

STATYKA I STATECZNOŚĆ SIATKOWYCH DŹWIGARÓW CIĘGNOWYCH

HENRYK FRĄCKIEWICZ (WARSZAWA) i RYSZARD TARGOWSKI (LUBLIN)

Stosując układ prostych elementów skończonych sformułowanych na podstawie teorii ośrodków siatkowych i nieklasycznej geometrii różnicowej, w pracy przeprowadzono nieliniową analizę statyczną dźwigarów ciągnowych. Aczkolwiek zaproponowana w pracy metoda zastosowana została do dźwigarów o topologicznie regularnej strukturze, to może być uogólniona na dźwigary o dowolnej strukturze i obciążeniu zewnętrznym. Ze względu na przyjęcie dowolnej geometrii konfiguracji początkowej dźwigara ciągnowego oraz nieliniowość odkształceń, w pracy wykorzystana została metoda Newtona–Raphsona. Analizą statyczną, zarówno analityczną jak i numeryczną, objęto płaskie i przestrzenne dźwigary dwucięgnowe. Analizę stateczności ograniczono natomiast do płaskich dźwigarów dwucięgnowych i płaskiej postaci utraty stateczności. Przedstawiona w pracy metoda może być jednak uogólniona zarówno na inne typy dźwigarów jak i ogólniejsze formy utraty stateczności.

1. WSTĘP

Pionierski etap rozwoju nowoczesnych ustrojów ciągnowych charakteryzują opisane w pracach [1 i 7] konstrukcje B. Schnircha i V. G. Szuchowa. Projekty Schnircha i Szuchowa nie wzbudziły jednak szerszego zainteresowania nowym rodzajem konstrukcji i dopiero realizacja w 1953 r. w Stanach Zjednoczonych według projektu M. Nowickiego nowoczesnej hali wystawowej z przekryciem w postaci przestrzennej siatki ciągnowej rozpoczęła nowy, współczesny etap rozwoju ustrojów ciągnowych. Od tego czasu stały się one obiektem specjalnych badań i studiów, których wyniki służyły praktyce i utrwalone zostały w bogatej literaturze przedmiotu. Rozszerzył się też znacznie zakres zastosowania oraz powstały nowe rodzaje struktur ciągnowych, stwarzające praktycznie nieograniczone możliwości kształtowania układów konstrukcyjnych.

Na uwagę zasługuje rozpoczęty w latach siedemdziesiątych wzrost zainteresowania konstrukcjami ciągnowymi w Polsce. Miarą tego zainteresowania mogą być liczne publikacje i dwie konferencje naukowe poświęcone między innymi konstrukcjom ciągnowym. Badania własności tych konstrukcji, zwłaszcza prace w ramach problemu węzłowego 05.12, pozwoliły na stworzenie praktycznych narzędzi obliczeniowych w postaci komputerowych pro-

gramów analizy dowolnych lub szczególnych struktur ciągnowych [9, 10, 11 i 12].

Bez większych trudności można więc w chwili obecnej rozwiązywać praktyczne problemy obliczeniowe analizy konstrukcji ciągnowych. Wydaje się jednak celowe prowadzenie dalszych badań i prezentowanie nowych opisów problemu ze względu na bogactwo zadań teoretycznych i praktycznych związanych z tą klasą konstrukcji.

Rozważania nasze dotyczą jednego rodzaju struktur ciągnowych o budowie pasmowej, tzw. kratownic ciągnowych nazywanych w dalszej części pracy pasmowymi dźwigarami siatkowymi. Rozważa się w zakresie nieliniowym wstępnie sprężone dwupasowe dźwigary, których wiotkie pasy połączone są pojedynczymi, odkształcalnymi łącznikami (sztywnymi lub wiotkimi). Skończona liczba łączników, które zapewniają współpracę pasów dźwigara, decyduje o dyskretnym charakterze układu. Miejsca połączenia pasów z łącznikami oraz miejsca podparcia pasów są charakterystycznymi węzłami dźwigara.

Budowa dźwigara i konieczność wprowadzenia decydujących o jego praktycznej przydatności sił wstępnego napięcia, które silnie związane są z obiektami geometrycznymi, określającymi początkowy kształt układu, zmuszają do łącznej analizy zagadnień mechaniki oraz geometrii dyskretnej struktury. Ma to szczególne znaczenie w przypadku analizy dźwigarów przestrzennych, dla których warunki określające początkowy kształt struktury, pozwalający na stabilne wstępne sprężenie, nie są tak proste jak dla dźwigarów płaskich [13]. Znane (omówione np. w pracach [4, 5 i 6]) metody analizy dźwigarów ciągnych stwarzają pewne trudności w realizacji przedstawionego podejścia analizy dźwigarów lub nie pozwalają na jego realizację. Brak też metody analizy zagadnienia stateczności płaskich dźwigarów, w których występują ściskane łączniki pomiędzy pasami. Dlatego jako cel niniejszej pracy przyjęto opracowanie metody analizy zagadnień statyki i stateczności wstępnie sprężonych, dyskretnych pasmowych dźwigarów ciągnowych, która umożliwi kompleksowe badanie własności dźwigarów oraz zagadnień geometrii dyskretnych pasm. W celu uporządkowania i uproszczenia geometrycznej i mechanicznej strony rozważań przyjęto do opisu problemu formalizm nieliniowej mechaniki ośrodków siatkowych w ujęciu zaproponowanym przez H. FRACKIEWICZA w pracy [2].

2. ZAŁOŻENIA I OZNACZENIA

Jako model geometryczny dźwigara przyjęto pokrywający się z jego węzłami, dyskretny powierzchniowy zbiór punktów połączonych jednostronnymi lub dwustronnymi więzami. Do opisu modelu wykorzystano współrzędną ξ^1 , która przechodzi przez węzły należące do jednego pasa dźwigara.

Rozróżnia się dwie konfiguracje modelu dźwigara, konfigurację początkową określoną przez siły wstępnego napięcia układu oraz konfigurację aktualną określoną przez dane wpływy zewnętrzne. Pod pojęciem wpływów zewnętrznych rozumie się też zmianę sił wstępnego napięcia układu. Założono, że znana jest konfiguracja początkowa dźwigara, a składowe obiektów określających konfigurację aktualną, dla danych wpływów zewnętrznych, obliczane są w procesie rozwiązania.

W pracy przyjęto ponadto następujące założenia: 1) węzły dźwigara są przegubami kulistymi, 2) odcinki wiotkich cięgien pomiędzy węzłami mają stały przekrój i przenoszą tylko osiowe siły rozciągające, 3) łączniki poprzeczne są sztywnymi prętami przyrównanymi lub wiotkimi cięgnami, 4) materiał dźwigara jest liniowo sprężysty oraz 5) na dźwigar działają tylko skupione siły zewnętrzne przyłożone do węzłów układu.

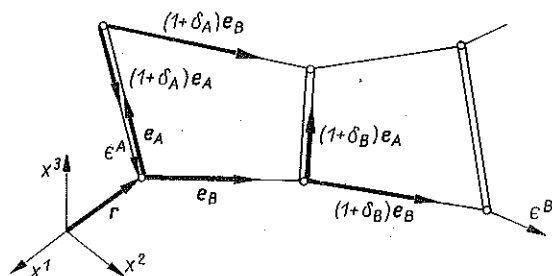
W pracy rozróżnia się trójwymiarową przestrzeń Euklidesa z bazą i_β , $\beta = 1, 2, 3$ oraz dwuwymiarową, opisaną przy użyciu jednej współrzędnej ξ^1 , dyskretną przestrzeń Riemanna z bazą podstawową e_a w konfiguracji początkowej lub z bazą podstawową ϵ_a w konfiguracji aktualnej zbioru punktów. Zbiory w odpowiednich konfiguracjach najeżone są wektorami jednostkowymi e_3 oraz ϵ_3 .

Pozioma kreska nad symbolem oznacza, że symbol ten odnosi się do węzłów pasa nazwanego pasem górnym. Symbole bez kreski odnoszą się do węzłów pasa nazwanego pasem dolnym. W pracy obowiązuje konwencja sumacyjna.

3. GEOMETRIA MODELU DYSKRETNEJ STRUKTURY PASMOWEJ

Rozważa się, przedstawiony na rys. 1, płaski pasmowy zbiór punktów, które pokrywają się z węzłami dyskretnego dźwigara ciągnowego. Zbiór ten sparametryzowano jedną współrzędną ξ^1 , która przechodzi tylko przez węzły należące do jednego z pasów dźwigara.

Tak określony dyskretny zbiór punktów może być traktowany jako zbiór powierzchniowy o szczególnych własnościach wyróżniających go z ogólnym



Rys. 1

nej klasy dyskretnych powierzchniowych zbiorów punktów sparametryzowanych układem współrzędnych ξ^a ($a = 1, 2$). Własnością szczególną zbioru pasmowego jest cykliczność współrzędnej ξ^2 i wynikające z niej przy $\Delta\xi^2 = 1$ następujące zależności pomiędzy wektorami \mathbf{e}_2 i $(1 + \delta_2)\mathbf{e}_2$, \mathbf{e}_1 i $(1 + \delta_2)\mathbf{e}_1$ oraz \mathbf{e}_3 i $(1 + \delta_2)\mathbf{e}_3$ bazy podstawowej zbioru:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_2 + (1 + \delta_2)\mathbf{e}_2 &= 0, \\ (1 + \delta_2)(1 + \delta_2)\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 + (1 + \delta_2)\mathbf{e}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Przyjęta interpretacja i opis dyskretnego zbioru pasmowego, w porównaniu z innymi możliwymi sposobami opisu ma tę zaletę, że nie wyróżnia określonych pasów dźwigara przez co, sprowadzając układ dwuwymiarowy do jednowymiarowego, upraszcza wyprowadzanie i analizę związków i równań.

Z analizy równań wektorowych (3.1) wynika, że

$$(3.2) \quad \Gamma_{22}^1 = \bar{\Gamma}_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \bar{\Gamma}_{22}^2 = -2, \quad b_2 = \bar{b}_2 = -2$$

oraz

$$(3.3) \quad \Gamma_{12}^a + \bar{\Gamma}_{12}^a + \bar{\Gamma}_{12}^i \Gamma_{12}^a = 0.$$

Należy zaznaczyć, że niezerowy obiekt najeżenia b_2 może być obliczony ze wzoru (c) wyprowadzonego w pracy [2] na s. 49 po przyjęciu znaku (+) w tym wzorze.

Z układu równań (3.3) można obliczyć współczynniki koneksji $\bar{\Gamma}_{12}^a$ w zależności od Γ_{12}^a . Rozwiązanie układu (3.3) po uwzględnieniu zależności (3.2) ma postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}_{12}^1 &= -\Gamma_{12}^1 (1 + \Gamma_{12}^1)^{-1}, \\ \bar{\Gamma}_{12}^2 &= \Gamma_{12}^2 (1 + \Gamma_{12}^1)^{-1}. \end{aligned}$$

Wektory bazy podstawowej zbioru określają składowe obiektu podstawowego g_{ab} , \bar{g}_{ab} . Znana zależność pomiędzy współczynnikami koneksji zbioru dyskretnego i składowymi obiektu podstawowego wyprowadzona w pracy [2]

$$(3.5) \quad \frac{\delta_s g_{pt}}{\Delta\xi^s} + \frac{\delta_p g_{st}}{\Delta\xi^p} - \frac{\delta_t g_{sp}}{\Delta\xi^t} = 2\Gamma_{sp}^i g_{it} + \\ + [\Gamma_{sp}^i (\Gamma_{is}^j \Delta\xi^s + \Gamma_{ip}^j \Delta\xi^p) - \Gamma_{st}^i \Gamma_{pt}^j \Delta\xi^t] g_{ij}$$

dla rozważanego zbioru przyjmie postać następującego układu równań:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1 g_{11}}{\Delta\xi^1} &= 2\Gamma_{11}^i g_{i1} + \Gamma_{11}^i \Gamma_{11}^j g_{ij} \Delta\xi^1, \\ 2 \frac{\delta_1 g_{12}}{\Delta\xi^1} - \bar{g}_{11} + g_{11} &= 2\Gamma_{11}^i g_{i2} + (2\Gamma_{11}^i \Gamma_{21}^j \Delta\xi^1 - \Gamma_{12}^i \Gamma_{12}^j) g_{ij}, \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \bar{g}_{11} - g_{11} &= \Gamma_{12}^i (2g_{i1} + \Gamma_{12}^j g_{ij}), \\ \frac{\delta_1 g_{22}}{\Delta \xi^1} &= \Gamma_{12}^i (2g_{i2} + \Gamma_{12}^j g_{ij} \Delta \xi^1), \\ \frac{\delta_1 g_{22}}{\Delta \xi^1} - 2(\bar{g}_{21} + g_{21}) &= \Gamma_{12}^i (4g_{21} + \Gamma_{12}^j g_{ij} \Delta \xi^1), \\ \Gamma_{22}^2 (2 + \Gamma_{22}^2) g_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Równanie (3.6)₆ tego układu, po podstawieniu (3.2) spełnione jest tożsamościowo. Do obliczenia współczynników Γ_{11}^a , Γ_{21}^a pozostaje więc układ pięciu równań.

Z analizy równań (3.6)_{4,5} wynikają następujące wzory określające jednoznacznie składowe Γ_{21}^a .

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Gamma_{21}^1 &= [Dg_{22} - (g_{12} \Delta \xi^1 - g_{22}) F] (-g \Delta \xi^1)^{-1}, \\ \Gamma_{21}^2 &= [Dg_{12} - (g_{11} \Delta \xi^1 - g_{12}) F] (g \Delta \xi^1)^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$g = \det \|g_{ab}\|, \quad F = \bar{g}_{12} + g_{12},$$

$$2D = \frac{\delta_1 g_{22}}{\Delta \xi^1} - (\bar{g}_{11} - g_{11}) \Delta \xi^1.$$

Z analizy równań (3.6)_{1,2}, po uwzględnieniu jako pomocniczego związku równania (3.6)₃, można wyznaczyć współczynniki koneksji Γ_{11}^a . Nieliniowość równania (3.6)₁ sprawia tu jednak pewne trudności obliczeniowe i dlatego w dalszych rozważaniach do obliczenia współczynników Γ_{11}^a wykorzystano nowy układ równań liniowych.

Pierwsze równanie tego układu wynika z analizy następującego równania:

$$(3.8) \quad (1 + \delta_1) \mathbf{e}_3 = (1 + \delta_1) \mathbf{e}_1 \times (1 + \delta_1) \mathbf{e}_2 (1 + \delta_1) g^{-0,5}.$$

Ma ono postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 (1 + \Gamma_{21}^2 \Delta \xi^1) \Delta \xi^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 \Delta \xi^1 \Delta \xi^1 &= \\ = (1 + b_1 \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) g^{0,5} g^{-0,5} - (1 + \Gamma_{21}^2 \Delta \xi^1). \end{aligned}$$

Drugie równanie nowego układu uzyskano po zsumowaniu równań (3.6)_{1,2}:

$$(3.10) \quad \Gamma_{11}^1 (g_{12} + \Gamma_{21}^i g_{i1} \Delta \xi^1) + \Gamma_{11}^2 (g_{22} + \Gamma_{21}^i g_{i2} \Delta \xi^1) = \frac{\delta_1 g_{21}}{\Delta \xi^1} - \Gamma_{21}^i g_{i1}.$$

Występująca w równaniu (3.9) składowa obiektu najeżenia $b_1 = 0$ lub $b_1 = -2$ (gdy $\Gamma_{21}^2 < -1$) w zależności od rodzaju struktury.

Rozwiązaniem układu równań (3.9) i (3.10) są następujące funkcje:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= (C_2 L_{21} - L_1 A_{21}) (A_{11} L_{21} - A_{21} L_{11})^{-1}, \\ \Gamma_{11}^2 &= (A_{11} L_1 - L_{11} C_2) (A_{11} L_{21} - A_{21} L_{11})^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} L_{11} &= (1 + \Gamma_{21}^2 \Delta \xi^1) \Delta \xi^1, & L_{21} &= -\Gamma_{21}^1 \Delta \xi^1 \Delta \xi^1, \\ L_1 &= (1 + b_1 \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) g^{0.5} \cdot g^{-0.5} - 1 - \Gamma_{21}^2 \Delta \xi^1, \\ A_{11} &= g_{12} + \Gamma_{21}^1 g_{t1} \Delta \xi^1, & A_{21} &= g_{22} + \Gamma_{21}^t g_{t2} \Delta \xi^1, \\ C_2 &= \frac{\delta_1 g_{21}}{\Delta \xi^1} - \Gamma_{21}^t g_{t1}. \end{aligned}$$

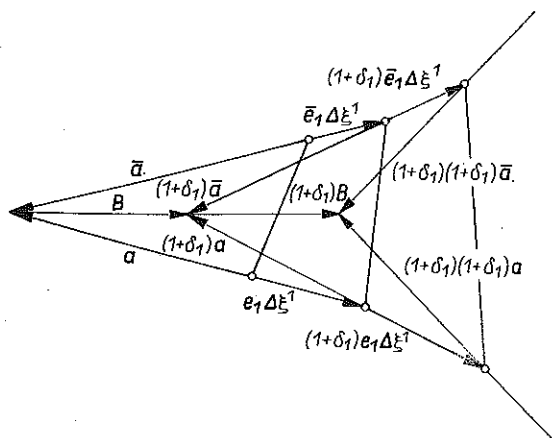
Wyprowadzone wzory pozwalają wyrazić współczynniki koneksji Γ_{ab}^t dyskretnego zbioru pasmowego przez składowe g_{ab} obiektu podstawowego. Pozwalają więc w bardzo prosty sposób określić geometrię dyskretnej struktury pasmowej, gdy dane są odpowiednie wymiary jej elementów składowych. W połączeniu z wynikami rozważań dalszej części pracy pozwolą one też określić dopuszczalny kształt dyskretnej, wstępnie stabilnie sprężonej struktury.

4. GEOMETRIA MODELU DŹWIGARA WSTĘPNIE SPRĘŻONEGO

Praktyczna przydatność struktur ciągnowych związana jest jak wiadomo z możliwością ich wstępnego, stabilnego napięcia przy użyciu odpowiednich działań zewnętrznych. Działania te powodują przejście danej struktury z konfiguracji nieobciążonej do odpowiedniej konfiguracji wstępnie sprężonej, której parametry geometryczne są ściśle związane z danym działaniem zewnętrznym.

Jednym z możliwych i często stosowanych działań, które pozwala sprężyć struktury ciągnowe np. płaskie dźwigary pasmowe, jest układ sił sprężających przyłożonych do węzłów brzegowych struktury. Siły te określają kształt struktury, przyjmowany jako początkowy, i zapewniają jej odpowiednią sztywność.

Dla płaskich dźwigarów ciągnowych, na podstawie analizy modelu ciągłego struktury, podano omówione np. w pracy [6] odpowiednie kryteria geometryczne, których spełnienie pozwala na wstępne, stabilne sprężenie dźwigara. Przy zastosowaniu dyskretnego modelu dźwigara, który dokładniej opisuje rzeczywistą konstrukcję, odpowiednie kryteria geometryczne podane zostały w pracy [8]. Sprowadzają się one do warunku, aby bieguny chwilowe względnych obrotów odpowiednich elementów dźwigara leżały na jednej prostej. Warunek powyższy związany z budową odpowiadających pasom



Rys. 2

dźwigara wieloboków sznurowych dla sił występujących w łącznikach poprzecznych może być przedstawiony w postaci analitycznej.

Przyjętemu modelowi dyskretnemu dźwigara odpowiada układ wektorów przedstawiony na rys. 2. Punkty przecięcia kierunków wektorów \mathbf{a} i $\bar{\mathbf{a}}$ wyznaczają biegun chwilowy obrotu względnego łączników poprzecznych pokrywających się z wektorami \mathbf{e}_2 i $(1+\delta_1)\mathbf{e}_2$. Kolejne bieguny chwilowe obrotów względnych odpowiednich łączników poprzecznych wyznaczają przecinające się kierunki wektorów $(1+\delta_1)\mathbf{a}$, $(1+\delta_1)\bar{\mathbf{a}}$, $(1+\delta_1)(1+\delta_1)\mathbf{a}$, $(1+\delta_1)(1+\delta_1)\bar{\mathbf{a}}$ itd.

Składowe wektorów \mathbf{a} i $\bar{\mathbf{a}}$ układu określa się następującymi wzorami:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} a^1 &= (\bar{g} g_{12} - \bar{g}_{12} \sqrt{g\bar{g}}) [\bar{g}_{11} (g_{12})^2 - g_{11} (\bar{g}_{12})^2]^{-1}, \\ \bar{a}^1 &= (g_{22} - a^1 g_{12}) (\bar{g}_{12})^{-1}, \quad \bar{a}^2 = a^2 = 0, \end{aligned}$$

które wynikają z analizy trójkąta utworzonego przez te wektory oraz wektor \mathbf{e}_2 . Wzory (4.1) są poprawne dla ogólnego przypadku geometrii dźwigara, gdy

$$\bar{g}_{11} (g_{12})^2 - g_{11} (\bar{g}_{12})^2 \neq 0.$$

W przypadku szczególnym gdy $g_{11} = \bar{g}_{11}$ i $g_{12} = \bar{g}_{12} \neq 0$, wzory określające składowe wektorów \mathbf{a} i $\bar{\mathbf{a}}$ przyjmują postać

$$(4.2) \quad \begin{aligned} a^1 &= g_{22} (2g_{12})^{-1}, \quad a^2 = 0, \\ \bar{a}^1 &= g_{22} (2\bar{g}_{12})^{-1}, \quad \bar{a}^2 = 0. \end{aligned}$$

Wektor \mathbf{B} z rys. 2 i jego składowe w bazie podstawowej określone są następującymi wzorami:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_1 + \nabla_1 a^k \mathbf{e}_k) \Delta \xi^1, \\ \mathbf{B}^1 &= \left(1 + \frac{\delta_1 a^1}{\Delta \xi^1} + \Gamma_{11}^1 (1 + \delta_1) a^1 \right) \Delta \xi^1, \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad B^2 = \Gamma_{11}^2 (1 + \delta_1) a^1 \Delta \xi^1.$$

[cd.]

Warunek wstępnego stabilnego sprzężenia dźwigara może być przedstawiony jako warunek współliniowości wektorów \mathbf{B} i $(1 + \delta_1)\mathbf{B}$:

$$(4.4) \quad \mathbf{B} \times (1 + \delta_1)\mathbf{B} \quad \text{lub} \quad \mathbf{B} \times \delta_1 \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Po podstawieniu do (4.4) przyrostu $\delta_1 \mathbf{B}$, obliczonego ze wzoru

$$\delta_1 \mathbf{B} = \mathbf{V}_1 B^k e_k \Delta \xi^1$$

oraz po prostych przekształceniach równanie (4.4) przyjmie postać

$$(4.5) \quad \varepsilon_{ik} B^i \mathbf{V}_1 B^k \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \quad i, k = 1, 2.$$

Z równania (4.5) wynika, że

$$(4.6) \quad \varepsilon_{ik} B^i \mathbf{V}_1 B^k = 0.$$

Związek (4.6) można też przedstawić w postaci

$$(4.7) \quad \frac{B^1}{B^2} = \frac{\mathbf{V}_1 B^1}{\mathbf{V}_1 B^2}.$$

Wyprowadzone związki (4.6) i (4.7) są analityczną postacią warunku sprzężenia i muszą być spełnione przez określone w p. 3 parametry geometryczne modelu wstępnie sprzężonego pasmowego dźwigara ciągnowego. Pozwalają one na prostą kontrolę dopuszczalności konfiguracji i kształtowanie dyskretnych wstępnie sprzężonych dźwigarów ciągnowych przy użyciu komputera.

5. STAN PRZEMIESZCZENIA I ODKSZTAŁCENIA DŹWIGARA

Zmianę konfiguracji siatkowego dźwigara ciągnowego określa jednoznacznie pole wektorów przemieszczenia \mathbf{V} , $\bar{\mathbf{V}}$ węzłów pasmowego zbioru dyskretnego (rys. 3).

Wektory \mathbf{V} i $\bar{\mathbf{V}}$ można wyrazić w bazie podstawowej początkowej konfiguracji początkowej zbioru, która określona jest przez promień wektor \mathbf{r} :

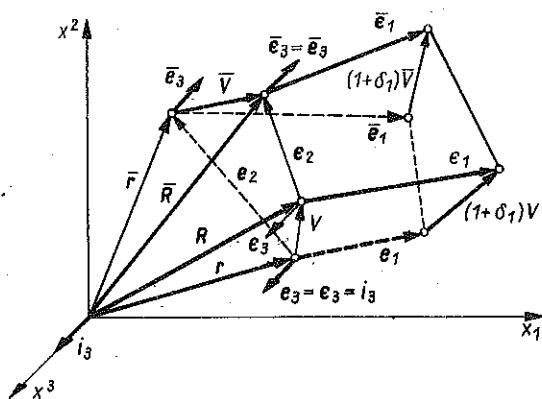
$$\mathbf{V} = V^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \bar{\mathbf{V}} = \bar{V}^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha.$$

Promienie wektory konfiguracji aktualnej wyrażają się wzorami

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{V}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{V}},$$

a wektory powierzchniowej bazy podstawowej tej konfiguracji — wzorami

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\delta_1 \mathbf{R}}{\Delta \xi^1}, & \epsilon_1 &= \frac{\delta_1 \bar{\mathbf{R}}}{\Delta \xi^1}, \\ \epsilon_2 &= \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R}, & \bar{\epsilon}_2 &= -\epsilon_2. \end{aligned}$$



Rys. 3

Wektory ϵ_a ($a = 1, 2$) określają składowe obiektu podstawowego w konfiguracji aktualnej $G_{sb} = \epsilon_a \cdot \epsilon_b$.

W bazie konfiguracji początkowej wektory e_a i \bar{e}_a wyrażają się następującymi wzorami:

$$\epsilon_a = e_a + \nabla_a V^\alpha e_\alpha, \quad \bar{\epsilon}_a = \bar{e}_a + \nabla_a \bar{V}^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Występujące w tych wzorach przyrosty kowariantne ∇_a określone są przez następujące wzory:

$$\begin{aligned} \nabla_1 V^s &= \frac{\delta_1 V^s}{\Delta \xi^1} + \Gamma_{k1}^s (1 + \delta_1) V^k, \\ \nabla_1 V^3 &= \frac{\delta_1 V^3}{\Delta \xi^1} + b_1 (1 + \delta_1) V^3, \quad \text{gdy } b_1 \neq 0, \\ \nabla_2 V^1 &= (1 + \Gamma_{21}^1) \bar{V}^1 - V^1, \\ \nabla_2 V^2 &= \Gamma_{21}^2 \bar{V}^1 - \bar{V}^2 - V^2, \\ \nabla_2 V^3 &= -V^3 - \bar{V}^3, \end{aligned} \quad (5.2)$$

z których przyrosty kowariantne składowych \bar{V}^α obliczyć można po odpowiedniej zmianie symboli.

Składowe obiektu odkształcenia rozpatrywanego dźwigara, które określają wydłużenia względne łączników poprzecznych i odcinków pasów pomiędzy węzłami, są określone następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \nabla_i V^k g_{ik} + 0.5 (g_{sk} \nabla_i V^k \cdot \nabla_i V^s + \nabla_i V^3 \cdot \nabla_i V^3), \\ \bar{\gamma}_{ii} &= \nabla_i \bar{V}^k \bar{g}_{ik} + 0.5 (\bar{g}_{sk} \nabla_i \bar{V}^k \cdot \nabla_i \bar{V}^s + \nabla_i \bar{V}^3 \cdot \nabla_i \bar{V}^3). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Odształcenia względne ϵ_i można obliczyć z następującego wzoru:

$$\epsilon_i = \sqrt{1 + 2\gamma_{ii} (g_{ii})^{-1}} - 1,$$

dla skończonych odkształceń lub ze wzoru $\varepsilon_i = \gamma_{ii} (g_{ii})^{-1}$ dla odkształceń dostatecznie małych.

Składowe obiektu podstawowego konfiguracji aktualnej dźwigara określone są wzorem

$$G_{ii} = g_{ii} + 2\gamma_{ii}.$$

6. STAN NAPIĘCIA DŹWIGARA

Układ sił działających w łącznikach poprzecznych i odcinkach pasów określa stan napięcia dźwigara w konfiguracji początkowej wstępnie sprężonej, a wraz z obciążeniem w konfiguracji aktualnej. Do opisu tego stanu wprowadzono jak w pracy [2] kontrawariantne składowe wzajemnego obiektu napięcia q_a^b , które wyrażają się wzorami

$$q_A^A = -\frac{\dot{T}_A}{\sqrt{g_{AA}}}, \quad q_A^B = \dot{q}_A^B, \quad \dot{q}_A^A = -\frac{\dot{T}_A^*}{\sqrt{G_{AA}}}.$$

\dot{T}_A jest skalarzem określającym siłę w łącznikach poprzecznych i odcinkach pasów dźwigara w konfiguracji początkowej, a \dot{T}_A^* w konfiguracji aktualnej.

Wektory \dot{Q}_A i \dot{Q}_A^* sił działających w tych elementach w konfiguracji początkowej i aktualnej wyrazić można przez składowe w bazie podstawowej konfiguracji początkowej:

$$(6.1) \quad \dot{Q}_A = \dot{q}_A^A e_A, \quad \dot{Q}_A^* = p_A^\alpha e_\alpha,$$

a wektor \dot{Q}^* przez składowe w bazie podstawowej konfiguracji aktualnej:

$$(6.2) \quad \dot{Q}_A^* = \dot{q}_A^* e_A, \quad (\Sigma_A).$$

Pomiędzy składowymi \dot{q}_A^* i p_A^α istnieją następujące zależności

$$(6.3) \quad \begin{aligned} p_A^A &= \dot{q}_A^* (1 + \nabla_A V^A), \\ p_A^B &= \dot{q}_A^* \nabla_A V^B, \\ p_A^3 &= \dot{q}_A^* \nabla_A V^3, \quad (\Sigma_A), \end{aligned}$$

które wynikają z porównania wzorów (6.1) i (6.2). Wzory te zostaną wykorzystane przy wyprowadzaniu równań równowagi dźwigara.

7. ZWIĄZKI FIZYCZNE

Związki pomiędzy składowymi obiektu napięcia a składowymi obiektu odkształcenia, przy skończonych przemieszczeniach węzłów i skończonych

odkształceniach elementów dźwigara, mają postać

$$(7.1) \quad \dot{q}_A^* = [\psi_A (1 + \lambda_A t_A - \sqrt{G_{AA}} - \Delta_A) (\sqrt{g_{AA}})^{-1} - \dot{T}_A] (\sqrt{G_{AA}})^{-1},$$

w której ψ_A oznacza sztywność podłużną elementu dźwigara, λ_A współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej, t_A różnicę temperatur konfiguracji aktualnej i początkowej oraz Δ_A odkształcenie pierwotne łącznika. Dla dostatecznie małych przemieszczeń i odkształceń wzór (7.1) przyjmie postać

$$(7.2) \quad \dot{q}_A^* \approx q_A^* - \gamma_{AA} [q_A^* + \psi (\sqrt{g_{AA}})^{-1}] (g_{AA})^{-1}.$$

Wzór (7.2) może być wykorzystany do wyprowadzenia liniowego układu równań przemieszczeniowych, które pozwolą na opracowanie iteracyjnego algorytmu rozwiązania równań nieliniowych statyki dźwigara lub przybliżoną analizę zagadnienia statyki dźwigarów silnie sprężonych.

8. RÓWNANIA RÓWNOWAGI DŹWIGARA

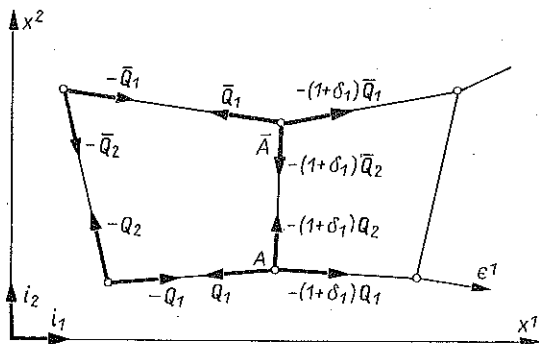
Wektorowe równania równowagi pokazanych na rys. 4 charakterystycznych węzłów A i \bar{A} dźwigara mają następującą postać

$$(8.1) \quad \begin{aligned} -\delta_1 \dot{Q}_1^* - (1 + \delta_1) \dot{Q}_2^* + (1 + \delta_1) \mathbf{P} &= \mathbf{0}, \\ -\delta_1 \dot{Q}_1^* - (1 + \delta_1) \dot{Q}_2^* + (1 + \delta_1) \bar{\mathbf{P}} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ze względu na nieliniowość geometryczną zagadnienia równania powyższe odnoszą się do konfiguracji aktualnej dźwigara.

Skalarne równania równowagi, po przedstawieniu wektorów sił i obciążenia zewnętrznego w bazie podstawowej konfiguracji aktualnej i rozwinięciu przyrostów kowariantnych, przyjmują postać

$$\begin{aligned} \delta_1 \dot{q}_1^* + \dot{\Gamma}_{11}^1 (1 + \delta_1) \dot{q}_1^* \Delta \xi^1 + \dot{\Gamma}_{21}^1 (1 + \delta_1) \dot{q}_2^* \Delta \xi^1 = \\ = (g_1^1 + \dot{\Gamma}_{\gamma 1}^1 \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \dot{P}^\gamma, \end{aligned}$$



Rys. 4

$$\begin{aligned}
 & \bar{I}_{11}^* (1 + \delta_1) \bar{q}_1^* \Delta \xi^1 + (1 + \bar{I}_{21}^* \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \bar{q}_2^* = \\
 & \qquad \qquad \qquad = (g_\gamma^2 + \bar{I}_{\gamma 1}^* \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \bar{P}^\gamma, \\
 & \bar{I}_{11}^3 (1 + \delta_1) \bar{q}_1^* \Delta \xi^1 + \bar{I}_{21}^3 (1 + \delta_1) \bar{q}_2^* \Delta \xi^1 = (g_\gamma^3 + \bar{I}_{\gamma 1}^3 \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \bar{P}^\gamma, \\
 (8.2) \quad & \delta_1 \bar{q}_1^* + \bar{I}_{11}^* (1 + \delta_1) \bar{q}_1^* \Delta \xi^1 + \bar{I}_{21}^* (1 + \delta_1) \bar{q}_2^* \Delta \xi^1 = \\
 & \qquad \qquad \qquad = (g_\gamma^1 + \bar{I}_{\gamma 1}^* \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \bar{P}^\gamma, \\
 & \bar{I}_{11}^2 (1 + \delta_1) \bar{q}_1^* \Delta \xi^1 + (1 + \bar{I}_{21}^* \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \bar{q}_2^* = \\
 & \qquad \qquad \qquad = (g_\gamma^2 + \bar{I}_{\gamma 1}^* \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \bar{P}^\gamma, \\
 & \bar{I}_{11}^3 (1 + \delta_1) \bar{q}_1^* \Delta \xi^1 + \bar{I}_{21}^3 (1 + \delta_1) \bar{q}_2^* \Delta \xi^1 = (g_\gamma^3 + \bar{I}_{\gamma 1}^3 \Delta \xi^1) (1 + \delta_1) \bar{P}^\gamma.
 \end{aligned}$$

Wyrażając wektory sił w elementach i obciążeniu zewnętrznego dźwigara przez składowe w bazie podstawowej konfiguracji początkowej, układ równań (8.2) można przedstawić w następującej postaci skalarnej:

$$\begin{aligned}
 (8.3) \quad & \delta_1 p_1^k + \Gamma_{i1}^k (1 + \delta_1) p_1^i + (g_i^k + \Gamma_{i1}^k) (1 + \delta_1) p_2^i = (g_i^k + \Gamma_{i1}^k) (1 + \delta_1) P^i, \\
 & \delta_1 p_1^3 + b_1 (1 + \delta_1) p_1^3 + (1 + b_1) (1 + \delta_1) p_2^3 = (1 + b_1) (1 + \delta_1) P^3,
 \end{aligned}$$

dla węzłów pasa dolnego przy $\Delta \xi^1 = 1$ oraz dla węzłów pasa górnego

$$\begin{aligned}
 (8.4) \quad & \delta_1 \bar{p}_1^k + \bar{\Gamma}_{i1}^k (1 + \delta_1) \bar{p}_1^i + (g_i^k + \bar{\Gamma}_{i1}^k) (1 + \delta_1) \bar{p}_2^i = (g_i^k + \bar{\Gamma}_{i1}^k) (1 + \delta_1) \bar{P}^i, \\
 & \delta_1 \bar{p}_1^3 + \bar{b}_1 (1 + \delta_1) \bar{p}_1^3 + (1 + \bar{b}_1) (1 + \delta_1) \bar{p}_2^3 = (1 + \bar{b}_1) (1 + \delta_1) \bar{P}^3.
 \end{aligned}$$

Z tego układu, po podstawieniu ze wzorów (6.3) i (7.2) składowych wektorów sił w elementach dźwigara, otrzymać można liniowy układ równań przemieszczeniowych, który będzie wykorzystany do analizy dźwigarów silnie sprzężonych oraz jako układ równań pomocniczych w iteracyjnym procesie rozwiązywania nieliniowego układu (8.3) lub (8.4). Równania (8.4) będą też wykorzystane do analizy numerycznej zagadnienia stateczności płaskiej postaci konfiguracyjnej aktualnej pewnych typów dźwigarów ciągnowych.

9. STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI KONFIGURACJI AKTUALNEJ DŹWIGARA

Dźwigary ciągnowe, w których występują ściskane łączniki pomiędzy pasami, powinny być poddane badaniu stateczności globalnej konfiguracji aktualnej odpowiadającej danemu obciążeniu zewnętrznemu. Dźwigary takie mogą być bowiem w pewnych krytycznych stanach napięcia i obciążenia, którym odpowiada więcej niż jedna postać konfiguracji aktualnej dźwigara.

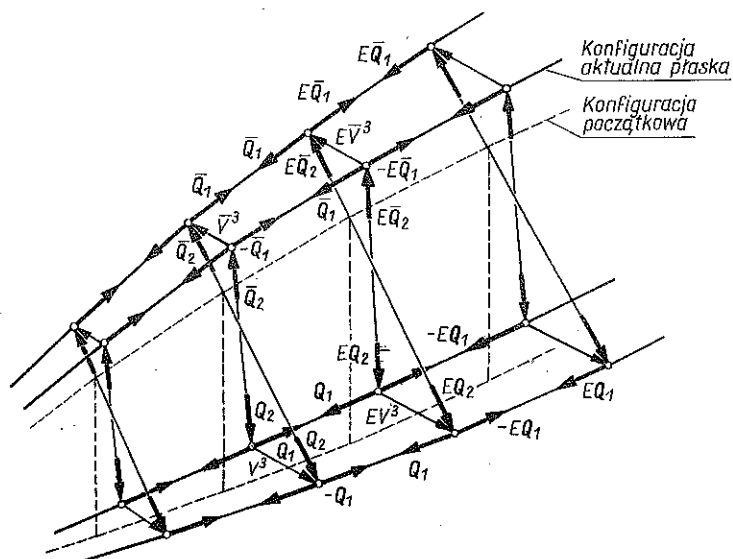
W przypadku dźwigarów płaskich obciążonych płaskim układem sił zewnętrznych, krytycznemu stanowi napiecia i obciążenia odpowiada płaska i przestrzenna postać konfiguracji aktualnej dźwigara.

Do opisu i rozwiązania zagadnienia stateczności dźwigara płaskiego zastosowano metodę przedstawioną w pracy [3]. Metoda ta polega na odpowiednim wymodelowaniu zjawiska wybożenia siatki płaskiej. Modelowanie takie sprowadza równania stateczności siatki do równań równowagi statycznej połączonej z nią konstrukcji poddanej działaniu szczególnych obciążeń, które są liniową funkcją tarczowego stanu napiecia i założonego wychylenia siatki z płaszczyzny.

W rozważanym przypadku, ze względu na nieliniowość geometryczną zagadnienia, omówiony model zjawiska wybożenia musi odpowiadać konfiguracji aktualnej dźwigara. Zmusza to do zastosowania specjalnego sposobu poszukiwania krytycznego obciążenia zewnętrznego i stanu napiecia dźwigara.

Stan równowagi dźwigara płaskiego, obciążonego płaskim układem sił, opisuje układ równań (8.3) lub (8.4). Po rozwiązaniu tego układu otrzymuje się składowe stanu napiecia i stanu przemieszczenia określające aktualną konfigurację płaską dźwigara. Przejście układu do nowej niepłaskiej konfiguracji aktualnej można uzyskać nadając węzłom dźwigara infinitezymalne przemieszczenia V^3 i \bar{V}^3 z płaszczyzny aktualnej konfiguracji płaskiej.

Jak widać na rys. 5, po wychyleniu dźwigara z płaszczyzny zmieniają się tylko kierunki sił w elementach dźwigara. Rzuty na kierunek e_3 sił działających na węzły dźwigara mogą być w równowadze przy obciążeniu krytycznym lub mogą powodować zmianę konfiguracji dźwigara. W drugim przy-



Rys. 5

padku powodują one powrót dźwigara do poprzedniej płaskiej konfiguracji aktualnej lub przejście do nowej, niepłaskiej konfiguracji aktualnej, której odpowiada nowy stan napięcia i przemieszczenia dźwigara.

Badanie stateczności płaskiej postaci konfiguracji aktualnej dźwigara sprwadza się do badania warunku równowagi rzutów na kierunek e_3 sił działających na węzły dźwigara.

Skalarowe równania równowagi tych sił mają postać

$$(9.1) \quad \begin{aligned} \delta_1 p_1^3 + (1 + \delta_1) p_2^3 &= 0, \\ \delta_1 \bar{p}_1^3 + (1 + \delta_1) \bar{p}_2^3 &= 0. \end{aligned}$$

Równania te można przedstawić w postaci następującego układu liniowych równań algebraicznych z niewiadomymi składowymi V^3 i \bar{V}^3 :

$$(9.2) \quad KV = 0.$$

W równaniu tym

$$K = \begin{bmatrix} K_2 & K_3 & & & \\ K_1 & K_2 & K_3 & & \\ & K_1 & K_2 & K_3 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & K_1 & K_2 & K_3 \\ & & & & K_1 & K_2 \end{bmatrix},$$

$$V = [V_2, V_3, V_1, V_2, V_3, \dots, V_1, V_2]^T,$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} q_1^1 & 0 \\ 0 & \bar{q}_1^1 \end{bmatrix}, \quad K_3 = (1 + \delta_1) K_1,$$

$$K_2 = (-1) \begin{bmatrix} q_1^1 + (1 + \delta_1)(q_1^1 + q_2^2), & (1 + \delta_1) q_2^2 \\ (1 + \delta_1) \bar{q}_2^2, & \bar{q}_1^1 + (1 + \delta_1)(\bar{q}_1^1 + \bar{q}_2^2) \end{bmatrix},$$

$$V_1 = \begin{Bmatrix} V^3 \\ \bar{V}^3 \end{Bmatrix}_{(\xi^1)}, \quad V_2 = \begin{Bmatrix} V^3 \\ \bar{V}^3 \end{Bmatrix}_{(\xi^{1+1})}, \quad V_3 = \begin{Bmatrix} V^3 \\ \bar{V}^3 \end{Bmatrix}_{(\xi^{1+2})}.$$

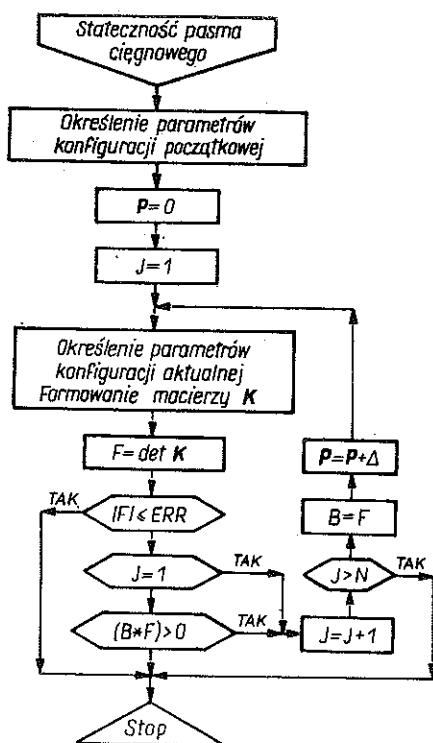
Krytyczną płaską konfigurację aktualną dźwigara, dla której istnieją niezerowe rozwiązania układu jednorodnych równań algebraicznych (9.2) określa następujące równanie:

$$(9.3) \quad \det K = 0.$$

Badanie przebiegu następującej funkcji parametru obciążenia

$$(9.4) \quad F = \det K,$$

pozwała określić krytyczny stan napięcia i obciążenia dźwigara. Złożona postać tej funkcji zmusza do badania numerycznego przez obliczanie wartości



Rys. 6

funkcji dla dyskretnie zmieniającego się argumentu (parametru obciążenia). Stany równowagi dźwigara odpowiadające kolejnym przyrostom obciążenia określone będą metodą iteracyjną.

Algorytm obliczeń przedstawić można w postaci schematu blokowego (rys. 6).

10. DOPUSZCZALNE KSZTAŁTY DYSKRETNÝCH PASM WSTĘPNIE SPRĘŻONYCH

Zajmiemy się teraz określeniem konfiguracji dowolnego dźwigara pasmowego, która pozwala na istnienie stanu wstępnego napięcia układu. Jak wiadomo, mogą tu być wykorzystane znane sposoby określania konfiguracji początkowej wstępnie napiętych siatek ciągnowych np. sposób przedstawiony w pracy [13], gdzie podano też wykaz prac, które zajmowały się między innymi tym problemem. Jednak ze względu na szczególną geometrię pasma ciągnowego wydaje się celowe sformułowanie nowego algorytmu, który pozwalałby określać dopuszczalne konfiguracje dowolnych pasmowych dźwigarów ciągnowych (płaskich i przestrzennych) bez ograniczeń geometrycznych omówionych w cytowanej pracy [13].

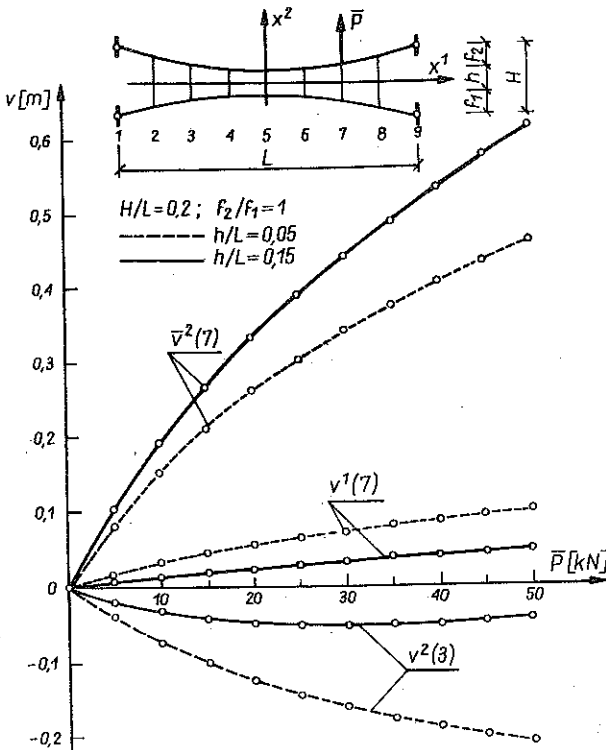
Załóżmy, że stan wstępnego sprężenia dźwigara określony jest przez niezerowe siły wewnętrzne i zerowe obciążenie węzłowe. Przy tych założeniach, z analizy równań równowagi (8.2) wynika, że składowe obciążenia i współczynniki koneksji geometrycznego modelu dźwigara spełniać powinny następujące równania:

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^2 \bar{b}_{21} - \bar{b}_{11} (1 + \bar{\Gamma}_{21}^2) &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 b_{21} - b_{11} (1 + \Gamma_{21}^2) &= 0. \end{aligned}$$

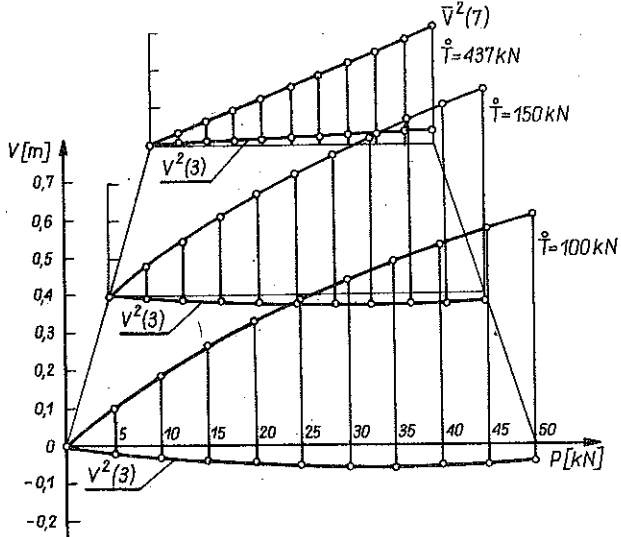
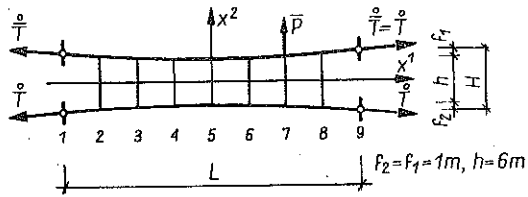
Równania powyższe oraz związki wyprowadzone w p. 3 i 4 pozwalają określać kształty dowolnych płaskich i przestrzennych pasmowych dźwigarów ciągłych o dyskretnym rozkładzie łączników.

11. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

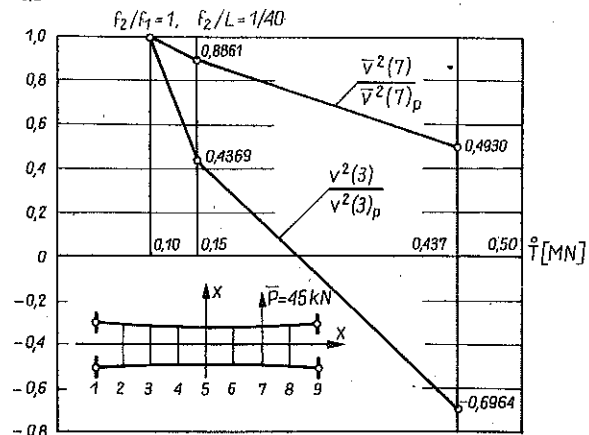
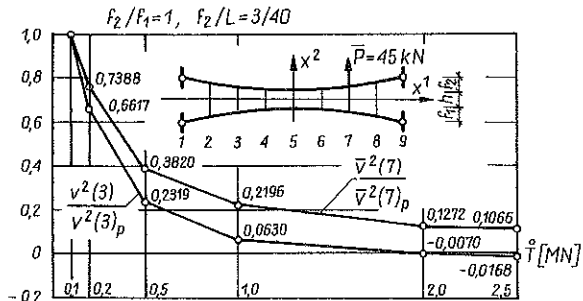
W celu ilustracji przedstawionej teorii oraz w celu uzyskania informacji o jakościowym charakterze pracy dźwigarów, wpływie zmian parametrów geometrycznych i sposobu obciążenia na pracę dźwigara oraz stateczności płaskiej postaci konfiguracji aktualnej rozwiązano szereg przykładów z za-



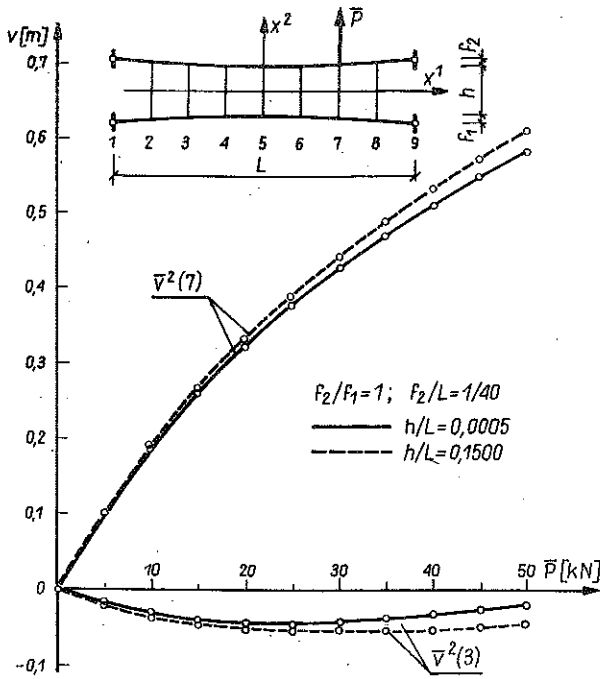
Rys. 7



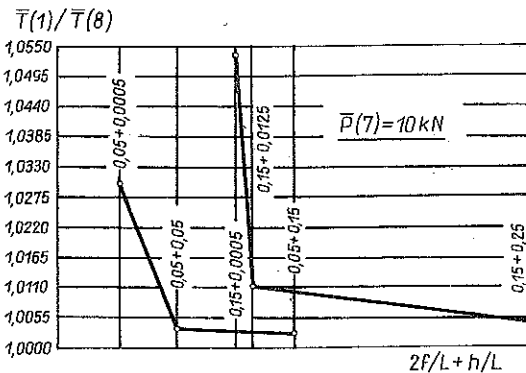
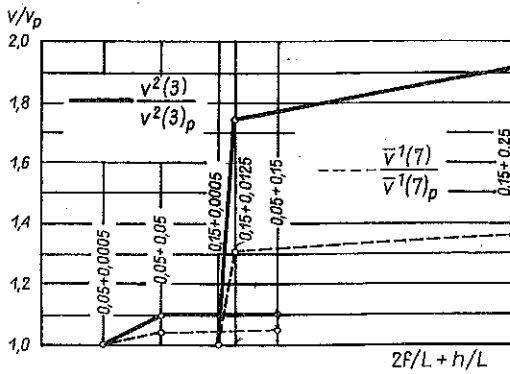
Rys. 8



Rys. 9



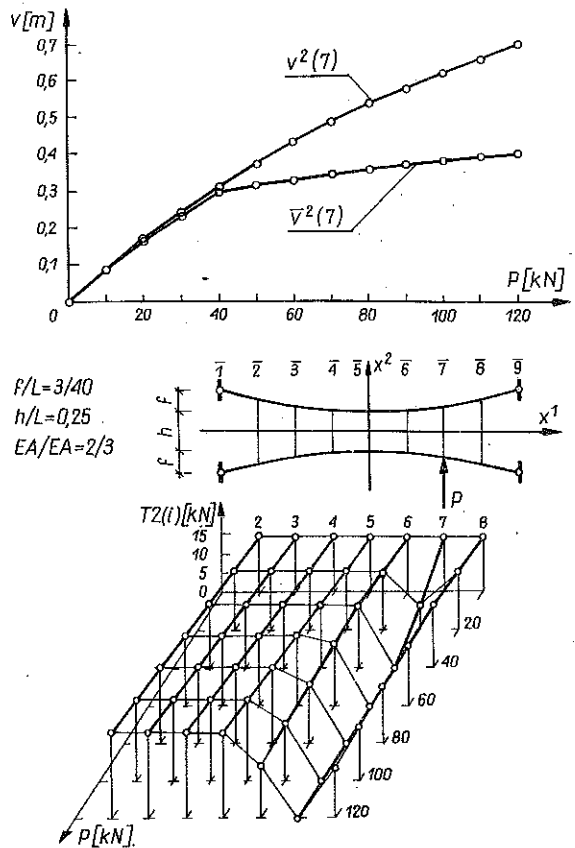
Rys. 10



Rys. 11

kresu statyki i stateczności dźwigarów płaskich obciążonych płaskim układem sił zewnętrznych. Ogólny schemat analizowanych dźwigarów pokazano na rys. 7. W obliczeniach przyjęto liniową zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami oraz $E = 0,2 \cdot 10^6 \text{ MN/m}^2$.

Rozwiązania przykładów uzyskano na komputerze Odra 1325 za pomocą specjalnego programu napisanego w języku Fortran IV. W opracowanym programie wykorzystano wyprowadzone w pracy wzory (7.1) i (7.2) oraz



Rys. 12

nieliniowy układ równań (8.3) który przedstawiono w postaci układu nieliniowych, przemieszczeniowych równań algebraicznych. Równania te rozwiązano przyrostowo-iteracyjną metodą wykorzystując zlinearyzowany za pomocą związku (7.2) układ równań (8.3). Stan napięcia i przemieszczenia dźwigara w procesie rozwiązania określano w nawiązaniu do konfiguracji początkowej. Pozwoliło to zmniejszyć błędy programu i wyeliminowało konieczność obliczania wszystkich parametrów geometrycznych konfiguracji aktualnej dźwigara.

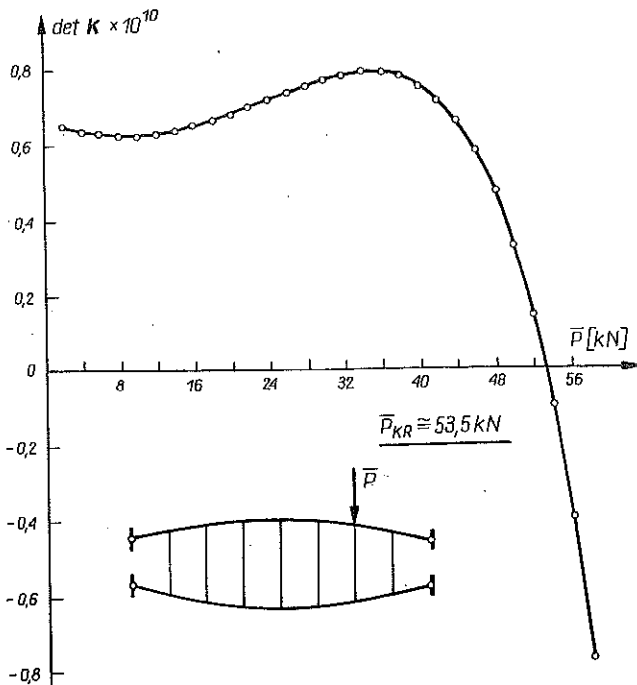
Stan przemieszczenia dźwigara dla pierwszego stopnia obciążenia przyjmowano jako zerowe przybliżenie stanu przemieszczenia dla następnego stopnia obciążenia. Po pierwszych stopniach obciążenia, gdy wstępnie znany jest charakter pracy dźwigara, można bardziej dokładnie określić zerowe przybliżenie stanu przemieszczenia w następnych stopniach obciążenia. Usprawnienie takie pozwoliło na znaczne skrócenie czasu obliczeń.

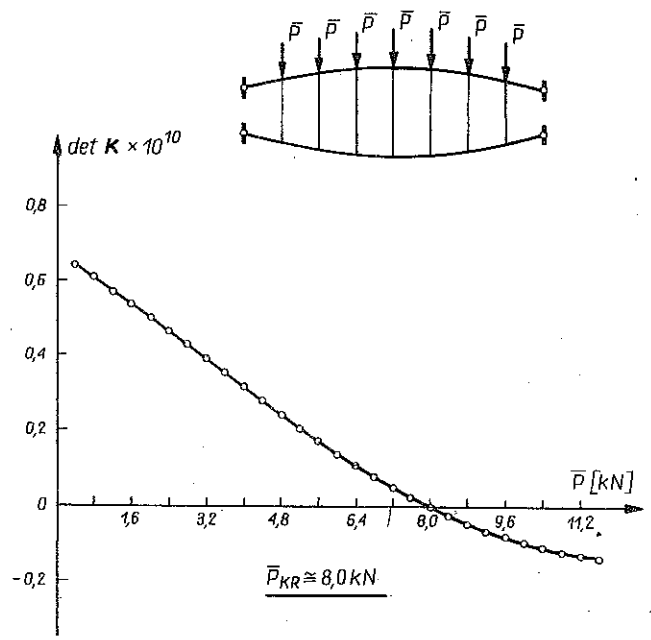
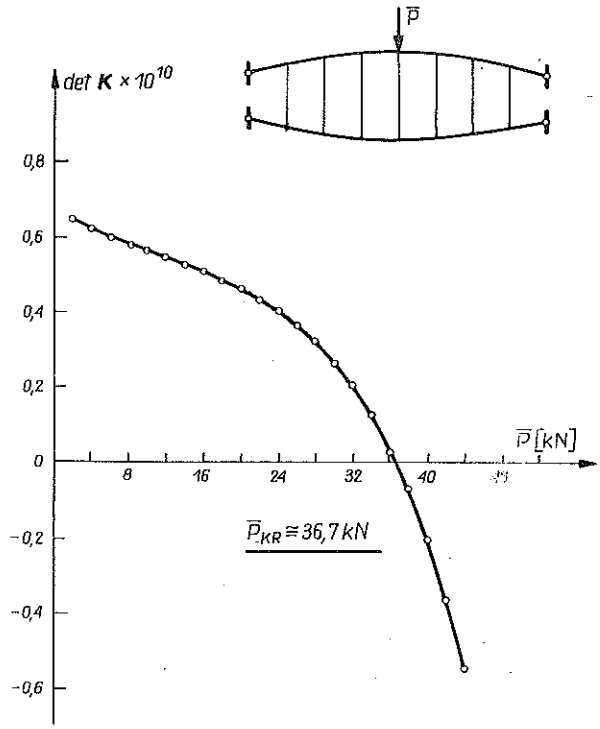
W wyniku analizy numerycznej przykładów stwierdzono, że o jakościowym charakterze pracy dźwigara decyduje głównie stan wstępnego napięcia oraz geometria pasów układu.

Stwierdzono (rys. 8 i 9) jakościową analogię z liniowym układem belkowym dla dźwigara silnie naprężonego w konfiguracji początkowej. Jak pokazano na rys. 10, stan przemieszczenia niesymetrycznie obciążonego dźwigara o długości względnej łączników $h/l = 0,0005$ różni się od stanu przemieszczenia dźwigara o względnej długości łączników $h/l = 0,1500$ i nie zmienionych krzywiznach pasów.

Na rys. 11 przedstawiono schemat przestrzennego dźwigara pasmowego, którego kształt określano przy użyciu proponowanego algorytmu generacji dopuszczalnej konfiguracji początkowej dźwigara pasmowego.

Wygenerowane parametry geometryczne są zgodne z parametrami geometrycznymi przestrzennego dźwigara ciągnowego, który ukształtowano z dźwi-





Rys. 13

gara płaskiego zakładając odpowiednie przemieszczenia węzłów brzegowych [14].

Stan napięcia i przemieszczenia dźwigara ciągnowego, jako układu z jednostronnymi więzami, zależy również od sposobu przyłożenia obciążenia zewnętrznego. W procesie obciążenia mogą wyłączać się z pracy pojedyncze elementy lub ich grupy co, jak pokazano na rys. 12, prowadzi do zmiany schematu dźwigara, jego stanu napięcia i przemieszczenia.

Sformułowane w pracy zagadnienie stateczności płaskiej postaci konfiguracji aktualnej dźwigarów, w których występują ściskane łączniki pomiędzy pasami, rozwiązano dla dźwigarów o schemacie podanym na rys. 13.

W wyniku analizy stwierdzono, że w każdym z rozpatrywanych przypadków obciążenia, podczas utraty stateczności płaskiej postaci dźwigara pracują wszystkie elementy układu.

12. WNIOSKI

Reasumując wyniki uzyskane w niniejszej pracy, nasuwają się następujące wnioski:

1. Formalizm mechaniki ośrodków siatkowych, przyjęty w niniejszej pracy do opisu zagadnień statyki dźwigarów ciągnowych, upraszcza i porządkuje analizę szeregu zagadnień związanych z geometryczną jak i statyczną stroną rozważań.

Wyprowadzone zależności geometryczne pozwalają obliczyć współczynniki koneksji zbioru pasmowego i określić dowolną konfigurację dźwigara, w tym konfigurację początkową. Nie wprowadza się przy tym wiele ograniczeń, na których oparte są znane metody generacji konfiguracji początkowej wstępnie napiętych siatek ciągnowych [13]. Zakres zastosowania tych związków może być znacznie szerszy niż zakres zagadnień rozpatrywanych w niniejszej pracy. Jednym z przykładów zastosowania proponowanego opisu jest algorytm automatycznej generacji siatki węzłów MES podany w pracy [15].

Wyprowadzone równania równowagi mogą być bezpośrednio zastosowane do budowy algorytmu analizy numerycznej dźwigarów.

2. Zaproponowana metoda analizy statycznej dźwigarów ciągnowych jest, zdaniem autorów, metodą, która pozwala na łączną analizę zagadnień statyki i geometrii dyskretnego pasma. Możliwość prowadzenia kompleksowej analizy jest szczególnie cenna w przypadku dźwigarów przestrzennych.

3. Opracowane i przedstawione w pracy metody analizy pozwalają na optymalizację dźwigarów ciągnowych, rozszerzoną na zagadnienie kształtowania struktury wewnętrznej pasma ciągnowego (wzajemny układ łączników pomiędzy pasami).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. FERIEŃCİK, *O historii przekryć wiszących*, V Konferencja Naukowo Techniczna „Konstrukcje Metalowe”, Warszawa 1974.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech., **23**, 4, 495—515, 1971.
4. J. HAJDUK, S. JENDO, Z. KĄCZKOWSKI, *Podstawy teoretyczne statyki ustrojów ciągnowych*, Arch. Inż. Łąd., **19**, 4, 597—621, 1973.
5. J. HAJDUK, J. OSIECKI, *Ustroje ciągnowe, teoria i obliczenia*, WNT, Warszawa 1970.
6. S. JENDO, A. STACHOWICZ, *Przekrycia wiszące, obliczenia statyczne i kształtowanie*, Arkady, Warszawa 1974.
7. F. OTTO, *Tensile structures*. MIT Press. London 1969.
8. И. М. РАБИНОВИЧ, *Мгновенно-жесткие системы, их свойства и основы расчета*, Висячие покрытия, Госстройиздат, Москва 1962.
9. A. MARLEWSKI, J. PULIKOWSKI, J. RAKOWSKI, R. ŚWITKA, *Program obliczeń statycznych konstrukcji ciągnowych — STAC*, II Konferencja Naukowa, Konstrukcje Ciężnowe i Wiotkie Powłoki, Rydzyna 1983.
10. C. BRANICKI, W. SMOLEŃSKI, *Program analizy statycznej geometrycznie nieliniowych dużych układów prętowo-ciągnowych*, II Konferencja Naukowa, Konstrukcje Ciężnowe i Wiotkie Powłoki, Rydzyna 1983.
11. S. PALKOWSKI, *Obliczanie siatek ciągnowych metodą elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., **10**, 2, 1979.
12. S. PALKOWSKI, *Numeryczna analiza ustrojów ciągnowych*, Monografia WSI, Koszalin 1980.
13. J. PULIKOWSKI, M. RATAJCZAK, R. SYGULSKI, *Określanie konfiguracji początkowej wstępnie napiętych siatek ciągnowych*, II Konferencja Naukowa, Konstrukcje Ciężnowe i Wiotkie Powłoki, Rydzyna 1983.
14. R. TARGOWSKI, *Własności statyczne siatkowych dźwigarów ciągnowych*, Praca Doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1980.
15. R. TARGOWSKI, *A generalized automatic mesh generation with triangular and tetrahedron elements*, International Conference on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations (ARFEC), Lisbon 1984.

РЕЗЮМЕ

СТАТИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ВАНТОВЫХ ФЕРМ

Используется система простых конечных элементов, сформулированная на основе теории сеточных сред и неклассической дифференциальной геометрии; в работе проведен нелинейный статический анализ вантовых ферм. Предложенный в работе метод, использованный для ферм с топологическо-регулярной структурой, может быть распространен на фермы с произвольной структурой и внешней нагрузкой. Учитывая произвольную геометрию начальной конфигурации вантовой фермы, а также нелинейность деформаций, в работе был использован метод Ньютона-Рафсона. Статический анализ (как аналитический, так и численный) охватил плоские и пространственные двухтросовые фермы. Однако анализ устойчивости ограничен к плоским двухтросовым фермам и плоской ферме потери устойчивости. Метод, представленный в работе может быть однако обобщен как на фермы другого типа, так и на более общие формы потери устойчивости.

SUMMARY

STATICS AND STABILITY OF LATTICE CABLE GIRDERS

Utilizing a simple finite element system derived from new formulation of the theory of discrete lattice structures and nonstandard differential geometry, a finite element formulation is applied to analyse the nonlinear behaviour of cable truss structural forms. This formulation, though restricted to topologically regular trusses, is valid for any arbitrary geometry and configuration of cable truss with or without load action. Due to the arbitrary geometry and generation of initial geometry for cable truss forms, and also due to the nonlinear nature of the problem a Newton-Raphson procedure is used in this analysis. This paper discusses the analysis of a plane and spatial prestressed systems comprising two cables connected together by hangers or spacers and presents the results of the theoretical and numerical study of such systems. A general formulation has been derived for the lateral instability of the plane truss forms. The formulation presented here is very general and can be applied to determine not only initial geometry for arbitrary prestressed two cables truss forms but also to determine the instability of the spatial truss forms.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 maja 1985 r.
