

TEORETYCZNO-DOŚWIADCZALNE BADANIA WŁASNOŚCI MECHANICZNYCH MATERIAŁU Z PĘKNIĘCIAMI(*)

ANDRZEJ LITEWKA, JOANNA MORZYŃSKA
i EWA ROGALSKA (POZNAŃ)

Przedmiotem pracy jest omówienie teoretycznych i doświadczalnych modeli ciała stałego z regularnie rozłożonymi pęknięciami. Modelami tymi posłużono się w celu określenia globalnych własności mechanicznych materiałów uszkodzonych w zakresie sprężystym i plastycznym. Równania sprężystości i plastyczności wyprowadzone przy zastosowaniu teorii reprezentacji funkcji tensorowych umożliwiły obliczenie stałych materiałowych, które porównano z wartościami uzyskanymi na drodze doświadczalnej.

1. WPROWADZENIE

Problem opisu własności materiałów z pęknięciami był przedmiotem szeregu prac zarówno teoretycznych jak doświadczalnych. Wcześniejsze prace z tego zakresu [1, 2 i 3] dotyczyły jednak tylko wyznaczenia stałych sprężystości dla materiałów z pęknięciami, a ich przydatność w mechanice uszkodzenia materiału była ograniczona ze względu na to, że ich autorzy nie posługiwali się powszechnie obecnie stosowaną zmienną określającą stan materiału. Definiowanie tej zmiennej, przyjmowanej zwykle w postaci tensora rzędu drugiego, nazywanego tensorem uszkodzenia oraz formułowanie równań konstytutywnych mechaniki materiałów uszkodzonych było przedmiotem prac WAKULENKI i KACZANOWA [4], DRAGONA [5], MURAKAMIEGO i OHNO [6], KRAJCI NOVICA [7] i BETTENA [8]. Wymienione zostały tutaj tylko najważniejsze prace, a pełniejszą bibliografię oraz podsumowanie wyników badań z zakresu mechaniki uszkodzonych materiałów można znaleźć w opracowaniach przeglądowych KRAJCI NOVICA [9], BASISTY [10] oraz LE-MAITREA [11].

Przedmiotem niniejszej pracy, nawiązującej do podejścia przedstawionego w opracowaniach [4, 5, 6, 7 i 8], jest omówienie teoretycznych i doświadczal-

(*) Praca została wykonana w ramach C.P.B.P. 02.01, temat 1, 10.

nych modeli ciała stałego z regularnie rozłożonymi prostoliniowymi pęknięciami. Modele te umożliwiają badanie globalnych własności mechanicznych materiałów z pęknięciami w zakresie sprężystym i plastycznym. Niektóre wyniki dotyczące tego problemu były wprowadzone już omawiane we wcześniejszych pracach [12, 13 i 14], wyniknęła jednak potrzeba bliższego zbadania własności materiałów z szachownicowym układem pęknięć. W tym celu przebadane zostały doświadczalnie odpowiednio przygotowane modele materiału z pęknięciami, a uzyskane w ten sposób wyniki porównano z wynikami teoretycznymi, otrzymanymi przy zastosowaniu dwóch omówionych w pracy metod.

2. RÓWNANIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI MATERIAŁU

W zaproponowanym w tej pracy opisie własności plastycznych materiału z pęknięciami postuluje się istnienie warunku plastyczności w postaci izotropowej funkcji skalarnej dwóch zmiennych: tensora naprężeń σ oraz tensora uszkodzenia materiału D . Jak wynika z teorii funkcji skalarnych [15] funkcję taką można w najogólniejszym przypadku napisać w formie wielomianu utworzonego z niezmienników skalarnych, których liczba dla dwóch tensorów symetrycznych rzędu drugiego wynosi dziesięć. W rozpatrywanym przypadku nie ma jednak potrzeby formułowania tak ogólnej postaci funkcji skalarnej i wydaje się uzasadnione uwzględnienie w warunku plastyczności tylko niektórych spośród dziesięciu niezmienników. Doboru odpowiednich niezmienników, które powinny tworzyć warunek plastyczności, dokonuje się często na drodze intuicyjnej, wykorzystując znane wyniki teoretyczne oraz doświadczalne. Jedną z przesłanek teoretycznych, które można w tym celu wykorzystać jest założenie, że warunek plastyczności powinien mieć postać analogiczną do zależności określającej energię odkształcenia sprężystego dla ujednorodnionego materiału zastępczego:

$$(2.1) \quad \Phi_z = \frac{1}{2} \text{tr } \sigma \varepsilon,$$

gdzie ε oznacza tensor odkształcenia materiału zastępczego.

Podstawiając do (2.1) równania fizyczne sprężystości

$$(2.2) \quad \varepsilon = AI \text{tr } \sigma + 2B\sigma + 2\gamma (\sigma D + D\sigma),$$

wprowadzone w pracy [13], otrzymuje się następujący wzór

$$(2.3) \quad \Phi_z = \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{3} B \right) \text{tr}^2 \sigma + B \text{tr } S^2 + 2\gamma \text{tr } D\sigma^2,$$

gdzie S jest dewiatorem naprężeń oraz

$$A = -\frac{\nu}{E}, \quad B = \frac{1+\nu}{2E}.$$

We wzorach tych E oraz ν oznaczają moduł Younga oraz współczynnik Poissona dla materiału bez pęknięć, a γ jest stałą materiałową, wyznaczaną dla materiału z pęknięciami na drodze teoretycznej lub doświadczalnej.

Występujący we wzorach (2.2) i (2.3) symetryczny tensor drugiego rzędu \mathbf{D} , nazywany tensorem uszkodzenia, zdefiniowany został przez WAKULENKĘ i KACZANOWA [4] oraz MURAKAMIEGO i OHNO [6] w postaci

$$(2.4) \quad \mathbf{D} = D_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + D_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + D_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3,$$

gdzie \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 i \mathbf{n}_3 oznaczają trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe związane z przyjętym układem współrzędnych x_1 , x_2 , x_3 . Wartości główne D_1 , D_2 , D_3 tensora \mathbf{D} obliczane są, jak zaproponowano w pracy [13], ze wzorów

$$(2.5) \quad D_i = \frac{S_{si}}{S_{ni}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie S_{si} oraz S_{ni} oznaczają odpowiednio powierzchnię szczelin oraz pozostającą powierzchnię materiału netto na płaszczyźnie prostopadłej do kierunku określonego wektorem \mathbf{n}_i .

Zdefiniowany za pomocą wzorów (2.4) i (2.5) tensor uszkodzenia określa nie tylko obniżenie wytrzymałości oraz sztywności materiału z pęknięciami, lecz także uwzględnia symetrię materiału w przypadku regularnego układu szczelin. Przyjęta postać tensora \mathbf{D} daje możliwość opisu ortotropii oraz izotropii transwersalnej, a w szczególnym przypadku materiału izotropowo uszkodzonego, w którym pojawia się losowy układ pęknięć, otrzymujemy równość wartości D_1 , D_2 i D_3 .

Ze wzorów (2.3) wynika, że energia odkształcenia sprężystego dla materiału z pęknięciami, którego własności sprężyste opisuje równanie (2.2), jest funkcją tylko trzech niezmienników skalarnych $\text{tr } \boldsymbol{\sigma}$, $\text{tr } \mathbf{S}^2$ i $\text{tr } \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}^2$. Z tego względu, o ile są spełnione równania (2.2) i (2.3), wydaje się uzasadnione przyjęcie następującej postaci warunku plastyczności:

$$(2.6) \quad C_1 \text{tr}^2 \boldsymbol{\sigma} + C_2 \text{tr } \mathbf{S}^2 + C_3 \text{tr } \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}^2 - \sigma_0^2 = 0,$$

gdzie C_1 , C_2 , C_3 są stałymi materiałowymi dla materiału z pęknięciami, a σ_0 jest granicą plastyczności dla materiału bez pęknięć. Występujące w równaniu (2.6) trzy stałe materiałowe mogą być w prosty sposób wyznaczone na drodze doświadczalnej. W dalszym ciągu niniejszej pracy zaproponowany będzie sposób ich wyznaczania na drodze teoretycznej bez konieczności wykorzystania badań doświadczalnych, a poprawność równań (2.2) i (2.6) zweryfikowana będzie doświadczalnie.

3. WYZNACZANIE STAŁYCH PLASTYCZNOŚCI

Omawiany sposób wyznaczania stałych plastyczności C_1 , C_2 i C_3 dotyczyć będzie regularnego szachownicowego układu pęknięć, pokazanego na rys. 1a i 2. W tym celu równanie (2.6) napisane zostało dla trzech prostych przypadków stanu naprężenia, mianowicie dla osiowego rozciągania wzdłuż dwóch wzajemnie do siebie prostopadłych kierunków x_1 i x_2 oraz dla dwukierunkowego równomiernego rozciągania. W ten sposób otrzymuje się układ trzech równań liniowych:

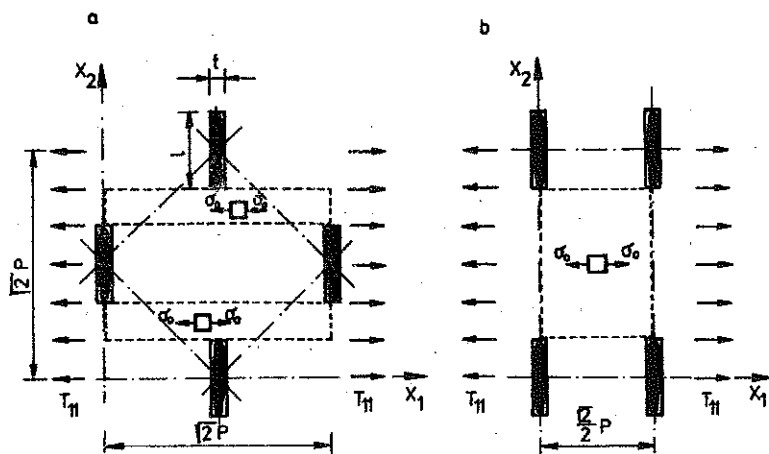
$$(3.1) \quad \begin{aligned} C_1 + \frac{2}{3} C_2 + D_1 C_3 &= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{10}} \right)^2, \\ C_1 + \frac{2}{3} C_2 + D_2 C_3 &= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{20}} \right)^2, \\ 4C_1 + \frac{2}{3} C_2 + (D_1 + D_2) C_3 &= \left(\frac{\sigma_0}{T_0} \right)^2, \end{aligned}$$

z którego można obliczyć C_1 , C_2 i C_3 , o ile znane będą wartości granic plastyczności σ_{10} i σ_{20} przy osiowym rozciąganiu wzdłuż osi x_1 i x_2 oraz granicy plastyczności T_0 przy dwukierunkowym równomiernym rozciąganiu. Dwa niezależne od siebie teoretyczne sposoby oszacowania wartości tych granic plastyczności omówione zostaną w następnych rozdziałach niniejszej pracy.

4. METODA ENERGETYCZNA

Zakłada się, że uplastycznienie materiału z pęknięciami następuje w chwili osiągnięcia przez energię odkształcenia sprężystego (2.3) pewnej wartości krytycznej. Wartość tej energii w ogólności nie jest znana, jednakże w rozpatrywanym przypadku nie ma potrzeby jej obliczania, gdyż dla wyznaczenia poszukiwanych wartości σ_{10} , σ_{20} i T_0 wystarczy porównanie wartości Φ_2 dla ujednorodnionego materiału zastępczego określonej równaniem (2.3) z wartością energii sprężystej Φ_m , zgromadzonej w materiale matrycy. Sposób ten zaproponowany został przez MARKOWA [16] przy formułowaniu warunku plastyczności dla materiałów perforowanych. Najtrudniejszym problemem, jaki napotyka się przy takim podejściu, jest określenie energii odkształcenia sprężystego Φ_m , zgromadzonej w materiale rodzimym, pozostającym pomiędzy otworami. Ścisłe wyznaczenie tej wartości wymaga rozwiązania złożonego problemu brzegowego, mającego na celu określenie rozkładu naprężeń wewnątrz ogniwa struktury materiału. Z tego względu celowe wydaje się przybliżone oszacowanie tej energii, a uzasadnieniem takiego

podejścia mogą być dobre wyniki uzyskane przez MARKOWA [16], który przyjął dalekie od rzeczywistości założenie, że w całej objętości materiału matrycy osiągnąca jest równocześnie granica plastyczności σ_0 . Przy określaniu wartości energii odkształcenia sprężystego dla materiału matrycy w przypadku materiału z pęknięciami posłużono się więc w tej pracy także metodą przybliżoną. W tym celu zbudowano uproszczone statycznie dopuszczalne pola naprężeń w obrębie pojedynczego ogniwa struktury materiału. Zastosowanie takich pól w prostszym przypadku, jakim jest prostokątny układ pęknięć, omówione zostało w pracy [14].



Rys. 1. Uproszczone pola naprężeń dla: a) szachownicowego układu szczelin, b) prostokątnego układu szczelin

Przykłady pól naprężeń dla rozciągania w kierunku prostopadłym do osi pęknięć pokazane zostały dla szachownicowego i prostokątnego układu szczelin na rys. 1. W dalszych rozważaniach przyjęto, że poszukiwana energia sprężysta dla materiału matrycy mieści się w przedziale określonym granicznymi wartościami, wyznaczonymi dla dwóch skrajnych przypadków, pokazanych na rys. 1a i b. Podobne pola naprężeń utworzone zostały dla dwukierunkowego równomiernego rozciągania oraz dla jednokierunkowego rozciągania wzdłuż osi pęknięć. W tym ostatnim przypadku pola naprężeń dla szachownicowego i prostokątnego układu pęknięć są identyczne, stąd otrzymano tylko jedną wartość energii sprężystej:

$$(4.1) \quad \Phi_m = \left(1 - \frac{\sqrt{2}t}{P}\right) \frac{\sigma_0^2}{2E}$$

Dla osiowego rozciągania w kierunku osi x_1 ścisła wartość Φ_m jest zawarta w przedziale określonym przez

$$(4.2) \quad \Phi_{md} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sqrt{2}l}{P}\right) \frac{\sigma_0^2}{2E} & \text{dla } 0 < l < \frac{\sqrt{2}}{2}P, \\ 0 & \text{dla } \frac{\sqrt{2}}{2}P < l < \sqrt{2}P, \end{cases}$$

$$\Phi_{mg} = \left(1 - \frac{l}{\sqrt{2}P}\right) \frac{\sigma_0^2}{2E} \quad \text{dla } 0 < l < \sqrt{2}P.$$

Podobne wartości graniczne wyznaczone dla dwukierunkowego równomiernego obciążenia są określone następującymi wzorami:

$$(4.3) \quad \Phi_{md} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sqrt{2}l}{P}\right) \left(1 - \nu + \frac{\sqrt{2}lv}{P}\right) \frac{\sigma_0^2}{E} & \text{dla } 0 < l < \frac{\sqrt{2}}{2}P, \\ 0 & \text{dla } \frac{\sqrt{2}}{2}P < l < \sqrt{2}P, \end{cases}$$

$$\Phi_{mg} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}t}{P}\right) \left(1 - \nu + \frac{\sqrt{2}tv}{P}\right) \frac{\sigma_0^2}{E} \quad \text{dla } 0 < l < \sqrt{2}P.$$

Porównując odpowiednie wartości Φ_m określone przez równania (4.1), (4.2) i (4.3) z wartością Φ_z dla materiału zastępczego, otrzymuje się granice plastyczności σ_{10} , σ_{20} i T_0 . Końcowe wzory służące do obliczenia tych granic plastyczności mają postać

$$(4.4) \quad \sigma_{10} = \sqrt{\frac{\Phi_{m\bar{s}r}}{\frac{1}{2E} + 2D_1\gamma}},$$

$$(4.5) \quad \sigma_{20} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}t}{P}}{1 + 4E\gamma D_2}} \sigma_0,$$

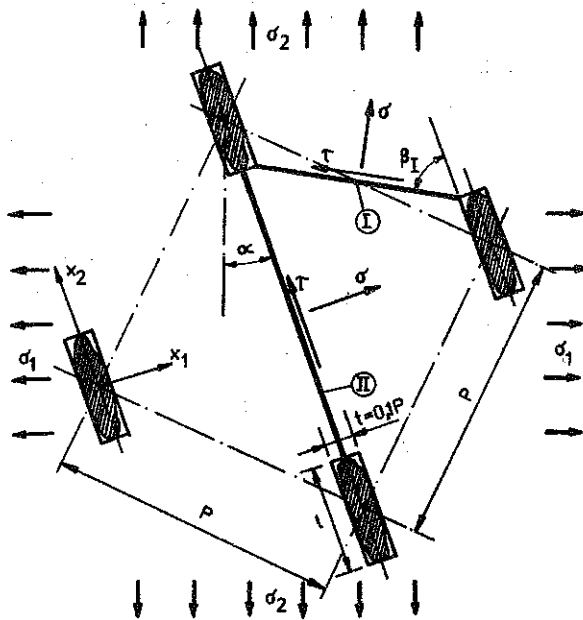
$$(4.6) \quad T_0 = \sqrt{\frac{\Phi_{m\bar{s}r}}{\frac{1-\nu}{E} + 2\gamma(D_1 + D_2)}}$$

gdzie $\Phi_{m\bar{s}r}$ jest średnią z dwóch wartości granicznych Φ_{md} i Φ_{mg} określonych przez wzory (4.2) i (4.3)

Wstępne wyniki uzyskane przy zastosowaniu omówionego wyżej sposobu obliczenia σ_{10} , σ_{20} i T_0 przedstawione były w pracy [17]. Ze względu jednak na wprowadzone założenia upraszczające zaproponowany sposób wymaga weryfikacji doświadczalnej oraz porównania z wynikami teoretycznymi, uzyskanymi na innej drodze, co będzie przedmiotem dalszej części pracy.

5. ANALIZA MECHANIZMÓW UPLASTYCZNIENIA

Przeprowadzone doświadczenia przy zastosowaniu modeli symulujących materiał uszkodzony [18] wykazały, że strefy plastyczne, rozwijające się pomiędzy sąsiednimi pęknięciami mają charakter bardzo wąskich pasm poślizgu, których układ jest uzależniony od kierunku obciążenia oraz od długości pęknięć. Szczegółowa analiza możliwych układów stref plastycznych oraz wynikających stąd mechanizmów zniszczenia dla przypadku osiowego rozciągania przeprowadzona została w pracy [19]. Uogólnienie przedstawionych tam rozważań na przypadek płaskiego stanu naprężenia umożliwia wyznaczenie granic plastyczności nie tylko dla osiowego rozciągania w kierunku x_1 i x_2 , a także dla dwukierunkowego równomiernego rozciągania. W tym celu przyjęto, że w płaskim stanie naprężenia reprezentowanym przez naprężenia główne σ_1 i σ_2 nachylone pod kątem α w stosunku do osi pęknięć, pojawia się jeden z dwóch możliwych układów stref plastycznych oznaczonych na rys. 2 przez I i II.



Rys. 2. Układy stref plastycznych

Pisząc dwa warunki równowagi dla naprężeń działających na ogniwo struktury materiału oraz uwzględniając warunek Hubera-Misesa

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2,$$

określający uplastycznienie materiału matrycy, które ma miejsce w wąskiej

strefie plastycznej, otrzymuje się następującą postać warunku plastyczności dla materiału z pęknięciami:

$$(5.1) \quad A_i \sigma_1^2 + B_i \sigma_2^2 + C_i \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_0^2 = 0, \quad i = \text{I, II.}$$

Występujące w równaniu (5.1) mnożniki A_i , B_i , C_i są funkcjami kąta α oraz wymiarów pęknięć i dla układu stref plastycznych I mają postać

$$(5.2) \quad \begin{aligned} A_I &= \left(0,5 \sqrt{2} - \frac{t}{P}\right)^{-2} [1 + 2 \sin^2(\alpha + \beta_1)] \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin^2 \beta_1, \\ B_I &= \left(0,5 \sqrt{2} - \frac{t}{P}\right)^{-2} [1 + 2 \cos^2(\alpha + \beta_1)] \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin^2 \beta_1, \\ C_I &= -\left(0,5 \sqrt{2} - \frac{t}{P}\right)^{-2} \sin 2(\alpha + \beta_1) \cos 2\alpha \sin^2 \beta_1. \end{aligned}$$

Natomiast dla układu II otrzymano następujące wzory

$$(5.3) \quad \begin{aligned} A_{II} &= 2 \left(\sqrt{2} - \frac{l}{P}\right)^{-2} (1 + 2 \sin^2 \alpha) \cos^2 \alpha, \\ B_{II} &= 2 \left(\sqrt{2} - \frac{l}{P}\right)^{-2} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha, \\ C_{II} &= 2 \left(\sqrt{2} - \frac{l}{P}\right)^{-2} \sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

Szczegółowa analiza wzorów (5.1) wraz z jej porównaniem ze wzorami (2.6) oraz weryfikacją doświadczalną jej poprawności nie jest przedmiotem niniejszego opracowania. Ograniczymy się tutaj jedynie do wyznaczenia z równań (5.1), (5.2) i (5.3) granic plastyczności σ_{10} , σ_{20} i T_0 , potrzebnych do obliczenia stałych C_1 , C_2 i C_3 . Pisząc równanie (5.1) dla osiowego rozciągania w kierunku osi x_1 i x_2 oraz dla dwukierunkowego równomiernego obciążenia, otrzymano następujące wartości granic plastyczności:

$$(5.4) \quad \sigma_{10} = \begin{cases} \frac{1 - \frac{\sqrt{2}t}{P}}{\sin \beta_1 \sqrt{1 + 2 \sin^2 \beta_1}} \sigma_0 & \text{dla } l \leq 0,7131P, \\ \left(1 - \frac{l}{\sqrt{2}P}\right) \sigma_0 & \text{dla } l \geq 0,7131P, \end{cases}$$

$$(5.5) \quad \sigma_{20} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}t}{P}}{\sin \beta_1 \sqrt{1 + 2 \cos^2 \beta_1}} \sigma_0,$$

$$(5.6) \quad T_0 = \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t}{P}}{\sin \beta_1 \sqrt{2} - \sin 2\beta_1} \sigma_0 & \text{dla } l \leq 0,8502P, \\ \left(1 - \frac{l}{\sqrt{2}P}\right) \sigma_0 & \text{dla } l \geq 0,8502P. \end{cases}$$

Podwójne wzory na σ_{10} i T_0 wynikają stąd, że dla różnych długości szczelin może pojawiać się układ stref plastycznych I lub II, którym odpowiadają inne wyrażenia A_i , B_i , C_i , przedstawionych wzorami (5.2) lub (5.3). Spośród dwóch wartości σ_{10} i T_0 , określonych wzorami (5.4) i (5.6) należy wybrać mniejszą, a dla ułatwienia posługiwania się tymi wzorami podano przy nich graniczne wartości l , określające zakres stosowności poszczególnych wzorów.

6. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA

Dla sprawdzenia poprawności podanych w niniejszej pracy wzorów dotyczących sprężystości i plastyczności materiałów z pęknięciami dokonano porównania uzyskanych z nich wyników z wartościami stałych materiałowych pomierzonych doświadczalnie przy zastosowaniu modeli symulujących materiał uszkodzony. Wykorzystano w tym celu wyniki badań omówione w pracach [13 i 20], a także przeprowadzono nową serię badań uzupełniających, mających na celu określenie stałych sprężystości oraz granic plastyczności dla modeli, w których długość szczelin wynosiła $l = 0,8P$ i $1,0P$. Kształt tych modeli oraz zastosowana technika badawcza były podobne do tych, jakimi posłużono się w badaniach omówionych w pracy [20]. Dzięki wykonanym badaniom uzupełniającym możliwa była znacznie pełniejsza weryfikacja doświadczalna obejmująca przedział długości szczelin od $l = 0,3P$ do $1,0P$. Wykonywanie badań przy użyciu modeli z otworami o długości mniejszej od $0,3P$ nie było celowe, gdyż stałe materiałowe mają wówczas wartości bliskie stałym dla materiału bez uszkodzeń. Zrezygnowano również z wykonywania modeli ze szczelinami o długościach bliższych granicznej wartości $\sqrt{2}P$, gdyż w takim przypadku wartości stałych materiałowych szybko maleją do zera i ich pomiar jest trudny do przeprowadzenia. Ponadto precyzyjne wycięcie tak długich otworów stwarzało szereg problemów natury technicznej.

Program badań obejmował więc rozciąganie osiowe 49 różnych modeli, w których szczeliny o długościach $l = 0,3P, 0,4P, 0,5P, 0,6P, 0,7P, 0,8P$ i $1,0P$ nachylone były pod kątem $\alpha = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12$ i $\pi/2$ w stosunku do kierunku obciążenia. Dla modeli tych dokonano pomiarów modułów Younga E_1, E_2 , współczynników Poissona ν_{12}, ν_{21} oraz granic

plastyczności σ_{10} i σ_{20} dla rozciągania w kierunku osi x_1 i x_2 . Ponadto przebadano zależność modułu Younga, współczynnika Poissona oraz granicy plastyczności od kierunku obciążenia.

Pomierzone doświadczalnie stałe sprężystości porównane zostały z wynikami teoretycznymi obliczonymi ze wzorów

$$(6.1) \quad A_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \\ + \gamma(\delta_{ik}D_{jl} + \delta_{jl}D_{ik} + \delta_{il}D_{jk} + \delta_{jk}D_{il}),$$

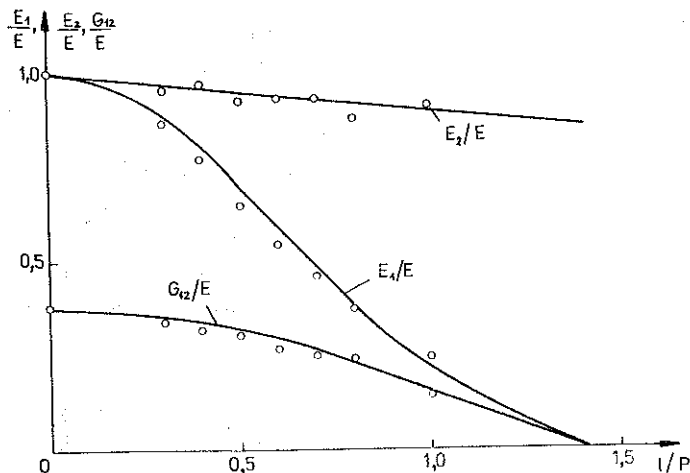
zaproponowanymi w pracy [13], gdzie A_{ijkl} jest tensorem anizotropii materiału, wchodzącym do równania (2.2). Wartość stałej γ wynosi

$$(6.2) \quad \gamma = \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{4D_2},$$

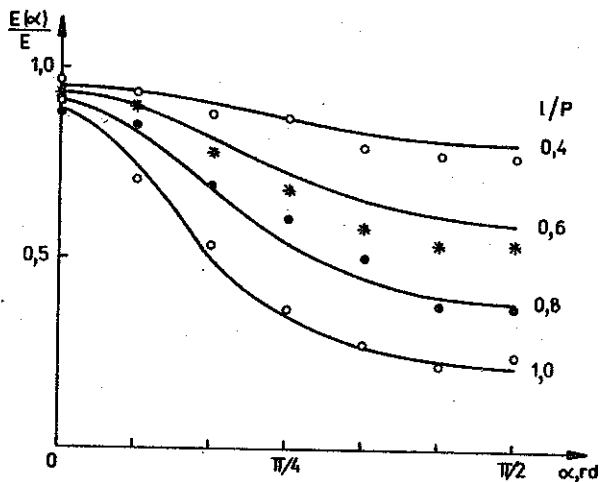
gdzie

$$E_2 = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}t}{P}}{1 - \sqrt{2}\frac{t}{P} + \frac{lt}{P^2}} E.$$

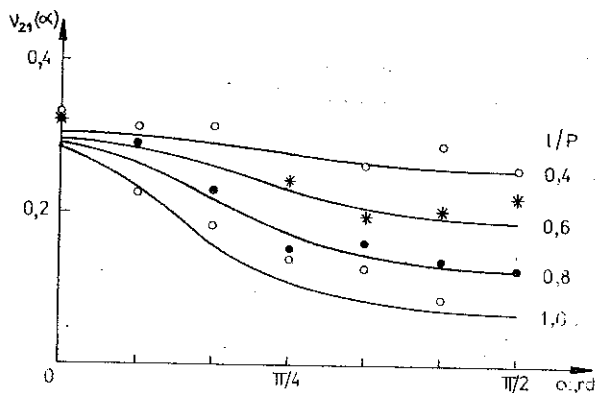
Porównanie zmierzonych doświadczalnie wartości modułów sprężystości podłużnej E_1 i E_2 oraz modułu ścinania G_{12} z wartościami obliczonymi z równań (6.1) i (6.2) pokazano dla zmieniających się długości szczelin na rys. 3. Posługując się znanymi wzorami, podanymi przez Lechnickiego [21], obliczono także wartości modułu Younga oraz współczynnika Poissona dla zmieniającego się kierunku obciążenia. Porównanie tych wartości z wynikami



Rys. 3. Zależność stałych sprężystości E_1 , E_2 i G_{12} od długości szczelin



Rys. 4. Zależność modułu sprężystości podłużnej od kierunku obciążenia



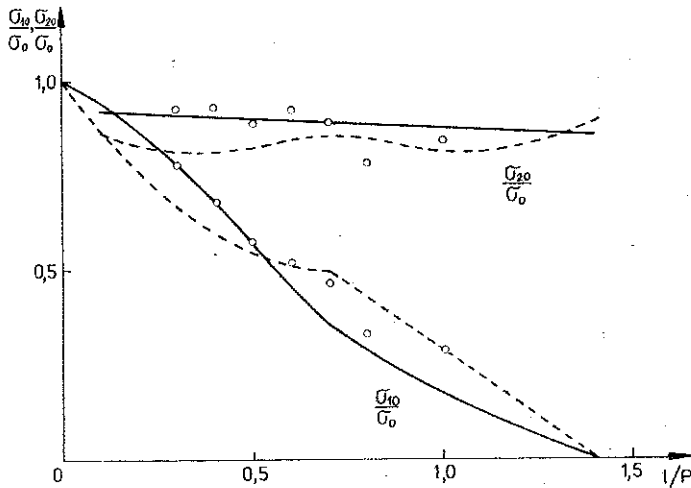
Rys. 5. Zależność współczynnika Poissona od kierunku obciążenia

doświadczeń przedstawiono dla wybranych długości szczelin na rys. 4 i 5, gdzie podobnie jak na rys. 3 linia ciągła reprezentuje wyniki teoretyczne, a punkty są wynikami pomiarów.

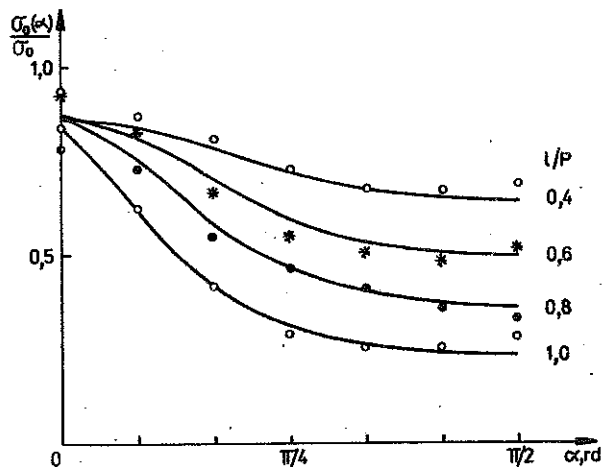
Ważnymi wynikami, które umożliwiają wykorzystanie warunku plastyczności (2.6) były równania (4.4), (4.5), (4.6) oraz (5.4), (5.5), (5.6), określające wyznaczone dwiema różnymi metodami wartości granic plastyczności σ_{10} , σ_{20} i T_0 . Porównanie tych wartości uzyskanych obu metodami z wynikami doświadczalnymi przedstawiono na rys. 6, gdzie linie ciągłe przedstawiają wartości σ_{10} i σ_{20} obliczone metodą energetyczną ze wzorów (4.4) i (4.5), natomiast linie przerywane odpowiadają wartościom obliczonym ze wzorów (5.4) i (5.5).

Ostatnim etapem było zbadanie zależności granicy plastyczności od kierunku obciążenia. W tym celu wypisując warunek plastyczności (2.6) dla osiowego rozciągania materiału pod kątem α do podłużnej osi szczelin otrzymano wzór

$$(6.3) \quad \sigma_{\alpha 0} = \left[C_1 + \frac{2}{3} C_2 + C_3 (D_1 \sin^2 \alpha + D_2 \cos^2 \alpha) \right]^{-\frac{1}{2}} \sigma_0.$$



Rys. 6. Zależność granic plastyczności σ_{10} i σ_{20} od długości szczelin



Rys. 7. Zależność granicy plastyczności od kierunku obciążenia

Występujące we wzorze (6.3) stałe C_1 , C_2 i C_3 obliczono z układu równań (3.1) podstawiając na miejsce σ_{10} , σ_{20} i T_0 średnie wartości otrzymane z dwóch omówionych w pracy metod. Porównanie wartości σ_{20} obliczonych w ten sposób z równania (6.3) z wynikami doświadczalnymi przedstawia rys. 7.

7. WNIOSKI

Sformułowane w pracy równania sprężystości i plastyczności dla materiału z regularnie rozłożonymi pęknięciami znalazły pełne potwierdzenie w wyniku przeprowadzonej weryfikacji doświadczalnej. Wniosek ten można wyciągnąć na podstawie porównania wartości stałych materiałowych obliczonych z równań (2.3) i (2.6) z pomierzonymi doświadczalnie wartościami tych stałych. Zgodność uzyskanych tą drogą wyników stanowi także potwierdzenie poprawności założeń upraszczających przyjętych przy obliczaniu granic plastyczności σ_{10} , σ_{20} i T_0 , służących do wyznaczania stałych materiałowych wchodzących do warunku plastyczności. Przeprowadzona weryfikacja doświadczalna dotyczyła także poprawności przyjętego tensora uszkodzenia. Z zamieszczonych w pracy wykresów, przedstawiających zależności stałych sprężystości i plastyczności od długości szczelin oraz od kierunku obciążenia, wynika, że przyjęty tensor uszkodzenia w pełni opisuje nie tylko obniżenie sztywności i wytrzymałości materiału, a także uwzględnia symetrię materiału, wynikającą z regularnego układu pęknięć.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. Л. САЛГАНИК, *Механика тел с большим числом трещин*, Изв. АН СССР, МТТ, 4, 149—158, 1973.
2. B. BUDIANSKY, R. J. O'CONNELL, *Elastic moduli of cracked solid*, Int. J. Solids Struct., 12, 2, 81—87, 1976.
3. A. HOENIG, *Elastic moduli of non-randomly cracked body*, Int. J. Solids Struct., 15, 2, 137—154, 1979.
4. А. А. ВАКУЛЕНКО, М. Л. КАЧАНОВ, *Континуальная теория среды с трещинами*, Изв. АН СССР, МТТ, 4, 159—166, 1971.
5. A. DRAGON, *On phenomenological description of rock-like materials with account for kinetics of brittle fracture*, Arch. Mech., 28, 1, 13—30, 1976.
6. S. MURAKAMI, N. OHNO, *A continuum theory of creep and creep damage*, in: Creep in Structures, IUTAM Symp., Leicester 1980, Ed. A. R. S. PONTER, D. R. HAYHURST, Springer, 422—443, 1981.
7. D. KRAJČINOVIC, *Constitutive equations for damaging materials*, J. Appl. Mech., 50, 2, 355—360, 1983.

8. J. BETTEN, *Damage tensors in continuum mechanics*, J. Méc. Théor. Appl., **2**, 1, 13—32, 1983.
9. D. KRAJČINOVIC, *Continuum damage mechanics*, Appl. Mech. Rev., **37**, 1, 1—6, 1984.
10. M. BASISTA, *O kontynualnych modelach uszkodzenia materiałów*, Prace IPPT, **40**, Warszawa 1984.
11. J. LEMAITRE, *How to use damage mechanics*, Nucl. Eng. Design, **80**, 233—245, 1984.
12. A. LITEWKA, A. SAWCZUK, *Experimental evaluation of the overall anisotropic material response on continuous damage*, in: Mechanics of Material Behaviour, The D. C. Drucker Anniversary Volume, Ed. G. J. DVORAK, R. T. SHIELD, Elsevier, Amsterdam, 239—252, 1984.
13. A. LITEWKA, *Effective material constants for orthotropically damaged elastic solid*, Arch. Mech., **37**, 6, 631—642, 1985.
14. A. LITEWKA, *On stiffness and strength reduction of damaged solids due to crack development*, Eng. Fract. Mech. [w druku].
15. A. J. M. SPENCER, *Theory of invariants*, in: Continuum Physics, Ed. C. ERINGEN, Academic Press, v. 1, 239—353, 1971.
16. K. Z. MARKOV, *An anisotropic yield criterion for perforated plates*, Res. Mech. Letters, **1**, 7, 315—318, 1981.
17. A. LITEWKA, E. ROGALSKA, *Yield criteria for materials with oriented structure*, Proc. 5th Nat. Congr. Theor. Appl. Mech., Warna 1985, Publ. House B.A.S., Sofia, vol. 2, 378—383, 1985.
18. A. LITEWKA, A. SAWCZUK, *Macroscopic failure modes of solids with simulated periodic damage*, Coll. Int. CNRS n° 351, Failure Criteria of Structured Media, Villard-de-Lans, 1983.
19. A. LITEWKA, J. MORZYŃSKA, *Modelowanie zniszczenia materiału z anizotropowym uszkodzeniem*, Rozpr. Inżyn., **33**, 1/2, 81—99, 1985.
20. A. LITEWKA, J. STANISŁAWSKA, *Experimental simulation of anisotropic damage*, Mech. Teor. Stos., **21**, 2/3, 361—370, 1983.
21. С. Т. ЛЕХНИЦКИЙ, *Теория упругости анизотропного тела*, Наука, Москва 1977.

РЕЗЮМЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА С ТРЕЩИНАМИ

В работе представлены теоретические и экспериментальные модели твердого тела с регулярно расположенными трещинами. Эти модели послужили для определения механических свойств материалов с дефектом в упругой и пластической области. Уравнения упругости и пластичности получается пользуясь теорию тензорных функций а вычисленные из них постоянные сравнены со значениями измеренными экспериментально.

SUMMARY

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF MECHANICAL BEHAVIOUR
FOR MATERIAL WITH CRACKS

Theoretical and experimental models of the solid with regularly distributed cracks are presented in the paper. These models were used to describe the overall mechanical properties of the damaged materials in the elastic and plastic ranges. The equations of elasticity and plasticity derived by employing the tensor function representations made it possible to determine the material constants. The numerical results obtained were compared with those measured experimentally.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT TECHNOLOGII I KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH. POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 stycznia 1987 r.
