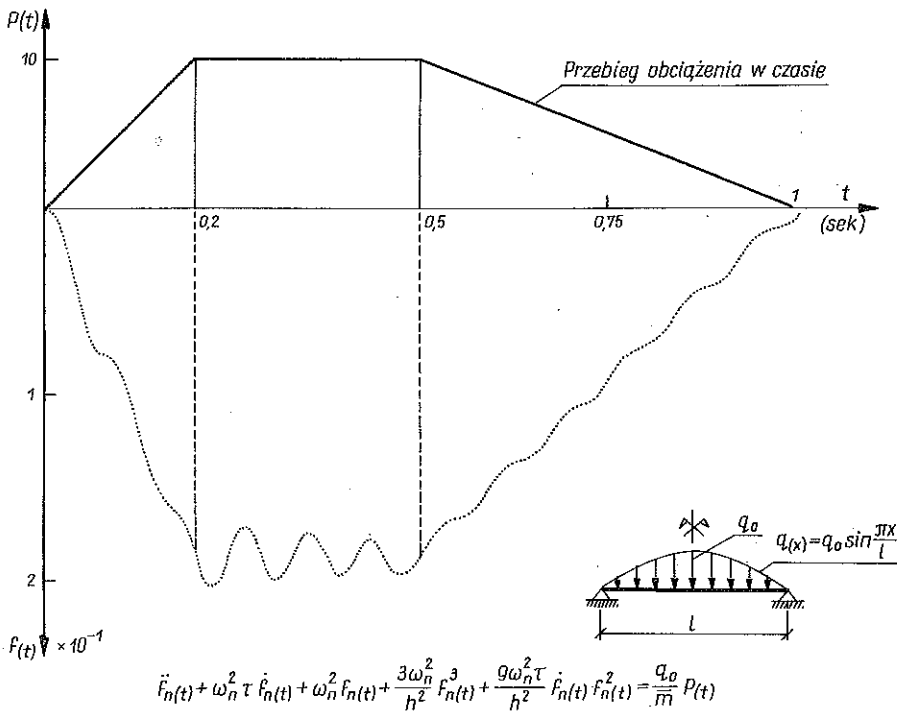


Rys. 3. Drgania swobodne belki z dużymi ugięciami. Warunki początkowe $f_{(0)} = 0,5 \text{ cm}$, $f'_{(0)} = 0$ — krzywa (a), $f_{(0)} = 0$, $f'_{(0)} = 5 \text{ cm/s}$ — krzywa (b). ORIC-1 Mikrokomputer. $\omega_1^2 = 53,68^1/\text{s}$; $T_1 = 0,86 \text{ s}$, $\bar{m} = 100 \cdot 0,0117 \text{ kg/cm}$, $\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJy}{\bar{m}}$, $n = 1$, $\omega_1 = 7,33 \text{ s}^{-1}$, $\tau = 0,002 \text{ s}$, $\frac{3\omega_1^2}{h^2} = 644,21 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-2}$, $\omega_1^2 \tau = 0,10737 \text{ s}^{-1}$, $\frac{9\omega_1^2 \tau}{h^2} = 3,8653 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\omega_1 \tau = \gamma = 0,01461$, $\frac{f_0}{h} = 1$. Krzywa a — przemieszczeniowy warunek początkowy, krzywa b — prędkościowy warunek początkowy. Rzędne należy mnożyć przez 10^{-1} . $E_{\text{belki}} = 10^{-2} E_{\text{stali}}$ lub $m_b = 100 \cdot m_{\text{belki stali}}$.

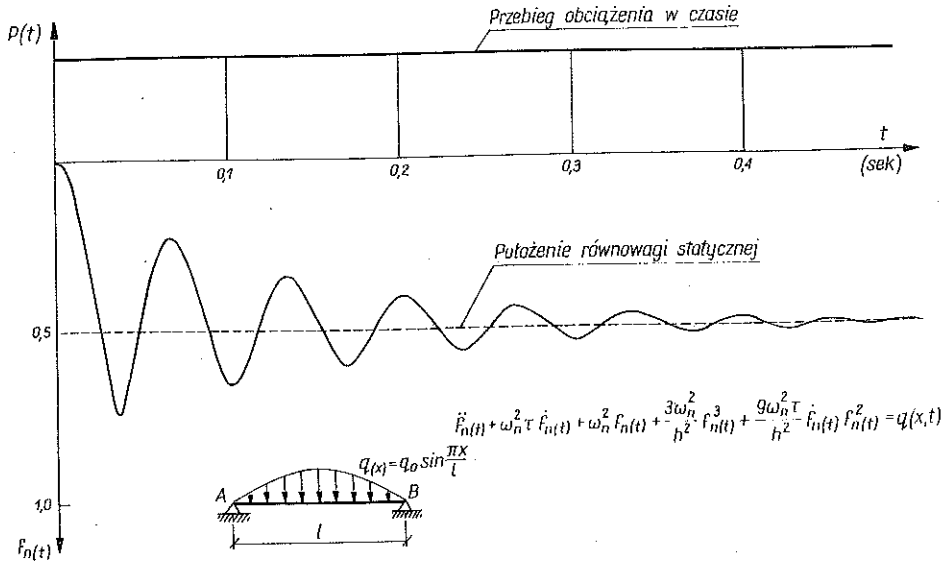
Na rysunku 2 przedstawiono wpływ tłumienia na drgania swobodne; belka w tym przypadku ma masę stokrotnie większą lub stokrotnie mniejszy moduł Younga w stosunku do tego modułu dla belki stalowej. Rysunek 3 pokazuje silny wpływ na rezultaty obliczeń częstości ω_1 , która jest równa 0,1 częstości belki z rysunku 1. Na rysunku 4 pokazano odpowiedź dynamiczną środka belki stalowej z uwzględnieniem tłumienia na dane zewnętrzne obciążenie



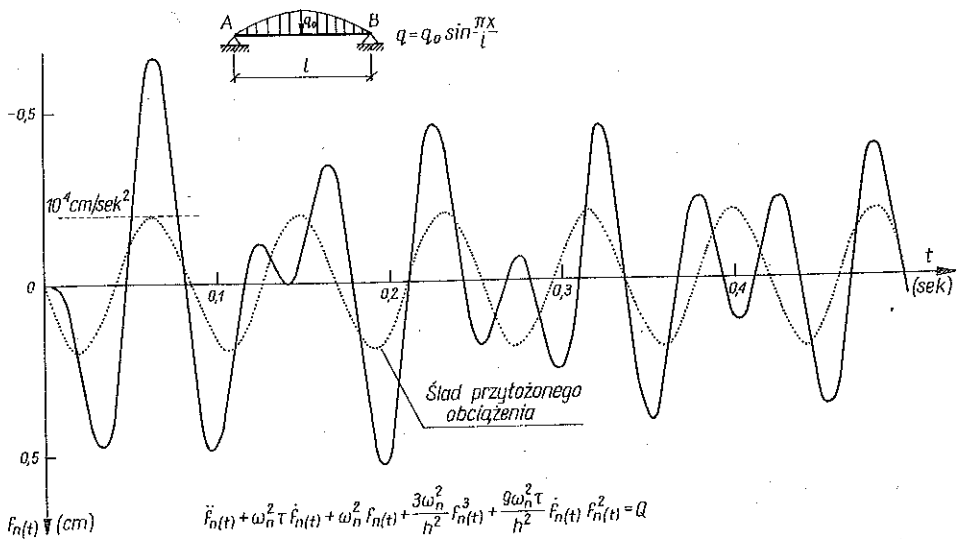
Rys. 4. Drgania wymuszone belki z dużymi ugięciami. Warunki początkowe $f(0) = 0$, $\dot{f}(0) = 0$. $h = 0,5 \text{ cm}$, $\Delta t = 0,0005 \text{ s}$, $\tau = 0,001 \text{ s}$, $\omega_1^2 = 5368,4 \text{ s}^{-2}$, $\omega_1^2 \tau = 5,3684 \text{ s}^{-1}$, $\frac{3\omega_1^2}{h^2} = 6,4421 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-2}$, $\frac{9\omega_1^2 \tau}{h^2} = 193 \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$, $\omega_1 = 73,27 \text{ s}^{-1}$, $T_1 = 0,08601 \text{ s}$, ORIC-1 Mikrokomputer. Materiał belki: stal. $q_0 = 10 \text{ N cm}^{-1}$.



Rys. 5. Drgania wymuszone belki z dużymi ugięciami. Mikrokomputer ORIC-1. $h = 0,5$ cm, $b = 3$ cm, $\Delta t = 0,001$ s, $\tau = 0,001$ s, $\omega_1^2 = 5368,4$ s⁻², $\omega_1^2 \tau = 5,3684$ s⁻¹, $\frac{3\omega_1^2}{h^2} = 64421$ cm⁻² s⁻², $\omega_1 = 73,27$ s⁻¹, $T_1 = 0,08601$ s, $\frac{9\omega_1^2 \tau}{h^2} = 193$ cm⁻² s⁻¹. Równanie różniczkowe nieliniowe niejednorodne problemu. $w(x, t) = f_n(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$, $g(x, t) = P(t) \cdot g_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$. Warunki początkowe: $f_n(0) = 0$, $\dot{f}_n(0) = 0$. Materiał belki stal.



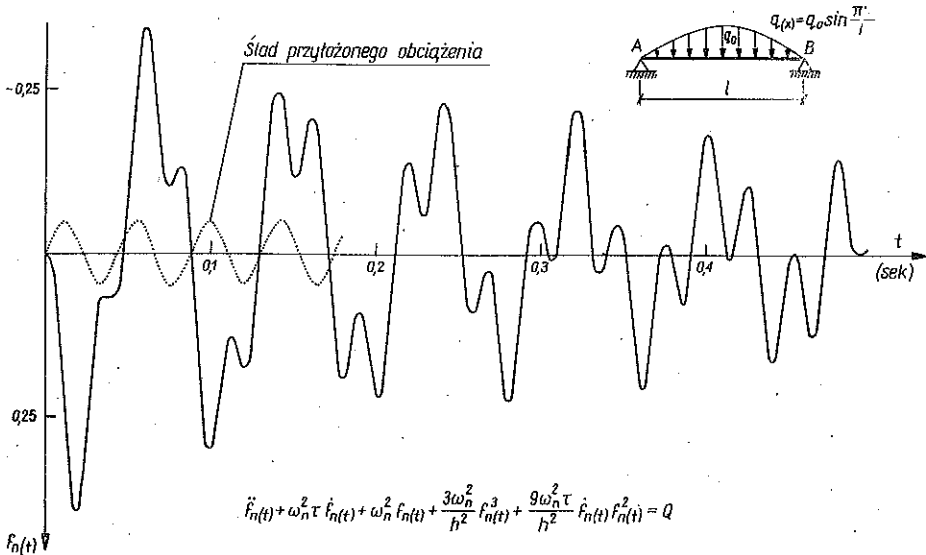
Rys. 6. Drgania wymuszone. $\theta_1 = 0,5$, $\theta_2 = 1,0$, $\Delta t = 0,001$ sek. Równanie nieliniowe. Procedura rozwiązania „SS22” Mikrokomputer „Zenith Z 100”. Warunki początkowe $f_n(0) = 0$, $\dot{f}_n(0) = 0$, $q(x, t) = \frac{q(x)}{m} H(t)$, $H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$, $A = \omega_n^2 = 5,3684 \text{ (s}^{-1}\text{)}$, $B = \omega_n^2 = 5368,4 \text{ (s}^{-1}\text{)}^2$, $\frac{3\omega_n^2}{h^2} = C = 64421 \text{ (s}^{-1} \text{cm}^{-1}\text{)}^2$, $D = \frac{9\omega_n^2 \tau}{h^2} = 193 \text{ (s}^{-1} \text{cm}^{-2}\text{)}$, $q(x, t) = \frac{q_0}{m} = 10^4 \text{ (cm/s}^2\text{)}$.



Rys. 7. Drgania wymuszone harmonicznie $\theta_1 = 0,5$, $\theta_2 = 1,0$. Warunki początkowe: $f_{(0)} = 0$, $\dot{f}_{(0)} = 0$. Równanie nieliniowe. Mikrokomputer „Zenith Z-100”, „SS22” procedura. $Q = q/m = 10000 \cdot \sin(750 t/2\pi)$, $\Delta t = 0,001$ s, $t \in (0, 1, 5)$.

dynamiczne. Obciążenie w postaci tzw. górki sinusoidalnej ma przebieg w czasie typowy w problemach sejsmicznych. Maksymalne naprężenia w tym przypadku nie przekraczają granicy sprężystości, natomiast ugięcia są duże.

Na rysunkach 5 i 6 przedstawiono również drgania wymuszone. Obciążenie w czasie ma kształt trapezu lub opisane jest funkcją Heaviside'a. Za współczynniki θ_1 i θ_2 przyjęto 0,5 i 1, wielkość kroku $\Delta t = 0,0005$ i 0,001 s. Na rysunkach 7 i 8 obciążenie w czasie jest harmoniczne, ślad jego jest odpowiednio zaznaczony.



Rys. 8. Drgania wymuszone harmonicznie. Równanie nieliniowe. Procedura „SS22”. Mikrokomputer „Zenith Z-100” $Q_1 = 0,5$, $Q_1 = 1$ $\Delta t = 0,001$ s, $Q = q(x) \sin(1500 t/2\pi)$. Warunki początkowe $f_{n(0)} = 0$, $\dot{f}_{n(0)} = 0$.

Obliczenia przeprowadzono na komputerze Zenith Z-100 i Oric-1, programy napisano w języku BASIC. Obie procedury testowano na równaniu liniowym różniczkowym drugiego rzędu. Z przeprowadzonych obliczeń wynikają następujące wnioski. Częstość kołowa geometrycznie nieliniowego zagadnienia drgań swobodnych jest zawsze większa od częstości kołowej belki z małymi ugięciami obliczanej klasycznie. Częstość i okres drgań swobodnych belki u dużymi ugięciami zawsze zależy od amplitudy ugięcia. W belkach z nieprzesuwными podporami obliczanych według teorii drugiego rzędu (efekt nieliniowości geometrycznej), występuje zawsze duża siła rozciągająca i osiowa proporcjonalna do ugięć. Siła ta zwiększa sztywność belki na zginanie, zmniejszając amplitudy ugięć w stosunku do amplitudy ugięć tej samej belki obliczanej klasycznie.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *The effect of an axial force on the vibration of hinger bars*, J. Appl. Mech., p. 35, 1950.
2. D. A. EVENSEN, *Nonlinear vibrations of beam with various boundary conditions*, AIAA J., 6, 1968.
3. P. H. McDONALD, *Nonlinear dynamic coupling in a beam vibration*, J. Appl. Mech., 5, p. 573, 1955.
4. D. BURGREN, *Free vibration of a pin ended column with constant distance between pin ends*, J. Appl. Mech., 18, 2, p. 135, 1951.
5. Z. WASZCZYSZYN, M. ŻYCZKOWSKI, *Finite elastic deflections of a stretelable beam on immovable supports*, Arch. Mech., p. 35, 1950.
6. Z. WASZCZYSZYN, *Przybliżone obliczenia dużych ugięć sprężystych belki na podporach nieprzesuwnych*, Rozp. Inż., 1, 1962.
7. CHUH MEI, *Nonlinear vibrations of beam matrix displacement method*, AIAA J., 10, 1972.
8. W. SATO, *Nonlinear free vibrations of stepped thickness beam*, J. Sound and Vibr., 72, p. 415, 1980.
9. CHUH MEI, *Finite element displacement method for large amplitude free vibrations of beam and plates*, J. Comp. and Struc., 3, 1972.
10. G. PRATHAP, T. K. VARADAN, *The large amplitudes vibration of hinged beam*, J. Soun. and Vibr., 9, p. 219, 1978.
11. G. VENKATSSWARA RAO, K. KANAKA RAJU and I. S. RAJU, *Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of hinged beam*, J. Comp. and Struc., 3, p. 355, 1972.
12. G. R. BHASHYAM, G. PRATHAP, *Galerkin finite element methods for nonlinear beam vibrations*, J. Soun. and Vibr., p. 193, 1972.
13. B. S. SARMA, T. K. VARADAN, *Lagrange-type formulation for finite element analysis of nonlinear beam vibrations*, J. Soun. and Vibr., 86, p. 61, 1983.
14. H. R. BUSBY, Jr., and V. I. WEINGARTEN, *Non-linear response of a beam to periodic loading*, Int. J. Non-linear Mech., p. 289, 1972.
15. L. H. DONNEL, *Beam, plates and shell*, McGraw-Hill, 1976.
16. M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa-Poznań 1985.
17. E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Pr., 1963.
18. A. HURWITZ, R. COURANT, *Funtionen theorie*, Springer-Verlag, 1964.
20. CZ. WOŹNIAK, M. KLEIBER, *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN, 1982.
21. O. C. ZIENKIEWICZ, W. L. WOOD, N. W. HINE, *A unified set single step algorithms. Part 1. General formulation and applications*, Int. J. Num. Met. in Engin., 20, 1529—1552, 1984.
22. W. L. WOOD, *A unified set of single step algorithms. Part 2. Theory*, Int. J. Num. Met in Engin., 20, 2303—2309, 1984.

РЕЗЮМЕ

СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С БОЛЬШИМИ ПРОГИБАМИ

В работе обсуждаются свободные и вынужденные колебания вязкоупругой балки с неподвижными опорами. Прогобы балки являются большими. Нелинейное уравнение движения интегрировалось численно, опираясь на метод SSPj и центральной точки. Работа иллюстрирована рядом расчетных примеров.

SUMMARY

FREE AND FORCED VIBRATION OF A BEAM UNDER LARGE DEFLECTIONS

Free and forced vibrations of visco-elastic beams resting on fixed supports are discussed. The displacements are assumed to be large. Nonlinear equation, of motion is solved numerically; several numerical examples are presented.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lipca 1985 r.
