

DYNAMICZNA STABILNOŚĆ KONSTRUKCJI MOSTOWYCH PODDANYCH DZIAŁANIU INERCYJNYCH OBCIĄŻEŃ RUCHOMYCH(*)

MARIAN K L A S Z T O R N Y (WROCLAW)

W pracy sformułowano podstawy teorii dynamicznej stabilności swobodnych drgań tłumionych układów dyskretnych z efemerycznym podzbiorem współrzędnych uogólnionych, jako modeli konstrukcji mostowych poddanych działaniu ciągu pojazdów poruszających się w układzie cyklicznym. Do rozwiązania problemu stabilności zastosowano zmodyfikowaną metodę macierzy monodromii we współczesnym ujęciu macierzowym. Szczegółowo przeanalizowano dynamiczną stabilność klasycznej belki mostowej, poddanej działaniu jednorodnego strumienia mas ruchomych o różnym stopniu uresorowania.

1. STUDIA LITERATUROWE

Problem dynamicznej stabilności swobodnych drgań tłumionych konstrukcji geometrycznie ograniczonych przy wzbudzeniu parametrycznym od przeszło stu lat jest przedmiotem badań naukowych. Obszerną bibliografię problemu do 1977 roku opracowali IBRAHIM i BARR [1]. W ostatnim trzydziestolecu równoległe z przybliżonymi analitycznymi lub półanalitycznymi metodami rozwiązania problemu, opisanymi m.in. w pracach [1, 2 i 3], rozwijane są metody numeryczne. Na szczególną uwagę zasługuje tu metoda, którą można nazwać metodą macierzy monodromii, stosowana w różnych wariantach m.in. w pracach [4—7]. Metoda ta umożliwiła uzyskanie efektywnych i dokładnych rozwiązań dla dowolnych układów dyskretnych ze wzbudzeniem parametrycznym.

W literaturze polskiej brak jest opisu tej metody we współczesnym ujęciu macierzowym, w literaturze zagranicznej natomiast opisy te są niepełne i różniące się między sobą, por. np. [1, 4 i 5]. Znaczna różnorodność definicji stabilności (por. [8]) implikuje dużą liczbę metod analizy stabilności i ich wariantów. Biorąc pod uwagę wyżej wymienione okoliczności, w drugim punkcie pracy przedstawimy w syntetycznej formie podstawy teorii dynamicznej stabilności swobodnych drgań tłumionych układów dyskretnych wzbudza-

(*) Praca wykonana w ramach Problemu Węzłowego PW. 05. 12—14.3.

nych parametrycznie z trwałym zbiorem współrzędnych uogólnionych. W sformułowaniu problemu konsekwentnie wykorzystamy rozkład strukturalny macierzy monodromii, co ułatwia przeprowadzenie interpretacji geometrycznych. Zbędna jest wówczas wykładnicza zespolona formuła Floqueta dla macierzy monodromii, będąca podstawą rozważań w wielu pracach, m.in. w [3]. Ze względu na charakter i przejrzystość pracy zamieścimy zestawienie znanych przypadków stabilności lub niestabilności układu oraz zacytujemy z literatury niektóre wyniki z teorii równań różniczkowych i z algebry macierzy.

Jednym z klasycznych układów dyskretnych z trwałym zbiorem współrzędnych uogólnionych i wzbudzeniem parametrycznym jest belka mostowa (swobodnie podparta belka Eulera) przenosząca jednorodny strumień nieresorowanych skupionych mas ruchomych. Problem ten był rozpatrywany przez NELSONA i CONOVERA w pracy [5], w której analityczne równania ruchu autorzy sformułowali metodą Galerkiną. BENEDETTI [9] ponownie rozważył problem postawiony w [5], podając oszacowanie obszarów stabilności przy pominięciu sprzężenia równań ruchu. W praktycznych przypadkach mamy do czynienia ze strumieniami pojazdów samochodowych lub kolejowych, których masa jest w znacznym stopniu uresorowana. W opisie zadania pojawiają się wówczas dodatkowe stopnie swobody, którym są przyporządkowane współrzędne uogólnione o charakterze efemerycznym względem konstrukcji mostowej. W trzecim punkcie pracy sformułowano problem dynamicznej stabilności swobodnych drgań tłumionych układów dyskretnych z efemerycznym podzbiorem współrzędnych uogólnionych, jako modeli konstrukcji mostowych poddanych działaniu inercyjnych resorowanych obciążeń ruchomych o rozkładzie cyklicznym. Metodę rozwiązania problemu nazwano zmodyfikowaną metodą macierzy monodromii.

W czwartym punkcie pracy przeanalizowano szczegółowo stabilność dynamiczną klasycznej belki mostowej, poddanej działaniu jednorodnego nieograniczonego strumienia mas ruchomych o różnym stopniu uresorowania. Jest to przykład efektywnego zastosowania zmodyfikowanej metody macierzy monodromii do analizy stabilności prostego modelu mostu kolejowego.

2. TEORIA DYNAMICZNEJ STABILNOŚCI UKŁADÓW DYSKRETNÝCH Z TRWAŁYM ZBIOREM WSPÓLRZĘDNYCH UOGÓLNIANYCH [1, 3, 4, 5, 7 i 10]

Często liniowa teoria drgań jest wystarczająca do jakościowej analizy dynamicznej stabilności swobodnych drgań tłumionych układów dyskretnych. W obszarach niestabilnych rozwiązanie uogólnione narasta eksponencjalnie w ramach teorii liniowej. Przy dostatecznie dużym wzroście przemieszczeń układ staje się geometrycznie nieliniowy i przemieszczenia mogą zostać ograniczone w ramach tzw. cykli granicznych. Wymieniony problem nieliniowy nie jest rozpatrywany w niniejszej pracy.

Do wyznaczania obszarów dynamicznej stabilności lub niestabilności oraz określenia typu rezonansu w obszarach niestabilnych wystarczy przyjąć następujące założenia ogólne dotyczące analizowanych układów: 1) układ jest geometrycznie niezmienny i geometrycznie ograniczony; 2) układ jest liniowo sprężysty z tłumieniem wiskotycznym; 3) układowi jest przyporządkowana skończona liczba dynamicznych stopni swobody, którym odpowiadają trwałe współrzędne uogólnione; 4) układ wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi statycznej; 5) drgania układu mogą być wzbudzone parametrycznie przez nieinercyjne obciążenie okresowo zmienne oraz 6) drgania układu mogą być wzbudzone parametrycznie przez ruchome nieresorowane pole masowe o rozkładzie cyklicznym. Współrzędne uogólnione są trwałe, jeśli ich zbiór nie ulega zmianie w czasie.

Ogólna struktura macierzowego równania ruchu układów spełniających te założenia ma postać

$$(2.1) \quad (B + \tilde{B}) \ddot{\bar{q}}_u + (C + \tilde{C}) \dot{\bar{q}}_u + (K + \tilde{K}) \bar{q}_u = \bar{F}, \quad (\dot{}) = \frac{d}{dt},$$

przy czym B, C, K są macierzami stałymi, $\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{K}, \bar{F}$ są macierzami okresowo zmiennymi w czasie z okresem T . Mamy zatem $\tilde{B}(t+kT) = \tilde{B}(t)$, $k = 1, 2, \dots$ itd. Wektor $\bar{q}_u(t)$ jest wektorem trwałych współrzędnych uogólnionych Lagrange'a. W przypadku konstrukcji poddanych działaniu nieresorowanego inercyjnego obciążenia cyklicznego wszystkie współczynniki $\tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{K}, \bar{F}$ są różne od zera. W zagadnieniu stateczności dynamicznej mamy $\tilde{B} \equiv 0, \tilde{C} \equiv 0, \tilde{K}(t) \neq 0, \bar{F} \equiv \bar{0}$.

Przy założeniu spełnienia warunków istnienia i jednoznaczności rozwiązań, dokonujemy zmiany zmiennych w równaniu (2.1) przez podstawienie

$$(2.2) \quad \bar{q}_u = \bar{q} + \bar{q}_f, \quad \dim \bar{q} = n_u,$$

gdzie $\bar{q}_f(t)$ jest pewną (ograniczoną) całką szczególną równania niejednorodnego (2.1). W wyniku otrzymujemy równanie ruchu, będące macierzowym równaniem tłumionych drgań swobodnych układu z następującym wzbudzeniem parametrycznym:

$$(2.3) \quad (B + \tilde{B}) \ddot{\bar{q}} + (C + \tilde{C}) \dot{\bar{q}} + (K + \tilde{K}) \bar{q} = \bar{0}.$$

Analizujemy stabilność drgań swobodnych, którym odpowiadają małe, a przy tym dowolne warunki początkowe $\bar{r}(0) = \bar{\varepsilon}$, zwane zaburzeniowymi warunkami początkowymi, przy czym $\bar{r}(t) = \text{col}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t))$ jest wektorem stanu. Wprowadźmy promień trajektorii ruchu w przestrzeni fazowej $r(t) = \|\bar{r}(t)\|$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową. Rozwiązanie $\bar{r}(t)$ równania (2.3), opisujące swobodne drgania tłumione, jest (por. definicje stabilności Lapunowa):

a) asymptotycznie stabilne (globalnie), jeśli $r(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow \infty$,

b) stabilne (na granicy obszarów stabilności), jeśli

$$(2.4) \quad \forall_{\delta > 0} \exists_{\epsilon > 0} r(0) < \delta \Rightarrow \forall_{t > 0} r(t) < \delta,$$

c) niestabilne, jeśli granica górna $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$.

Układ n_u równań różniczkowych (2.3) o okresowo zmiennych współczynnikach z okresem T można sprowadzić do układu $2n_u$ równań pierwszego rzędu, zapisanych macierzowo w postaci ogólnej:

$$(2.5) \quad \dot{\bar{r}}(t) = X(t) \bar{r}(0), \quad X(t+kT) = X(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Można wykazać, że rozwiązanie ogólne równania (2.5) ma postać

$$(2.6) \quad \bar{r}(t) = A(t) \bar{r}(0),$$

gdzie $A(t)$ jest maczyntem równania (2.5). Maczynt jest utworzony przez zbiór $2n_u$ liniowo niezależnych rozwiązań równania (2.5), którym odpowiadają warunki początkowe w postaci bazy wersorowej w $2n_u$ — wymiarowej przestrzeni fazowej:

$$(2.7) \quad \bar{r}_{(i)}(0) = \bar{e}_i = \text{col}(0, 0, \dots, \underset{(i)}{1}, 0, 0, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, 2n_u.$$

Istotnie, w globalnym zapisie macierzowym otrzymamy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} R(t) &= [\bar{r}_{(1)}(t), \bar{r}_{(2)}(t), \dots, \bar{r}_{(2n_u)}(t)], \\ R(0) &= [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{2n_u}] = I = \text{diag}(1, 1, \dots), \\ R(t) &= A(t) \cdot R(0) = A(t). \end{aligned}$$

Macierz $D = R(T) = A(T)$ nazywamy macierzą monodromii. Macierz D jest z definicji unormowaną macierzą fundamentalną rozwiązań w chwili $t = T$.

Ze wzorów (2.5) i (2.6) wynika, że

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \bar{r}(T) &= D\bar{r}(0), \\ \bar{r}(2T) &= D\bar{r}(T) = D^2\bar{r}(0), \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{r}(NT) &= D^N\bar{r}(0), \\ rt = \bar{r}(\tilde{t} + NT) &= A(\tilde{t})\bar{r}(NT) = A(\tilde{t})D^N\bar{r}(0), \\ \tilde{t} &\in (0, T), \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ze wzoru (2.9)₄ wynika, że o stabilności rozwiązania decyduje macierz monodromii D , podnoszona do potęgi w kolejnych cyklach wzbudzenia parametrycznego. Macierz D jest ogólnie niesymetryczną rzeczywistą macierzą kwadratową, której jest przyporządkowany rozkład strukturalny o postaci ogólnej

$$(2.10) \quad D = W\Lambda W^{-1},$$

gdzie W jest zespoloną macierzą przekształcenia przez podobieństwo, A jest zespoloną macierzą Jordana w ogólnym przypadku o postaci quasi-diagonalnej $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_l)$, $l \leq 2n_u$. Klatce Jordana A_i o rozmiarze $s_i \geq 1$ jest przyporządkowana k -krotna wartość własna macierzy D , przy czym $1 \leq k \leq 2n_u$, $s_i \leq k$. Macierz Jordana można napisać w ogólnej postaci:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} A &= \{\lambda\} + J, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_l), \\ A^N &= \{\lambda^N\} + L(N, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{N-1}), \end{aligned}$$

gdzie J_i jest trójkątną macierzą zero-jedynkową, zwaną pierwszym skośnym szeregiem jedynkowym, L jest macierzą górnotrójkątną z elementami zerowymi na głównej przekątnej („człon wiekowy”), $\{\lambda\} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n_u})$ jest ogólnie zespolonym widmem własnym macierzy monodromii D . W przypadku $s_i = 1$ mamy $J_i = 0$. Macierz L jest niezerowa tylko wówczas, jeśli występują wielokrotne wartości własne, którym odpowiadają nieliniowe dzielniki elementarne macierzy monodromii. Widmu $\{\lambda\}$ odpowiada promień spektralny $\lambda_s = \max_i |\lambda_i| > 0$.

Całka ogólna równań (2.3) i (2.5) w N -tym okresie wymuszenia, określona wzorem (2.9)₄, po uwzględnieniu (2.10), (2.11)₂ wynosi

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \bar{r}(\bar{t} + NT) &= A(\bar{t}) \cdot W A^N W^{-1} \cdot \bar{r}(0) = \\ &= A(\bar{t}) \cdot W [\{\lambda^N\} + L(N, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{N-1})] W^{-1} \bar{e}, \quad \bar{t} \in (0, T). \end{aligned}$$

Z analizy wzoru (2.12) wynika, że są możliwe następujące przypadki stabilności lub niestabilności układu (por. [3]):

a. Układ jest stabilny asymptotycznie, jeśli $\lambda_s < 1$. Wówczas $\|\{\lambda^N\}\| \rightarrow 0$, $\|L\| \rightarrow 0$ dla $N \rightarrow \infty$, a więc $r(t) \rightarrow 0$ dla $t \rightarrow \infty$.

b. Układ jest stabilny, jeśli $\lambda_s = 1$, przy czym każdej wielokrotnej wartości własnej o module $|\lambda| = 1$ odpowiadają liniowe dzielniki elementarne macierzy D . Wówczas $\|\{\lambda^N\}\| \leq \sqrt{2n_u}$, $\|L\| \rightarrow 0$ dla $N \rightarrow \infty$, a więc warunek (2.4) jest spełniony.

c1. Układ niestabilny, jeśli $\lambda_s = 1$, przy czym co najmniej jednej wielokrotnej wartości własnej o module $|\lambda| = 1$ odpowiadają nieliniowe dzielniki elementarne macierzy D . Wówczas $\|\{\lambda^N\}\| \leq \sqrt{2n_u}$, $\|L\| \rightarrow \infty$ dla $N \rightarrow \infty$, a więc $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$.

c2. Układ jest niestabilny, jeśli $\lambda_s > 1$. Wówczas $\|\{\lambda^N\}\| \rightarrow \infty$ dla $N \rightarrow \infty$, a więc $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$. Norma $\|L\|$ dla $N \rightarrow \infty$ zależy w tym przypadku od struktury macierzy L i może być zbieżna do 0 lub rozbieżna.

W przypadku c1 rozbieżność promienia trajektorii ruchu $r(t)$ ma charakter liniowy lub paraboliczny, natomiast w przypadku c2 rozbieżność ta ma charakter wykładniczy.

Typ rezonansu w obszarach niestabilnych może być określony na podstawie struktury wartości własnej λ_j , dla której $|\lambda_j| > 1$. Można wykazać, że jeśli λ_j jest liczbą rzeczywistą, to w układzie występuje rezonans para-

metryczny prosty, zwany krótko rezonansem periodycznym. W przypadku, gdy λ_j jest liczbą zespoloną (dokładniej w widmie $\{\lambda\}$ występuje para sprzężonych pierwiastków zespolonych modularnie > 1), to w układzie występuje rezonans parametryczny kombinowany, zwany krótko rezonansem kombinowanym [10].

Przy budowaniu algorytmu analizy stabilności dynamicznej na komputerze najpierw wyznaczamy numerycznie macierz monodromii D . Wskazane jest zastosowanie bezwarunkowo mocno stabilnej metody całkowania równań ruchu. Obliczenia mogą być wykonane globalnie dla równania macierzowego

$$(2.13) \quad (B + \tilde{B}) \ddot{Q} + (C + \tilde{C}) \dot{Q} + (K + \tilde{K}) Q = O,$$

z warunkami początkowymi

$$(2.14) \quad Q(0) = [I, O], \quad \dot{Q}(0) = [O, I], \quad I = \text{diag}(1, 1, \dots), \\ \dim Q = \dim \dot{Q} = n_u \times 2n_u.$$

Łatwo zauważyć, że $D = \text{col}[Q(T), \dot{Q}(T)]$. Następnie wyznaczamy widmo własne $\{\lambda\}$ macierzy monodromii, korzystając ze standardowych procedur bibliotecznych. Analizę stabilności przeprowadzamy na podstawie struktury widma $\{\lambda\}$ zgodnie z wcześniej podanymi uwagami.

3. TEORIA DYNAMICZNEJ STABILNOŚCI UKŁADÓW DYSKRETYCH Z EFEMERYCZNYM PODZBIOREM WSPÓLRZĘDNYCH UOGÓLNIONYCH

Przyjmujemy następujące założenia ogólne dotyczące analizowanych układów: 1) układ jest o zmiennej w czasie konfiguracji; zmienność jest cykliczna i związana ze strumieniem resorowanych pojazdów ruchomych; 2) w układzie można wyróżnić geometrycznie niezmienną i geometrycznie ograniczoną konstrukcję (mostową); 3) układ jest liniowo sprężysty z tłumieniem wiskotycznym, 4) układowi jest przyporządkowana skończona liczba dynamicznych stopni swobody, którym odpowiadają dwa podzbiory współrzędnych uogólnionych: trwałe i efemeryczne; 5) układ wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi statycznej oraz 6) drgania układu mogą być dodatkowo wzbudzone parametrycznie przez ruchome nieresorowane pole masowe o rozkładzie cyklicznym.

Współrzędne są efemeryczne, jeśli ich zbiór ulega zmianie w czasie. Dana współrzędna efemeryczna występuje w tym zbiorze w ograniczonym czasie.

Ogólna struktura macierzowego równania ruchu układów spełniających te założenia jest również określona wzorem (2.1), przy czym $\bar{q}_u = \text{col}(\bar{q}_b, \bar{q}_0)$, gdzie $\bar{q}_b(t)$ jest wektorem trwałych współrzędnych uogólnionych przyporządkowanych konstrukcji mostowej, natomiast

$$(3.1) \quad \bar{q}_0(t) = \text{col}(\bar{q}_{0,r}, \bar{q}_{0,r+1}, \dots, \bar{q}_{0,n+r-1}), \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

jest wektorem efemerycznych współrzędnych uogólnionych przyporządkowanych pojazdom resorowanym, należącym do cykli obciążenia mających kontakt z konstrukcją mostową w r -tym cyklu wymuszenia. Symbolem n oznaczono liczbę cykli obciążenia mających kontakt z konstrukcją w chwili t . Wektor $\bar{q}_{0,i}$ odpowiada i -temu cyklowi obciążenia. Rozmiary wektorów współrzędnych oznaczymy $\dim \bar{q}_b = n_b$, $\dim q_0 = n_0$.

W niniejszej pracy podamy strukturę macierzowych współczynników B , C , K , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{K} , \tilde{F} dla podstawowej klasy modeli mostów i pojazdów ruchomych, co nie zmniejsza ogólności rozważań w zakresie dynamicznej stabilności drgań. Założymy, że 1) obciążenie ruchome jest strumieniem dwumasowych sprężysto-lepkich oscylatorów, poruszających się ze stałą prędkością w układzie cyklicznym; 2) modele konstrukcji mostowych są płaskie; 3) tor ruchu oscylatorów jest prostoliniowy w stanie nieobciążonym, ciągły i izolowany od dojazdów; 4) więzy pomiędzy oscylatorami i torem ruchu są dwustronne oraz 5) stany przemieszczenia toru ruchu i konstrukcji mostowej pokrywają się i mogą być aproksymowane globalnie szeregiem sinusowym.

Ostatnie założenie jest równoznaczne z założeniem swobodnego podparcia konstrukcji mostowej na przyczółkach. Ugięcie toru ruchu i konstrukcji określają wzory:

$$(3.2) \quad w(x, t) = \bar{q}_b^T(t) \bar{s}(x),$$

$$\bar{s}(x) = \text{col}[\sin(\pi x/l), \sin(2\pi x/l), \dots, \sin(n_b \pi x/l)].$$

Przy założeniach podanych wyżej macierzowe współczynniki równania (2.1) mają postać (por. [11 i 12])

$$(3.3) \quad \begin{aligned} B &= \text{bdiag}(B_b, \{M_0\}), & C &= \text{bdiag}(C_b, \{c\}), \\ K &= \text{bdiag}(K_b, \{k\}), \\ \tilde{B} &= \text{col}(\tilde{B}_g, 0), & \tilde{B}_g &= [S \{M\} S^T, S \{M_0\}], \\ \tilde{C} &= [\tilde{C}_1, 0], & \tilde{C}_1 &= \text{col}(2S \{M\} \dot{S}^T, -\{c\} S^T), \\ \tilde{K} &= [\tilde{K}_1, 0], & \tilde{K}_1 &= \text{col}(S \{M\} \dot{S}^T, -\{k\} S^T - \{c\} \dot{S}^T), \\ \tilde{F} &= \text{col}[S(\bar{G} + \bar{G}_0), \bar{G}_0], \end{aligned}$$

przy czym

$$S(t) = [\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_{n_0}], \quad \bar{S}_j(t) = \bar{s}[x_J(t)] \quad \text{dla} \quad x_J \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$J = (r-1)n + j, \quad j = 1, 2, \dots, n_0,$$

$$x_J(t) = vt - a_J,$$

$$\dot{S} = (v/l) \{d\} C, \quad \ddot{S} = -(v/l)^2 \{d^2\} S,$$

$$\{d\} = \text{diag} (\pi, 2\pi, \dots, n_b \pi),$$

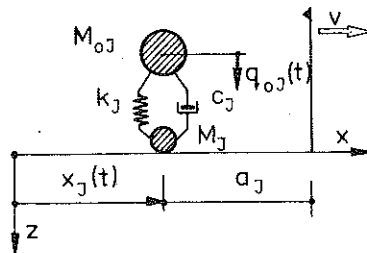
$$(3.4) \quad C(t) = [\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_{n_0}], \quad \bar{C}_j(t) = \bar{c} [x_j(t)] \quad \text{dla} \quad x_j \in \langle 0, l \rangle,$$

$$\bar{c}(x) = \text{col} [\cos(\pi x/l), \cos(2\pi x/l), \dots, \cos(n_b \pi x/l)]^T,$$

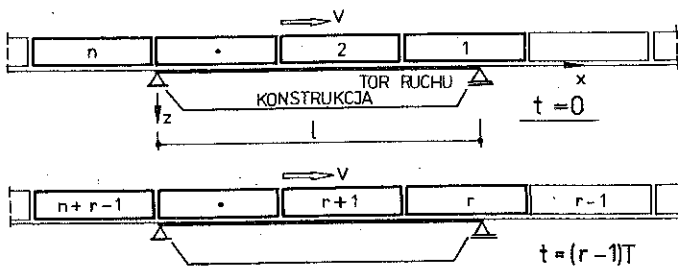
$$(r-1)T \leq t < rT, \quad T = a/v, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

We wzorach (3.3) i (3.4) wprowadzono następujące oznaczenia: B_b , C_b , K_b oznacza macierz bezwładności, tłumienia i sztywności konstrukcji mostowej w bazie \bar{q}_b ; $\{M_0\}$, $\{M\}$, $\{k\}$, $\{c\}$ — diagonalne macierze specyfikacji parametrów oscylatorów należących do cykli obciążenia o numerach r , $(r+1)$, ..., $(n+r-1)$; \bar{G}_0 , \bar{G} — wektory ciężarów mas resorowanych i nieresorowanych należących do wymienionych cykli obciążenia, $J = 1, 2, 3, \dots$ — globalna numeracja oscylatorów w kolejnych cyklach obciążenia, a_J — odległość J -tego oscylatora od umownego czoła obciążenia, jak na rys. 1, $S(t)$, $C(t)$ — macierze śledzące, n — liczba oscylatorów w jednym cyklu obciążenia, $x_J(t)$ — prawo ruchu J -tego oscylatora odpowiadające przyjęciu położenia czoła obciążenia w umownej chwili początkowej w punkcie $x = 0$, a — długość cyklu obciążenia, l — długość toru ruchu w obrębie konstrukcji mostowej oraz v — prędkość ruchu obciążenia.

Ogólne układy cykli obciążenia na początku pierwszego i r -tego cyklu wymuszenia przedstawiono na rys. 2. Grubą linią oznaczono cykle obciążenia mające wpływ na równania równowagi dynamicznej w wymienionych cyklach



Rys. 1. Oscylator dwumasowy — element obciążenia ruchomego o rozkładzie cyklicznym



Rys. 2. Ogólne układy cykli obciążenia na początku 1-szego i r -tego cyklu wymuszenia

wymuszenia. Chwile włączeń i wyłączeń kolejnych cykli są więc tak zdefiniowane, że wymiar n_0 wektora \bar{q}_0 jest stały, macierzowe współczynniki równania (2.1) są o stałym rozmiarze i okresowo zmienne. Struktura cyklu obciążenia jest dowolna w zakresie parametrów oscylatorów, liczby oscylatorów i ich wzajemnych rozstawów.

Sformułowanie równania drgań swobodnych (2.3) nie ulega zmianie z tym zastrzeżeniem, że obecnie wektor \bar{q} zawiera efemeryczny podzbiór współrzędnych $\bar{q}_0: \bar{q} = \text{col}(\bar{q}_b, \bar{q}_0)$, $\dim \bar{q} = n_u = n_b + n_0$. Dla uproszczenia zapisu pozostawiono oznaczenia \bar{q}_b, \bar{q}_0 , jak w wektorze \bar{q}_u . Również wzory (2.5), (2.6) oraz definicje macierzy $A(t)$, $R(t)$, D nie ulegają zmianie z tym, że wektor stanu układu wygodnie jest obecnie zdefiniować następująco:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \bar{r}(t) &= \text{col}(\bar{r}_b, \bar{r}_0), \\ \bar{r}_b &= \text{col}(\bar{q}_b, \dot{\bar{q}}_b), \quad \bar{r}_0 = \text{col}(\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}_0). \end{aligned}$$

Wzór (2.9)₁ można napisać w postaci blokowej:

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} \bar{r}_b(T) \\ \bar{r}_0(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{bb} & D_{b0} \\ D_{0b} & D_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r}_b(0) \\ \bar{r}_0(0) \end{bmatrix},$$

przy czym

$$(3.7) \quad \begin{aligned} D_{bb} &= R_{bb}(T) = [\bar{r}_{b,(1)}(T), \bar{r}_{b,(2)}(T), \dots, \bar{r}_{b,(2n_b)}(T)], \\ R_{bb}(0) &= I, \quad \dim D_{bb} = \dim I = 2n_b \times 2n_b, \quad I = \text{diag}(1, 1, \dots), \\ D_{0b} &= R_{0b}(T) = [\bar{r}_{0,(1)}(T), \bar{r}_{0,(2)}(T), \dots, \bar{r}_{0,(2n_b)}(T)], \\ R_{0b}(0) &= \emptyset, \quad \dim D_{0b} = \dim \emptyset = 2n_0 \times 2n_b. \end{aligned}$$

Każdy z podzbiorów $\bar{q}_{0,i}$ wektora \bar{q}_0 jest obserwowany w ograniczonym czasie kontaktu i -tego cyklu obciążenia z konstrukcją. Czas ten jest jednakowy dla poszczególnych cykli i wynosi $T_i = na/v = nT$. Wygodnie jest przyjąć względny pomiar czasu dla poszczególnych cykli obciążenia. Chwilę wjazdu i -tego cyklu na konstrukcję będziemy uważać za chwilę początkową $t = 0$ dla tego cyklu.

W pierwszym cyklu wymuszenia ($r = 1$) zgodnie ze wzorem (3.6) otrzymamy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{r}_b(T) &= D_{bb} \bar{r}_b(0) + D_{b0} \bar{r}_0(0), \\ \bar{r}_0(T) &= \bar{r}_0^{(0)}(T) = \text{col}[\bar{r}_{0,1}(T), \dots, \bar{r}_{0,n}(T)]. \end{aligned}$$

W chwili $t = T$ następuje efemeryczna modyfikacja wektora \bar{r}_0 :

$$(3.9) \quad \bar{r}_0(T) = \text{col}[\bar{r}_{0,2}(T), \dots, \bar{r}_{0,n}(T), \bar{r}_{0,n+1}(0)] = \bar{r}_0^{(1)}(T).$$

Wykorzystując okresowość współczynników równania (2.3), w drugim cyklu wymuszenia ($r = 2$) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_b(2T) &= D_{bb} \bar{r}_b(T) + D_{b0} \bar{r}_0^{(1)}(T) = \\
 &= D_{bb}^2 \bar{r}_b(0) + D_{bb} D_{b0} \bar{r}_0^{(0)}(0) + D_{b0} \bar{r}_0^{(1)}(T), \\
 \bar{r}_0(2T) &= \bar{r}_0^{(1)}(2T) = \text{col} [\bar{r}_{0,2}(2T), \dots, \bar{r}_{0,n}(2T), \bar{r}_{0,n+1}(T)].
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

W chwili $t = 2T$ następuje efemeryczna modyfikacja wektora \bar{r}_0 :

$$\bar{r}_0(2T) = \text{col} [\bar{r}_{0,3}(2T), \dots, \bar{r}_{0,n}(2T), \bar{r}_{0,n+1}(T), \bar{r}_{0,n+2}(0)] = \bar{r}_0^{(2)}(2T).
 \tag{3.11}$$

Dla N -tego cyklu wymuszenia ($r = N > n$) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_b(NT) &= D_{bb} \bar{r}_b[(N-1)T] + D_{b0} \bar{r}_0^{(N-1)}[(N-1)T] = \\
 &= D_{bb}^N \bar{r}_b(0) + \sum_{j=1}^N D_{bb}^{N-j} D_{b0} \bar{r}_0^{(j-1)}[(j-1)T], \\
 \bar{r}_0(NT) &= \bar{r}_0^{(N-1)}(NT) = \text{col} [\bar{r}_{0,1+N-1}(nT), \dots, \bar{r}_{0,n+N-1}(T)].
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

W chwili $t = NT$ następuje kolejna N -ta efemeryczna modyfikacja wektora \bar{r}_0 :

$$\bar{r}_0(NT) = \text{col} \{\bar{r}_{0,1+N}[(n-1)T], \dots, \bar{r}_{0,n+N}(0)\} = \bar{r}_0^{(N)}(NT).
 \tag{3.13}$$

Występujące we wzorach (3.8)—(3.13) wektory $\bar{r}_0^{(r)}(rT)$, $r = 1, 2, \dots$ mają elementy obserwowane co najwyżej w czasie T_l . Przy ograniczonych warunkach początkowych $\bar{r}_0(0)$ elementy wektorów $\bar{r}_0^{(r)}(rT)$ są zawsze ograniczone (teoria Floqueta). Ze wzoru (3.12)₁ wynika zatem, że o stabilności drgań swobodnych konstrukcji mostowej, opisanych przez wektor stanu \bar{r}_b , decyduje podblok D_{bb} macierzy monodromii, podnoszony do potęgi w kolejnych cyklach wymuszenia.

Macierz D_{bb} , zdefiniowana we wzorze (3.7)₁, jest ogólnie niesymetryczną rzeczywistą macierzą kwadratową. Odpowiada jej ogólnie zespolone widmo własne $\{\lambda\}$. Na podstawie struktury tego widma można zidentyfikować stabilność asymptotyczną, granicę obszaru stabilności, rezonans parametryczny lub kombinowany, podobnie jak w przypadku omówionym w punkcie 2 pracy.

Przy budowaniu algorytmu na komputerze obliczenia mogą być wykonane globalnie dla równania macierzowego (2.13), w którym $Q(t) = \text{col} [Q_b(t), Q_0(t)]$ z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned}
 Q_b(0) &= [I, \emptyset], \quad \dot{Q}_b(0) = [\emptyset, I], \quad I = \text{diag}(1, 1, \dots), \\
 Q_0(0) &= \dot{Q}_0(0) = \emptyset, \\
 \dim Q_b &= \dim \dot{Q}_b = n_b \times 2n_b, \\
 \dim Q_0 &= \dim \dot{Q}_0 = n_0 \times 2n_b.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Łatwo zauważyć, że $D_{bb} = \text{col} [Q_b(T), \dot{Q}_b(T)]$.

4. ANALIZA DYNAMICZNEJ STABILNOŚCI BELKI MOSTOWEJ OBCIĄŻONEJ STRUMIENIEM MAS RUCHOMYCH O RÓŻNYM STOPNIU URESOROWANIA (PRZYKŁAD)

Zmodyfikowaną metodę macierzy monodromii zastosowano przykładowo do analizy stabilności klasycznej belki mostowej, poddanej działaniu jednorodnego strumienia mas nieresorowanych (por. [5]), częściowo resorowanych i całkowicie resorowanych. Rozpatrywana belka jest swobodnie podparta typu Eulera, o parametrach wymiarowych EJ , m , l , c_b (sztywność giętna, intensywność rozkładu masy własnej, rozpiętość, wymiarowy współczynnik tłumienia wiskotycznego odpowiadający modelowi tłumienia masowego [11]).

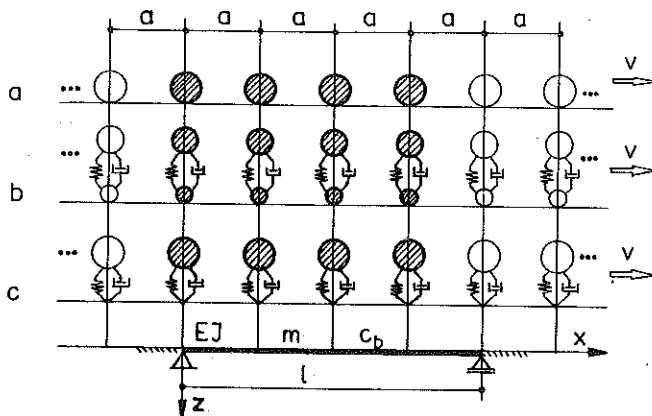
Macierze stałe przyporządkowane dźwigarowi belkowemu, odpowiadające sinusowej aproksymacji stanu przemieszczenia (3.2), wynoszą (por. np. [12]):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} B_b &= (ml/2) I_b, & I_b &= \text{diag} (1, 1, \dots), & C_b &= c_b B_b, \\ K_b &= (EJ/2l^3) \{d^4\}, & \{d\} &= \text{diag} (\pi, 2\pi, \dots, n_b \pi). \end{aligned}$$

Belka przenosi strumień jednakowych oscylatorów dwumasowych o parametrach wymiarowych M_0 , M , k , c , poruszających się z prędkością v w odstępach a (przypadek b) na rys. 3). Macierze stałe przyporządkowane efemerycznemu podzbiorowi oscylatorów wynoszą:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \{M_0\} &= M_0 I_0, & \{M\} &= M I_0, & \{k\} &= k I_0, & \{c\} &= c I_0, \\ I_0 &= \text{diag} (1, 1, \dots), & \dim I_0 &= n_0 \times n_0. \end{aligned}$$

W szczególnych przypadkach a) i c), pokazanych na rys. 3, otrzymamy strumień mas nieresorowanych ($M_0 = 0$, $M \neq 0$) lub oscylatorów jednomasowych ($M_0 \neq 0$, $M = 0$).



Rys. 3. Modele obciążenia ruchomego działającego na belkę mostową

Równanie drgań swobodnych (2.3) sprowadzimy do postaci bezwymiarowej, wygodnej w studyjnej analizie zadania (por. [12]):

$$(4.3) \quad (B + \tilde{B}) \bar{q}'' + (C + \tilde{C}) \bar{q}' + (K + \tilde{K}) \bar{q} = \bar{0},$$

przy czym

$$(4.4) \quad \begin{aligned} B &= \text{bdiag} (\beta^2 I_b, \delta_0 I_0), & C &= \text{bdiag} (\sigma I_b, \varrho I_0), \\ K &= \text{bdiag} (\{d^4\}, \varkappa I_0), \\ \tilde{B}_g &= [\delta SS^T, \delta_0 S], & \tilde{C}_l &= \text{col} (2\delta SC^T \{d\}, -\varrho S^T), \\ \tilde{K}_l &= \text{col} (-\delta SS^T \{d^2\}, -\varkappa S^T - \varrho C^T \{d\}); \end{aligned}$$

$$\bar{q}(\tau) = \text{col} [\bar{q}_b(\tau), \bar{q}_0(\tau)], \quad \tau = vt/l, \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau},$$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \bar{S}_J(\tau) &= \bar{s} [l \cdot \xi_J(\tau)], & \bar{C}_J(\tau) &= \bar{c} [l \cdot \xi_J(\tau)], \\ \xi_J(\tau) &= x_J(t)/l = \tau - \alpha_J, & \alpha_J &= a_J/l, \end{aligned}$$

$$(r-1)\alpha \leq \tau < r\alpha, \quad \alpha = a/l;$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \beta &= vl \sqrt{m/EJ} = \pi^2 v/(l\omega_1), \\ \mu_0 &= M_0/(ml/2), & \mu &= M/(ml/2), \\ \varkappa &= 2kl^3/EJ = \pi^4 \mu_0 \eta_0^2, & \eta_0 &= \omega_0/\omega_1, \\ \gamma &= c_b/\omega_1, & \gamma_0 &= c/\sqrt{kM_0}, \\ \delta &= \beta^2 \mu, & \delta_0 &= \beta^2 \mu_0, & \sigma &= \beta\gamma\pi^2, & \varrho &= \beta\gamma_0 \sqrt{\varkappa\mu_0}, \\ \omega_1 &= (\pi^2/l^2) \sqrt{EJ/m}, & \omega_0 &= \sqrt{k/M_0}. \end{aligned}$$

Zadanie opisane jest przez siedem parametrów bezwymiarowych $\alpha, \beta, \gamma, \gamma_0, \eta_0, \mu, \mu_0$, którym można nadać prostą interpretację fizyczną [12].

Na podstawie sformułowanej w punkcie 3 teorii stabilności zbudowano algorytm analizy stabilności belki mostowej i opracowano program w języku Fortran 1900. Do numerycznego całkowania równań ruchu (4.3) zastosowano bezwarunkowo mocno stabilną metodę Newmarka $\beta_N = 1/4$. Wielkość kroku całkowania dobierano według zasad zaproponowanych w [13]. Obliczenia wykonywano globalnie dla $2n_b$ wariantów zaburzeniowych warunków początkowych, wykorzystując wzory (3.14). Dla zmiennej τ otrzymamy $(v/l)T = \alpha$, $Q(\tau) = \text{col} [Q_b(\tau), Q_0(\tau)]$,

$$(4.7) \quad D_{bb} = \text{col} [Q_b(\alpha), Q'_b(\alpha)].$$

W programie wykorzystano m.in. następujące podprogramy z biblioteki FSCE: F4SOLVE — rozwiązywanie układu równań algebraicznych metodą Crouta, FPDIRHESSE — redukcja dowolnej macierzy rzeczywistej do górnej

macierzy Hessenberga, FPQRHESSE — obliczanie wartości własnych macierzy Hessenberga metodą QR. W programie wyznacza się numerycznie widmo $\{\lambda\}$ bez identyfikacji dzielników elementarnych dla wielokrotnych wartości własnych.

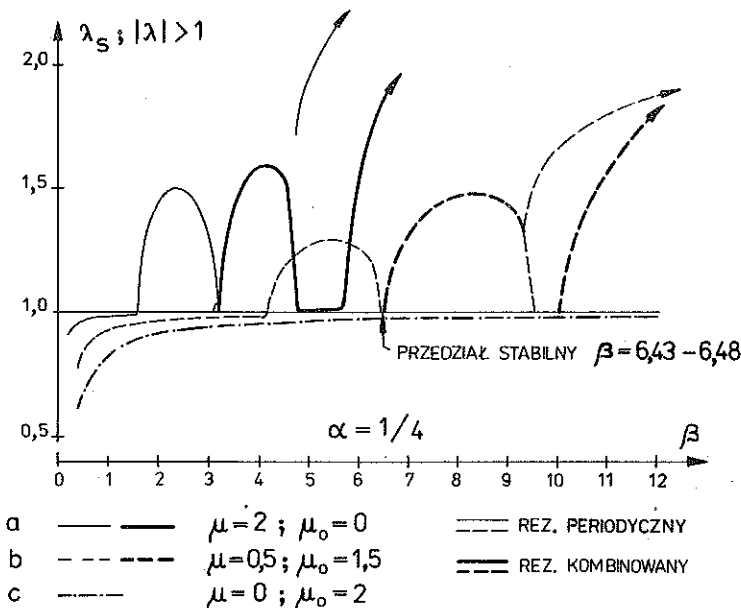
Główną część analizy numerycznej przeprowadzono dla przypadku $\alpha = 1/4$ ($n = 4$). Na podstawie obliczeń testowych ustalono:

1. Wartości własne podmacierzy monodromii są wyznaczone z dokładnością 0,00005 przy zastosowaniu pojedynczej precyzji i wielkości kroku całkowania według [13].

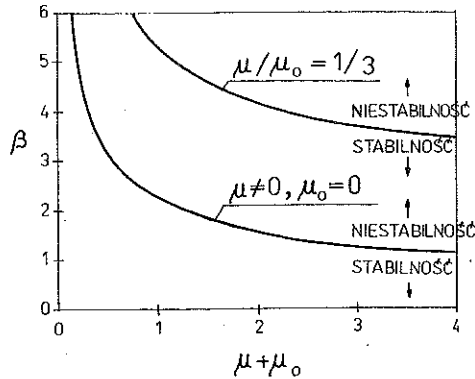
2. Przy zwiększaniu rozmiaru bazy aproksymacyjnej dla belki n_b kolejne pary elementów widma $\{\lambda\}$ macierzy D_{bb} ustalają swe wartości. Technicznie dokładne wyniki w zakresie stabilności asymptotycznej, podstawowej (najniższej) granicy stabilności, podstawowych (pojawiających się w przedziale $0 < \beta < 12$) rezonansów periodycznych i kombinowanych otrzymuje się przy założeniu $n_b = 3$.

3. Czas obliczeń dla jednego zestawu wartości parametrów bezwymiarowych układu wynosił od kilku do kilkunastu sekund w przypadku $\alpha = 1/4$, $n_b = 3$, $\beta > 1$, na komputerze ODRA 1305.

Niektóre reprezentatywne wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4, 5. Na rys. 4 pokazano wykres wartości promienia spektralnego λ_s macierzy D_{bb} oraz innych wartości własnych tej macierzy większych modułarnie od 1, jako funkcji względnej prędkości mas ruchomych β . Uwzględniono przypadki



Rys. 4. Wykresy promienia spektralnego λ_s podmacierzy monodromii. Wykresy innych wartości własnych $|\lambda| > 1$



Rys. 5. Główne granice obszarów stabilności w przypadku mas nieresorowanych i częściowo resorowanych ($\alpha = 1/4$)

a), b), c) obciążenia ruchomego, pokazane na rys. 3. Realny poziom mas $\mu + \mu_0 = 2$ jest jednakowy w podanych wyżej przypadkach, co ułatwia analizę wpływu resorowania mas ruchomych.

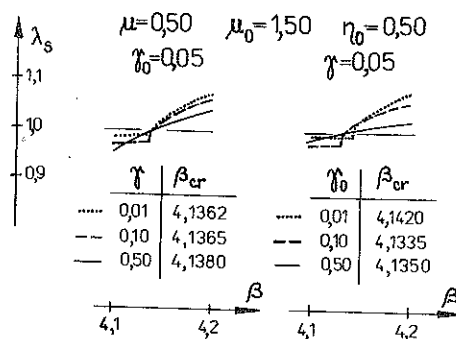
Na rys. 5 przedstawiono wykresy podstawowych granic obszarów stabilności dla przypadków a) i b). W przypadku c) cały analizowany obszar $\beta - (\mu + \mu_0)$ jest stabilny. Zwróćmy uwagę, że dla mostów kolejowych i pociągów rozwijających prędkości do 400 km/h wartości podstawowych parametrów bezwymiarowych spełniają relacje: $\beta < 2,5$; $(\mu + \mu_0) < 3$.

Wartości pozostałych parametrów bezwymiarowych układu, odpowiadające rys. 4, 5, wynoszą: $\gamma = 0,05$, $\gamma_0 = 0,05$, $\eta_0 = 0,5$. Wartości parametrów γ , η_0 są realne dla stalowych mostów kolejowych, natomiast wartość γ_0 jest zaniżona. W celach studyjnych przeprowadzono m.in. wycinkową analizę wpływu tłumienia fizycznego w belce i oscylatorach ruchomych na położenie podstawowej granicy stabilności układu, rys. 6. Wpływ ten jest mały dla przyjętych wartości μ , μ_0 , odmienny niż w klasycznych zagadnieniach stabilności. Świadczą o tym wartości β_{cr} dla podstawowej granicy stabilności, odpowiadające różnym wartościom współczynników γ , γ_0 .

Wartość parametru η_0 praktycznie nie przekracza 1 z wyjątkiem przęseł mostowych o bardzo dużych rozpiętościach. W celach studyjnych analizowano również stabilność układu dla $\eta_0 > 1$. Układ jest stabilny asymptotycznie dla $1 < \eta_0 < 9$ i $\beta \leq 12$. Dla wartości $\eta_0 \geq 10$ pojawiają się już obszary niestabilne.

Na podstawie przeprowadzonej analizy studyjnej dla realnych zakresów zmienności parametrów układu β , $\mu + \mu_0$, η_0 , γ , γ_0 , α można sformułować następujące wnioski:

1. Dynamiczna niestabilność układu pojawia się tylko w przypadku mas nieresorowanych lub częściowo resorowanych dla odpowiednio dużych prędkości ruchu tych mas.



Rys. 6. Wpływ tłumienia fizycznego na położenie podstawowej granicy stabilności układu

2. Resorowanie mas ruchomych wpływa na rozszerzenie obszaru stabilnego w porównaniu z przypadkiem mas nieresorowanych.

3. Charakter liniowych drgań swobodnych powyżej podstawowej granicy stabilności jest dość złożony. Mogą występować wzajemnie nakładające się strefy rezonansów periodycznych i kombinowanych. Mogą występować dodatkowe, zwykle wąskie, strefy stabilne.

4. Wpływ tłumienia fizycznego na położenie podstawowych granic obszarów stabilności jest nieznaczny, mogą natomiast istotnie zmieniać się liczbowe wartości $|\lambda_{ii}| > 1$, będące miarą intensywności rezonansów.

5. PODSUMOWANIE

Problem dynamicznej stabilności swobodnych drgań tłumionych konstrukcji geometrycznie ograniczonych, poddanych działaniu inercyjnych obciążeń ruchomych o różnym stopniu uresorowania mas i rozkładzie cyklicznym, został rozważony przede wszystkim teoretycznie. W celu zilustrowania efektywności zmodyfikowanej metody macierzy monodromii do analizy stabilności dynamicznej rozważono klasyczną belkę mostową poddaną działaniu jednorodnego strumienia mas ruchomych. Układ ten można uznać za jeden z podstawowych modeli jednorodnych mostów kolejowych [12]. Wzory (3.3) i (3.4) na macierzowe współczynniki równań ruchu zostały sformułowane ogólnie i obejmują różnorodne płaskie modele konstrukcji mostowych, m.in. jedno- i wieloprzęsłowe belki ciągłe o stałej lub zmiennej sztywności i masie, belki wzmocnione kratami lub cięgnami wiszącymi lub wantowymi. Strukturę macierzowych współczynników równania (2.1) można sformułować dla bardziej ogólnego przypadku konstrukcji, których modele składają się ze zbioru makroelementów lub elementów skończonych, nie ma to jednak wpływu na sformułowaną w pracy teorię dynamicznej stabilności.

Cenne byłoby doświadczalne zweryfikowanie wyników badań teoretycznych w zakresie dynamicznej stabilności. Badania mogłyby być przeprowadzone na belkowym moście kolejowym, przez który przejeżdża pociąg składający się z kilkunastu wagonów o zbliżonych parametrach. Swobodne drgania tłumione konstrukcji mostowej są wówczas wywołane przejazdem przez przęśło czoła pociągu. Jeśli układ jest dynamicznie stabilny, to drgania swobodne zanikną, a pozostaną tylko drgania ustalone. Eksperyment może być jednocześnie wykorzystany do identyfikacji cyklu drgań ustalonych i uderzeń bocznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. A. IBRAHIM, A. D. S. BARR, *Parametric vibration*, Shock and Vibr. Digest, **10**, 1, 15—29, 1978.
2. V. V. BOLOTIN, *Dynamic stability of elastic systems*, Holden Day, 1964.
3. B. P. DEMIDOWICZ, *Matematyczna teoria stabilności*, WNT, Warszawa 1972.
4. L. PIPES, *Matrix solution of equation of the Mathieu-Hill type*, J. App. Phys., **24**, 902—910, 1953.
5. H. D. NELSON, R. A. CONOVER, *Dynamic stability of a beam carrying moving masses*, J. Appl. Mech., **38**, ASME, 1003—1006, Dec. 1971.
6. D. C. MC WHANNEL, *Parametric instability regions in multidegree of freedom systems under quasi-periodic beating input excitation*, J. Sound Vibr., **48**, 73—81, 1976.
7. Z. WÓJCICKI, J. LANGER, *Bezpośrednia metoda analizy dynamicznej stateczności konstrukcji w przestrzeni konfiguracyjnej*, Arch. Inż. Łąd., **28**, 3—4, 195—204, 1982.
8. B. SKAŁMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Stabilność układów dynamicznych*, Małe Monogr. PWN, Warszawa 1973.
9. G. A. BENEDETTI, *Dynamic stability of a beam loaded by a sequence of moving mass particles*, J. Appl. Mech., **41**, ASME, 1069—1071, Dec. 1974.
10. M. P. PAIDOUSSIS, C. SUNDARARAJAN, *Parametric and combination resonances of a pipe conveying pulsating fluid*, J. Appl. Mech., **42**, ASME, 780—784, Dec. 1975.
11. J. LANGER, *Wybrane problemy drgań konstrukcji pod obciążeniem ruchomym*, Ref. probl., X Symp. Drgania w Układach Fizycznych, Mat. Konf. s. 7—22, Poznań 1982.
12. M. KLASZTORNY, *Drgania belkowych mostów kolejowych wywołane złożonym cyklicznym obciążeniem ruchomym*, Arch. Inż. Łąd., **28**, 1—2, s. 31—46, 1982.
13. J. LANGER, M. KLASZTORNY, *Analiza jednokrokowych metod numerycznego całkowania równań ruchu*, Mechanika i Komputer, [w druku].

РЕЗЮМЕ

ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕЙСТВИЮ ИНЕРЦИОННЫХ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК

В работе сформулированы основы теории динамической стабильности свободных затухающих колебаний дискретных систем с эфемеридным подмножеством обобщенных координат, как моделей мостовых конструкций, подвергнутых действию последовательности транспортных средств движущихся в циклической системе. Для решения задачи

стабильности применен модифицированный метод матрицы монодромии в современном матричном подходе. Подробно проанализирована динамическая стабильность классической мостовой балки, подвергнутой действию однородного потока подвижных масс с разной степенью поддресоривания.

SUMMARY

DYNAMIC STABILITY OF BRIDGE STRUCTURES SUBJECT TO THE ACTION OF MOVING INERTIAL LOADS

Foundations of the theory of dynamic stability are formulated with respect to damped free vibrations of discrete systems with an ephemeral subset of generalized coordinates, serving as models of bridge structures loaded by a sequence of vehicles moving periodically along the bridge. The modified monodromy matrix method is used to solve the stability problem. Dynamic stability of a classical bridge beam is studied in detail, the load consisting of a uniform flow of moving, spring-suspended masses.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 października 1985 r.
