

DYNAMICZNE ZACHOWANIE SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNYCH PŁYT PROSTOKĄTNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM ZJAWISKA OPÓŹNIENIA PLASTYCZNEGO

ADAM STOLARSKI (WARSZAWA)

Celem pracy jest analiza wpływu zjawiska opóźnienia plastycznego na proces dynamicznego odkształcania płyt prostokątnych. Zjawisko to objawia się zwiększeniem początkowej dynamicznej granicy plastyczności w porównaniu do wartości statycznej. Wykorzystano związki konstytutywne sprężysto/lepkoplastyczności P. Perzyny scałkowane z warunkiem początkowym wyznaczonym zgodnie z kryterium dynamicznego uplastycznienia J. D. Campbella. Rozwiązania szczegółowe uzyskano przy wykorzystaniu przybliżonej, analityczno-numerycznej metody kinematycznej. Przedstawiono porównania wskazujące na wpływ efektów opóźnienia plastycznego i lepkości na amplitudy przemieszczeń i charakter procesu dynamicznego odkształcania płyt.

1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest analiza procesu dynamicznego odkształcania niesprężystych płyt prostokątnych w ramach technicznej teorii płyt cienkich o małych ugięciach. Wykorzystano związki konstytutywne dla materiału sprężysto/lepkoo-idealnie plastycznego zmodyfikowane przez uwzględnienie zjawiska opóźnienia plastycznego [1]. Modyfikacja ta polega na całkowaniu równań konstytutywnych sprężysto/lepkoplastyczności P. PERZINY [2] z warunkiem początkowym przyjmowanym jako dynamiczna granica plastyczności, wyznaczona na podstawie kryterium J. D. CAMPBELLA [3].

Dla przyjętego modelu odkształceniowego, analiza procesu dynamicznego odkształcania płyt prostokątnych o przekrojach pełnościennych wymaga badania zmiennych w czasie obszarów sprężystych, przeciążenia sprężystego, aktywnego płynięcia lepkoplastycznego oraz obszarów wtórnie sprężystych uprzednio odkształcających się lepkoplastycznie. Złożoność tego procesu powoduje znaczne trudności w uzyskaniu ścisłych rozwiązań analitycznych. Pokonanie tych trudności jest możliwe przez zastosowanie metod numerycznych lub przybliżonych metod analityczno-numerycznych. Do grupy rozwiązań numerycznych należą metody opierające się na różnicowym sformułowaniu przestrzenno-czasowego problemu dynamiki konstrukcji [4 i 5] oraz metoda elementów skończonych. Metoda różnicowa została zastosowana

w pracy [6], w której przedstawiono rozwiązania dla zagadnień dynamiki sprężysto-idealnie plastycznych belek i płyt. Do grupy przybliżonych metod analityczno-numerycznych należy metoda kinematyczna, którą dla zagadnień dynamiki konstrukcji sprężysto-plastycznych przedstawił G. BAK w pracach [7 i 8]. Jest to metoda oparta na zasadzie prac wirtualnych spełnionej całkowo w obszarze płyty — dla założonych kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń w postaci szeregu o rozdzielonych zmiennych.

W niniejszej pracy wykorzystano taką metodę analizy dynamicznej. Metoda jest efektywna ze względu na jednolitość postępowania przy opisie procesu dynamicznego odkształcenia w fazach obciążenia sprężystego, sprężysto/lepkoplastycznego i odciążania oraz możliwość badania zmienności w czasie konfiguracji obszarów, w których zachodzą te procesy. Umożliwia zredukowanie problemu początkowo-brzegowego do problemu początkowego względem czasu, dla którego układ quasi-liniowych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach rozwiązuje się numerycznie.

W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania dynamicznych przemieszczeń płyt. Zasadniczym elementem tego algorytmu jest sposób wykorzystania związków konstytutywnych sprężysto/lepkoplastyczności. Rozważano przypadek płyty prostokątnej, przegubowo podpartej na obwodzie, obciążonej dynamicznie stałym w czasie nadciśnieniem. Zamieszczone wyniki analiz numerycznych dotyczą zmienności w czasie podstawowych parametrów ruchu płyty oraz ewolucji konfiguracji obszarów sprężystych i lepkoplastycznych. Przedstawiono porównania wskazujące na wpływ poszczególnych efektów materiałowych (opóźnienia plastycznego i lepkości) na amplitudy przemieszczeń i charakter procesu dynamicznego odkształcania płyt. W tym celu rozważano przypadki szczególne przyjętego modelu odkształceniowego pomijając efekt opóźnienia plastycznego (model sprężysto/lepko-idealnie plastyczny) albo lepkość materiału (model YU. N. RABOTNOVA [9]), albo obydwa te efekty jednocześnie (model sprężysto-idealnie plastyczny).

2. MODEL DYNAMICZNEGO ODKSZTAŁCENIA

W pracy wykorzystano model dynamicznego odkształcania materiału wykazującego efekty opóźnienia plastycznego i lepkości [1]. Dla płaskiego stanu naprężenia, w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x_i\}$, układ równań konstytutywnych sprężysto/lepkoplastyczności [2] jest następujący:

$$(2.1) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\lambda}{3K} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \right) + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad i, j, k = 1, 2,$$

gdzie $J_2 = \frac{1}{6} (3\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii} \sigma_{jj})$ jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$; $3K = 3\lambda + 2\mu$ — moduł ściśliwości; μ, λ — stałe Lamégo, γ oznacza współczynnik lepkości materiału.

W równaniach (2.1) statyczna funkcja uplastycznienia F dla materiału uplastyczniającego się zgodnie z warunkiem plastyczności Hubera–Misesa–Henckyego i nie wykazującego wzmocnienia ma postać

$$(2.2) \quad F = \frac{\sqrt{J_2}}{k_0} - 1,$$

gdzie k_0 oznacza granicę plastyczności materiału dla czystego ścinania.

Symbol $\langle \Phi(F) \rangle$ dla zmodyfikowanego modelu dynamicznego odkształcania [1] jest zdefiniowany następująco:

$$(2.3) \quad \langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq t_d, \\ \Phi(F) & \text{jeżeli } F > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } F \leq 0 \end{cases} \quad \text{dla } t > t_d.$$

Przyjęto nieliniową funkcję $\Phi(F)$ w postaci prawa potęgowego

$$(2.4) \quad \Phi(F) = F^\delta.$$

Czas opóźnienia plastycznego t_d określa się na podstawie kryterium dynamicznego uplastycznienia J. D. CAMPBELLA [3] w postaci zaproponowanej przez YU. N. RABOTNOVA [9] dla złożonych stanów naprężenia

$$(2.5) \quad \int_0^{t_d} \left[\frac{\sqrt{J_2(t)}}{k_0} \right]^\alpha dt = t_0,$$

gdzie α i t_0 oznaczają stałe materiałowe.

Dynamiczny warunek plastyczności ma postać

$$(2.6) \quad \sqrt{J_2} = k_0 \left[1 + \left(\frac{\sqrt{I_2^{pp}}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right],$$

gdzie $I_2^{pp} = \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij}^{pp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pp} + \dot{\varepsilon}_{ii}^{pp} \dot{\varepsilon}_{jj}^{pp})$ jest drugim niezmiennikiem tensora prędkości odkształceń lepkoplastycznych $\dot{\varepsilon}_{ij}^{pp}$.

Wprowadzając oznaczenie

$$(2.7) \quad \Delta A = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{1}{\sqrt{J_2}}$$

równania konstytutywne (2.1) można przedstawić w addytywnej formie

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^e &= \frac{1}{2\mu} \left(\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\lambda}{3K} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \right), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} &= \Delta A s_{ij}. \end{aligned}$$

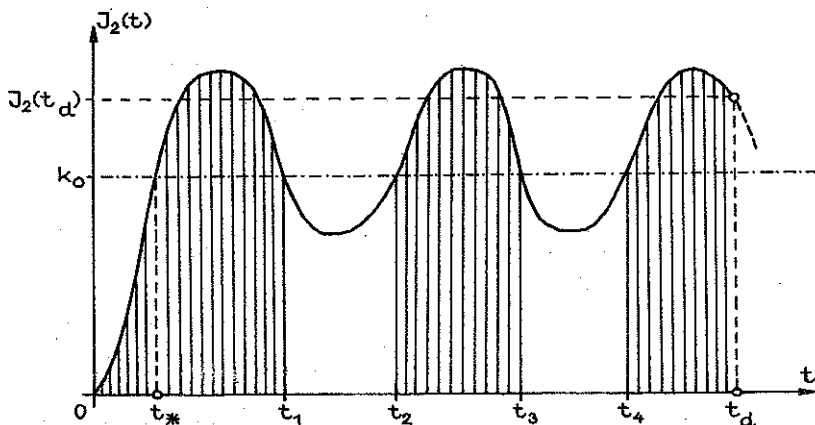
Łatwo zauważyć, że oznaczenie (2.7) odpowiada dynamicznemu warunkowi plastyczności (2.6), gdyż w związku z (2.8)₃ spełniona jest zależność $I_2^{vp} = \Delta A^2 J_2$.

Sposób wykorzystania kryterium dynamicznego uplastycznienia (2.5) w rozwiązanych zagadnieniach dynamicznego odkształcania płyt wymaga rozstrzygnięcia, które z okresów historii obciążenia sprężystego w procesach cyklicznego naprężania o amplitudach kolejno większych i mniejszych od statycznej granicy plastyczności, mają wpływ na czas opóźnienia plastycznego t_d [7]. Dla takiego przypadku na rys. 1 przedstawiono schemat obliczania całki (2.5). Wylimitowanie z historii naprężania okresów, w których stan naprężenia — poza pierwszym cyklem obciążania — nie przekracza statycznej granicy plastyczności, $J_2(t) \leq k_0^2$, ($t > t_*$), zapewnia uzyskanie według kryterium (2.5) dynamicznej powierzchni plastyczności $J_2(t_d) > k_0^2$. Uwzględniając tę interpretację, kryterium dynamicznego uplastycznienia dla procesów cyklicznego obciążania można zapisać w postaci

$$(2.9) \quad \int_0^{t_d} \left[\frac{\langle \sqrt{J_2(t)} \rangle}{k_0} \right]^n dt = t_0,$$

gdzie symbol $\langle \cdot \rangle$ oznacza

$$(2.10) \quad \langle \sqrt{J_2(t)} \rangle = \begin{cases} \sqrt{J_2(t)} & \text{dla } t \leq t_* \text{ lub } J_2(t) > k_0^2, \\ 0 & \text{dla } J_2(t) \leq k_0^2, \text{ jeżeli } t > t_*. \end{cases}$$



Rys. 1

Uwzględniając fakt, że czas dynamicznej reakcji płyty uzyskiwany w rozwiązywanych zagadnieniach jest znacznie mniejszy od stałej t_0 mającej wymiar czasu, praktycznie nie występuje problem zanikania pamięci materiału ze względu na analizowane zjawisko opóźnienia plastycznego. Również z tego względu nie jest praktycznie możliwe uzyskanie wg kryterium (2.9) stanu dynamicznego uplastycznienia materiału w pierwszym cyklu obciążania, jeżeli $J_2(t_d) \leq k_0^2$ oraz $t_d \leq t_*$ (rys. 1). Teoretycznie takie przypadki mogą wystąpić w procesach powolnego obciążania dla bardzo dużych czasów opóźnienia równych $t_d \approx (\alpha + 1)t_0$, dla których jednakże kryterium dynamicznego uplastycznienia w formie (2.5) nie powinno być stosowane.

3. METODA ROZWIĄZANIA

3.1. Równania podstawowe

W pracy zastosowano przybliżoną, analityczno-numeryczną metodę kinematyczną [7 i 8] do analizy dynamicznej płyt prostokątnych.

W przyjętym układzie współrzędnych rozważamy rodzinę kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń w postaci szeregu o rozdzielonych zmiennych

$$(3.1) \quad w(x_i, t) = \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S w_{rs}(t) F_{rs}(x_i),$$

gdzie funkcja $F_{rs}(x_i) = f_r(x_1) g_s(x_2)$ opisująca r, s -formę ruchu płyty spełnia kinematyczne warunki brzegowe, a funkcje $f_r(x_1)$ i $g_s(x_2)$ są ortogonalne w obszarze płyty $A \{x_1 [0, l_1], x_2 [0, l_2]\}$.

Wykorzystując zasadę prac wirtualnych spełnioną całkowo w obszarze płyty, otrzymujemy układ równań różniczkowych ze względu na współczynniki rozwinięcia $w_{rs}(t)$ poszukiwanego rozwiązania

$$(3.2) \quad \ddot{w}_{rs}(t) = \frac{\int_A p(x_k, t) F_{rs}(x_k) dA + \int_A M_{ij}(x_k, t) F_{rs}(x_k)_{,ij} dA}{m \int_A [F_{rs}(x_k)]^2 dA},$$

$r = 1, \dots, R, \quad s = 1, \dots, S, \quad (\text{bez sumowania po } r, s),$

gdzie momenty $M_{ij}(x_k, t)$ oznaczają funkcje wszystkich współczynników rozwinięcia $w_{rs}(t)$, $p(x_k, t)$ obciążenie dynamiczne płyty, $m = \rho l_3$ masę jednostkową, ρ gęstość materiału oraz l_3 grubość płyty.

Struktura układu równań ruchu (3.2) jest jednakowa dla wszystkich faz pracy płyty. Ze względu na nieliniowość fizyczną modelu odkształceniowego zmienne współczynniki w tym układzie równań są określane numerycznie, sposobem przedstawionym w dalszej części pracy. Jedynie w fazie sprężystej możliwe jest otrzymanie układu równań typu

$$13.3) \quad \ddot{w}_{rs}^e(t) + (\omega_{rs}^e)^2 w_{rs}^e(t) = p_{rs}(x_i, t), \quad r = 1, \dots, R, \quad s = 1, \dots, S,$$

(bez sumowania po r, s)

gdzie symbole $\omega_{rs}^e, p_{rs}(x_i, t)$ oznaczają składowe częstości sprężystych drgań własnych i obciążenia płyty.

Poza związkami fizykalnymi (2.1)—(2.8) w rozwiązaniu kinematycznym wykorzystuje się następujące zależności:

związki geometryczne

$$(3.4) \quad \varkappa_{ij} = -w_{,ij},$$

założenie o prostych normalnych do powierzchni środkowej płyty

$$(3.5) \quad \varepsilon_{ij} = x_3 \varkappa_{ij}$$

oraz całkowite definicje momentów

$$(3.6) \quad M_{ij} = 2 \int_0^{l_3/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3,$$

gdzie x_3 oznacza współrzędną punktu na wysokości przekroju poprzecznego.

3.2. Dyskretyzacja

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (3.2) opisującego fizycznie nieliniowy problem dynamiki płyt prostokątnych wygodnie jest poszukiwać odpowiednią procedurą numeryczną. Zastosowanie takiej procedury wymaga wprowadzenia dyskretyzacji problemu.

Dyskretyzacja względem czasu jest konieczna ze względu na numeryczne całkowanie układu równań ruchu (3.2). Wykorzystano bezpośrednią metodę różnicową względem czasu, aproksymując rozwiązanie dla współczynników rozwinięcia $w_{rs}(t)$ — w kolejnych chwilach czasowych $t_{n-1} = t_n - \Delta t, t_n = n \Delta t, t_{n+1} = t_n + \Delta t$ — schematem różnic centralnych

$$(3.7) \quad w_{rs}^{n+1} = 2w_{rs}^n - w_{rs}^{n-1} + \Delta t^2 \ddot{w}_{rs}^n$$

z warunkami początkowymi dla $t_n = 0$

$$(3.8) \quad w_{rs}^0, \dot{w}_{rs}^0, w_{rs}^{-1} = w_{rs}^0 - \Delta t \dot{w}_{rs}^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{w}_{rs}^0.$$

Krok czasowy Δt wyznaczono na podstawie analizy stabilności przyjętej metody całkowania numerycznego dla quasi-liniowego równania różniczkowego (3.2) [10]. Oszacowanie stałego kroku czasowego jest identyczne do analogicznego rozwiązania sprężystego [11 i 12]

$$(3.9) \quad \Delta t \leq \Delta t_{kr} = \frac{2}{\omega_{RS}^e},$$

gdzie ω_{RS}^e oznacza największą częstość sprężystych drgań własnych płyty wg przyjętych form ruchu $F_{rs}(x_i)$.

Dyskretyzacja objętości płyty jest wymagana zasadniczo ze względu na sposób wykorzystania związków fizykalnych. Wprowadzono podział powierzchni środkowej siatką prostokątną o węzłach x_{ik} oraz podział pełnościennego przekroju poprzecznego na warstwy o węzłach x_{i3} ($i_\alpha = 1, 2, \dots, I_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$). Zastosowana dyskretyzacja objętości płyty nie rzutuje na wybór kroku czasowego. Spełnia rolę pomocniczą przy numerycznym wyznaczaniu zmiennych współczynników w równaniach ruchu (3.2). Umożliwia wyznaczanie granic i śledzenie ewolucji zmiennych w czasie i objętości płyty konfiguracji obszarów, w których realizują się procesy fizycznie liniowego i nieliniowego odkształcania.

3.3. Ogólny algorytm rozwiązania

Układ równań podstawowych rozwiązano według przedstawionego algorytmu.

Przyjmując, że w chwili t_n oraz w chwilach poprzednich są znane przemieszczenia określone przez rozwiązanie (3.1), wyznaczenie przemieszczeń w chwili następnej $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ przebiega zgodnie z następującym tokiem postępowania:

1. Dla znanych przemieszczeń określamy krzywizny powierzchni środkowej (3.4) w każdym węźle x_{ik} siatki podziału, $\kappa_{ij}^n(x_{ik})$.

2. Wykorzystując założenie o prostych normalnych (3.5), wyznaczamy odkształcenia w każdej warstwie x_{i3} przekroju poprzecznego węzła x_{ik} , $\varepsilon_{ij}^n(x_{ik})$.

3. Wyznaczamy przyrosty odkształceń całkowitych w warstwach przekroju poprzecznego $\Delta\varepsilon_{ij}^n(x_{i\alpha}) = \varepsilon_{ij}^n - \varepsilon_{ij}^{n-1}$.

4. Dla znanego procesu wymuszania odkształceń $\Delta\varepsilon_{ij}^n$ wyznaczamy naprężenia w poszczególnych warstwach przekroju, $\sigma_{ij}^n(x_{i\alpha})$.

5. Na podstawie definicji całkowitych (3.6) wyznaczamy siły wewnętrzne w węzłach x_{ik} siatki podziału przy założeniu, że naprężenia są stałe na grubości warstw, $M_{ij}^n(x_{ik})$.

6. Wyznaczamy numerycznie współczynniki układu równań ruchu (3.2).

7. Na podstawie (3.7) określamy współczynniki rozwinięcia w_{rs}^{n+1} poszukiwanego rozwiązania (3.1) w chwili t_{n+1} .

Przytoczoną procedurę powtarza się dla następnych chwil czasowych odległych od siebie o stały krok Δt .

Podstawowym elementem tej procedury jest sposób wyznaczania naprężeń dla przyjętego modelu dynamicznego odkształcania.

3.4. Sposób wyznaczania naprężeń

Traktując przyrosty odkształcenia $\Delta \varepsilon_{ij}^n(x_{i_0})$ jako znane, naprężenia w warstwach przekroju poprzecznego $\sigma_{ij}^n(x_{i_0})$ wyznaczamy jak niżej.

1. Przyjmujemy wstępnie, że przyrosty odkształceń całkowitych realizują się jako sprężyste $\Delta \varepsilon_{ij}^{en} \equiv \Delta \varepsilon_{ij}^n$ i wyznaczamy przyrosty naprężeń na podstawie (2.8)₂

$$(3.10) \quad \Delta \sigma_{ij}^n = 2\mu \left(\Delta \varepsilon_{ij}^{en} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \Delta \varepsilon_{kk}^{en} \delta_{ij} \right).$$

2. Określamy naprężenia próbne

$$(3.11) \quad \sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + \Delta \sigma_{ij}^n.$$

3. Badanie wartości statycznej funkcji uplastycznienia (2.2) oraz badanie spełnienia kryterium (2.9) umożliwia rozstrzygnięcie, w jakim chwilowym stanie naprężenia znajduje się określony węzeł płyty:

- A) jeżeli $F(\sigma_{ij}^n) \leq 0$ i $t_n < t_d$, to mamy stan sprężysty;
- B) jeżeli $F(\sigma_{ij}^n) > 0$ i $t_n \leq t_d$, to mamy stan przeciążenia sprężystego;
- C) jeżeli $F(\sigma_{ij}^n) > 0$ i $t_n > t_d$, to mamy stan płynięcia lepkoplastycznego;
- D) jeżeli $F(\sigma_{ij}^n) \leq 0$ i $t_n > t_d$, to mamy stan wtórnie sprężysty.

4. Stany naprężenia w przypadkach A, B i D określone są bezpośrednio przez naprężenia (3.11).

5. Stan naprężenia w przypadku C wynika z podziału przyrostu odkształceń całkowitych $\Delta \varepsilon_{ij}^n$ na część lepkoplastyczną i sprężystą

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij}^{ppn} &= \Delta \Lambda^n s_{ij}^n, \\ \Delta \varepsilon_{ij}^{en} &= \Delta \varepsilon_{ij}^n - \Delta \varepsilon_{ij}^{ppn}. \end{aligned}$$

Zakłada się, że sposób realizacji tego podziału jest następujący:

a) wektor części sprężystej przyrostu odkształcenia $\Delta \varepsilon_{ij}^{en}$ określa zmianę $\Delta \sigma_{ij}^n$ poprzedniego stanu naprężenia σ_{ij}^{n-1} ;

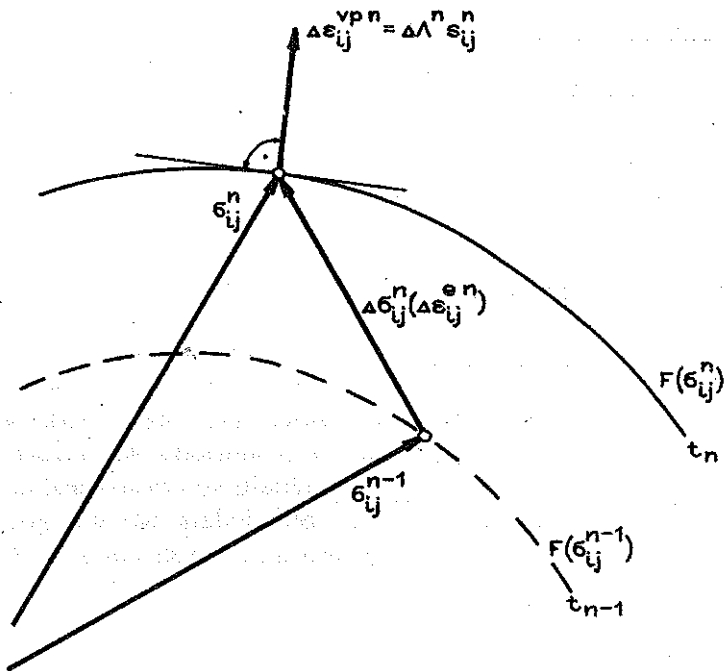
b) wektor części lepkoplastycznej przyrostu odkształcenia $\Delta \varepsilon_{ij}^{ppn}$ jest normalny do chwilowej dynamicznej powierzchni plastyczności (2.6) w punkcie poszukiwanego stanu naprężenia, rys. 2.

Po wykorzystaniu (3.10) i (3.11) otrzymujemy składowe stanu naprężenia:

$$(3.13) \quad \sigma_{ij}^n = \frac{2\mu}{1 + \Delta m^n} \left\{ \frac{\sigma_{ij}^{n-1}}{2\mu} + \Delta \varepsilon_{ij}^n + \frac{1}{\lambda + 2\mu + K \Delta m^n} \left[(\lambda + K \Delta m^n) \Delta \varepsilon_{kk}^n + \frac{\Delta m^n}{3} \sigma_{kk}^{n-1} \right] \delta_{ij} \right\},$$

gdzie $\Delta m^n = 2\lambda \Delta \Lambda^n$.

6. Podstawiając składowe (3.13) do równania chwilowej dynamicznej powierzchni plastyczności (2.6) otrzymujemy nieliniowe równanie algebraiczne



Rys. 2

ze względu na skalarny mnożnik $\Delta \lambda^n$. Rozwiązanie tego równania otrzymuje się numerycznie stosując np. metodę Newtona. Rozwiązanie numeryczne jest dobrze uwarunkowane — istnieje tylko jeden rzeczywisty pierwiastek $\Delta \lambda^n > 0$, który jednoznacznie określa poszukiwany stan naprężenia.

Zasadniczym elementem przedstawionej procedury wyznaczania naprężeń jest sposób wykorzystania związków konstytutywnych sprężysto/lepkoplastyczności. W celu odwrócenia tych związków zastosowano niejawną metodę wyznaczania stanu naprężenia, która charakteryzuje się rozwiązaniem równań konstytutywnych w punkcie poszukiwanego stanu naprężenia. Zaproponowana metoda różni się od jawnego sposobu wyznaczania naprężeń stosowanego w konsekwentnej dla przestrzeni i czasu metodzie różnicowej [4], a także od sposobu przyrostowo-iteracyjnego stosowanego w metodzie elementów skończonych [13].

Przedstawiona procedura wyznaczania stanu naprężenia dla przyjętego modelu dynamicznego odkształcania jest ogólna. Przez odpowiednie redukcje może być zastosowana do określania stanu naprężenia dla następujących przypadków:

1. Dla dynamicznego modelu P. PERZYNY [2] dla materiału sprężysto/lepkoplastycznie plastycznego, jeżeli w zaproponowanym algorytmie pominąć sprawdzanie kryterium J. D. Campbella (2.9), co jest równoznaczne z pominięciem przypadku B stanu naprężenia.

2. Dla przybliżonego modelu YU. N. RABOTNOVA [9] dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego z uwzględnieniem zjawiska opóźnienia plastycznego, jeżeli w przedstawionym algorytmie wykorzystać statyczny warunek plastyczności

$$(3.14) \quad F = \frac{\sqrt{J_2}}{k_0} - 1 = 0$$

zamiast dynamicznego (2.6). W tym przypadku należy dodatkowo wyznaczyć warunki początkowe dla płynięcia plastycznego w chwili dynamicznego uplastycznienia t_d^+ , czyli określić współrzędne punktu na statycznej powierzchni plastyczności (3.14). Wynikają one z podziału wektora całkowitych odkształceń osiągniętych w chwili t_d na części sprężystą i plastyczną. Rozwiązanie tego problemu początkowego przedstawiono w pracach [7 i 8].

3. Dla modelu Prandtla-Reussa dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego, rozważanego w pracach [7 i 8], jeżeli dodatkowo w algorytmie dla modelu Yu. N. Rabotnova pominąć sprawdzanie kryterium J. D. Campbella (2.9).

4. ANALIZA PŁYTY PRZEGUBOWO PODPARTEJ

Rozwiązanie szczegółowe dla płyty przegubowo podpartej zbudowano opierając się na przyjętej rodzinie kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń (3.1) w postaci rozwinięcia według funkcji własnych problemu sprężystego.

$$(4.1) \quad F_{rs}(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{\pi r}{l_1} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi s}{l_2} x_2\right).$$

Analizę numeryczną przeprowadzono dla płyty o wymiarach

$$l_1 \times l_2 \times l_3 = 1,20 \text{ m} \times 0,80 \text{ m} \times 0,04 \text{ m}.$$

Płyta wykonana jest ze stali St3SY, charakteryzującej się następującymi stałymi materiałowymi: granica plastyczności $\sigma_0 = 250 \text{ MPa}$, moduł sprężystości $E = 210000 \text{ MPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, masa właściwa $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, współczynnik lepkości $\gamma = 40,4 \text{ s}^{-1}$, wykładnik potęgowy funkcji $\Phi(F)$ (2.4) $\delta = 5$ oraz stałe kryterium J. D. Campbella (2.5) $\alpha = 14,6$; $t_0 = 0,641 \text{ s}$ [1].

Rozważano stałe w czasie, równomiernie rozłożone dynamicznie obciążenie nadciśnieniem o intensywności $p(x_k, t) = p = 0,8 p_{0c} = \text{const}$, gdzie p_{0c} oznacza kinematyczne oszacowanie statycznej nośności granicznej płyty [14].

Wprowadzono przestrzenny podział objętości płyty siatką o oczkach

$$\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3 = \frac{l_1}{20} \times \frac{l_2}{20} \times \frac{l_3}{10}.$$

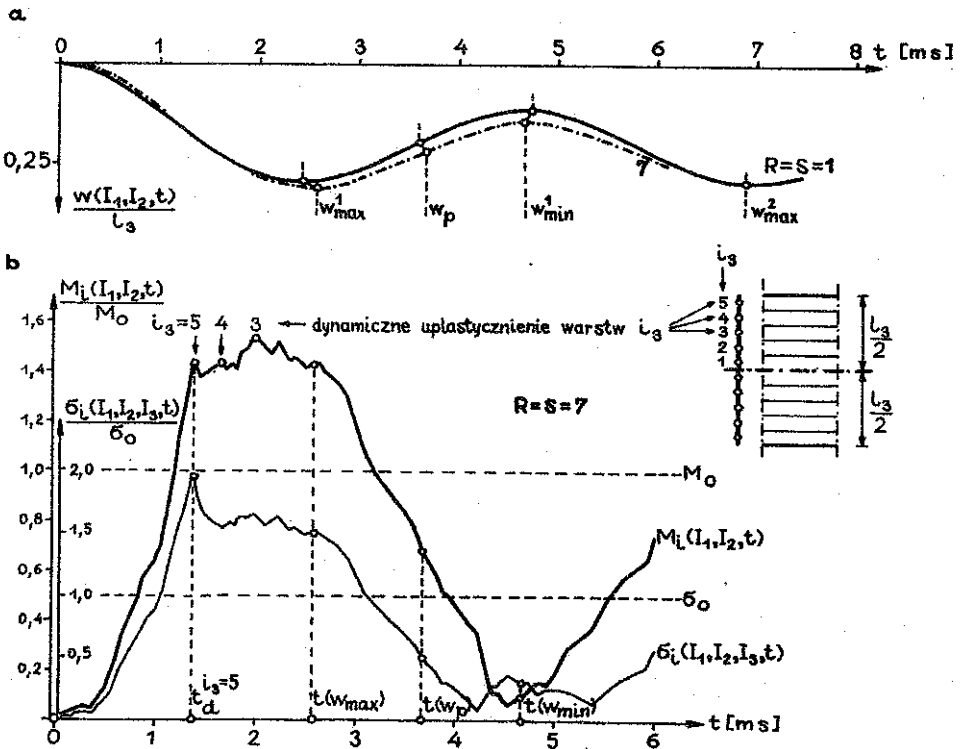
Stały krok czasowy, z którym prowadzone są obliczenia numeryczne wyznaczono wg (3.9) dla częstości drgań własnych płyty określającej rozwiązanie sprężyste (3.3)

$$(4.2) \quad \omega_{rs}^e = \pi^2 \left[\left(\frac{r}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{s}{l_2} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m}},$$

gdzie D oznacza sztywność zgięciową płyty.

Poniżej przedstawiono najbardziej charakterystyczne wyniki analizy numerycznej otrzymane dla różnych modeli dynamicznego odkształcania.

Dla analizowanej płyty, której proces dynamicznego odkształcania opisuje zmodyfikowany model materiału sprężysto/lepko-idealnie plastycznego z uwzględnieniem zjawiska opóźnienia plastycznego — pierwszy z przedstawionych wyników dotyczy zmienności w czasie ugięcia punktu środkowego (I_1, I_2) płyty dla rozwiązania stacjonarnego $R = S = 1$ oraz niestacjonarnego $R = S = 7$ (rys. 3a). Wyniki dla rozwiązań pośrednich $R = S = 3,5$ zawierają się pomiędzy podanymi wynikami. Zwraca uwagę fakt bardzo małych różnic amplitud przemieszczeń otrzymanych dla tych rozwiązań, co wskazuje na bardzo silny wpływ tłumienia wyższych częstości drgań przez uwzględnienie



Rys. 3

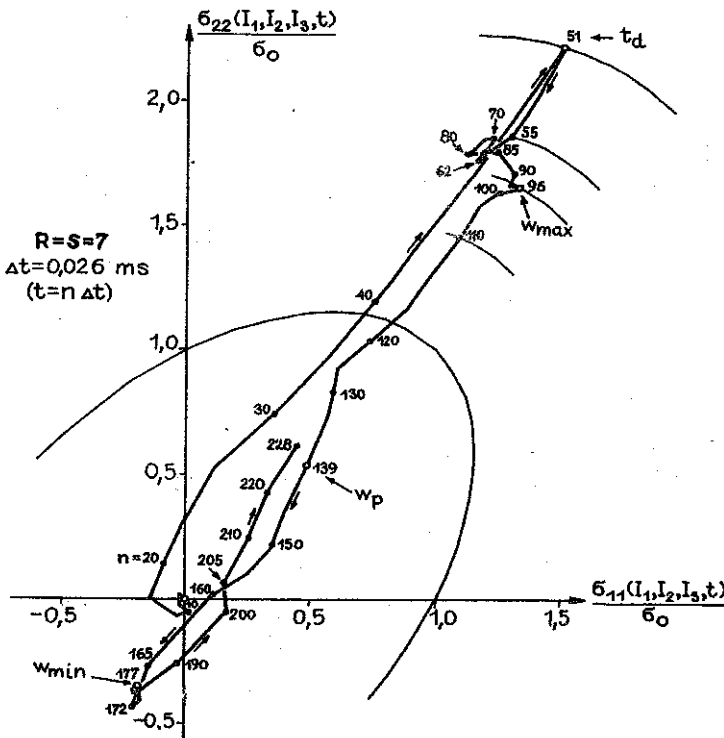
lepkości. Na tym samym rysunku przedstawiono, dla rozwiązania $R = S = 7$, zmienność w czasie intensywności naprężeń

$$(4.3) \quad \sigma_i = \sqrt{3J_2}$$

w zewnętrznej warstwie I_3 punktu środkowego (I_1, I_2) oraz intensywności momentów

$$(4.4) \quad M_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3M_{ij} M_{ij} - M_{ii} M_{jj}}$$

w punkcie środkowym płyty (rys. 3b). Na wykresie zmiany intensywności naprężeń oznaczono chwilę dynamicznego uplastycznienia warstwy zewnętrznej. Górna dynamiczna granica plastyczności jest około dwukrotnie większa od wartości statycznej. Po dynamicznym uplastycznieniu intensywność naprężeń stabilizuje się na poziomie w przybliżeniu 60% większym od wartości statycznej granicy plastyczności σ_0 . Na wykresie zmiany intensywności momentów oznaczono chwile dynamicznego uplastycznienia kolejnych warstw przekroju poprzecznego. Maksymalne wartości dynamiczne przekraczają w przybliżeniu o 55% statyczny moment graniczny przekroju M_0 .

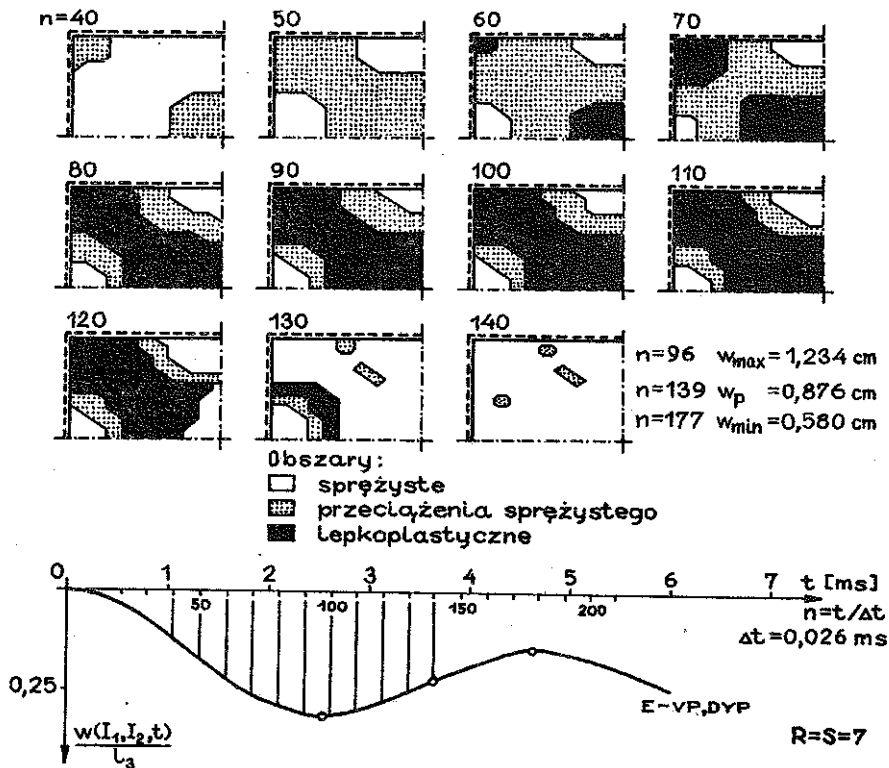


Rys. 4

Na rys. 4 przedstawiono na płyszczyźnie $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ historię zmian naprężeń w zewnętrznej warstwie I_3 punktu środkowego (I_1, I_2), w kolejnych krokach czasowych $n = t/\Delta t$. Krok czasowy $n = 51$ odpowiada chwili dynamicznego uplastycznienia warstwy, krok $n = 96$ odpowiada maksymalnemu ugięciu dynamicznemu, a krok $n = 177$ — minimalnemu ugięciu punktu środkowego płyty.

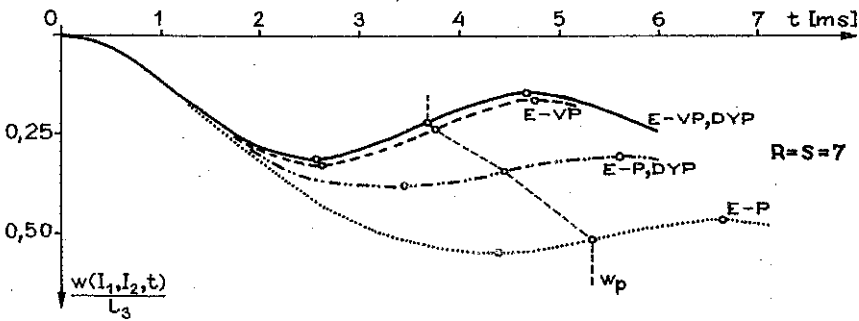
Rys. 5 przedstawia dla $1/4$ pola powierzchni płyty zmianę w czasie obszarów sprężystych, przeciążenia sprężystego oraz lepkoplastycznych w zewnętrznej warstwie płyty. Zwraca uwagę fakt prawie jednoczesnego uplastycznienia strefy narożnej i strefy środkowej, co świadczy o dużym wpływie momentu skręcającego na uplastycznienie strefy naroża. Obserwuje się, że obszary uplastycznione nie zanikają po osiągnięciu maksymalnych przemieszczeń punktu środkowego.

W pracy dokonano porównania z wynikami uzyskanymi dla płyty sprężysto/lepko-idealnie plastycznej bez uwzględnienia zjawiska opóźnienia plastycznego (model P. Perzyny) oraz dla płyt sprężysto-idealnie plastycznych z uwzględnieniem (model Yu. N. Rabotnova) i bez uwzględnienia zjawiska opóźnienia plastycznego (model statyczny).



Rys. 5

Ocenę wpływu poszczególnych efektów materiałowych (opóźnienia plastycznego i lepkości) na amplitudy przemieszczeń zamieszczono na rys. 6. Na rysunku tym przedstawiono zmienność w czasie amplitud przemieszczeń punktu środkowego płyty uzyskanych na podstawie rozwiązań niestacjonarnych $R = S = 7$ dla różnych modeli płyty: 1) sprężysto/lepko-idealnie plastycznego (oznaczenie E -VP, DYP), 2) sprężysto/lepko-idealnie plastycznego (E -VP), 3) sprężysto-idealnie plastycznego z uwzględnieniem zjawiska opóźnienia plastycznego (E -P, DYP) oraz 4) sprężysto-idealnie plastycznego (E -P). Na rysunku znajdują potwierdzenie przewidywane w [1] ilościowe skutki wpływu uwzględnienia zjawiska opóźnienia plastycznego na wartości przemieszczeń płyty. Przyjmując, że dla rozważanego przypadku obciążenia $p/p_{0c} = 0,8$ amplituda przemieszczeń trwałych płyty (E -VP, DYP) wynosi 1,00 to odpowiednie amplitudy dla pozostałych płyt są następujące: 1) dla płyty (E -VP) — 1,06, 2) dla płyty (E -P, DYP) — 1,57 oraz 3) dla płyty (E -P) — 2,35.

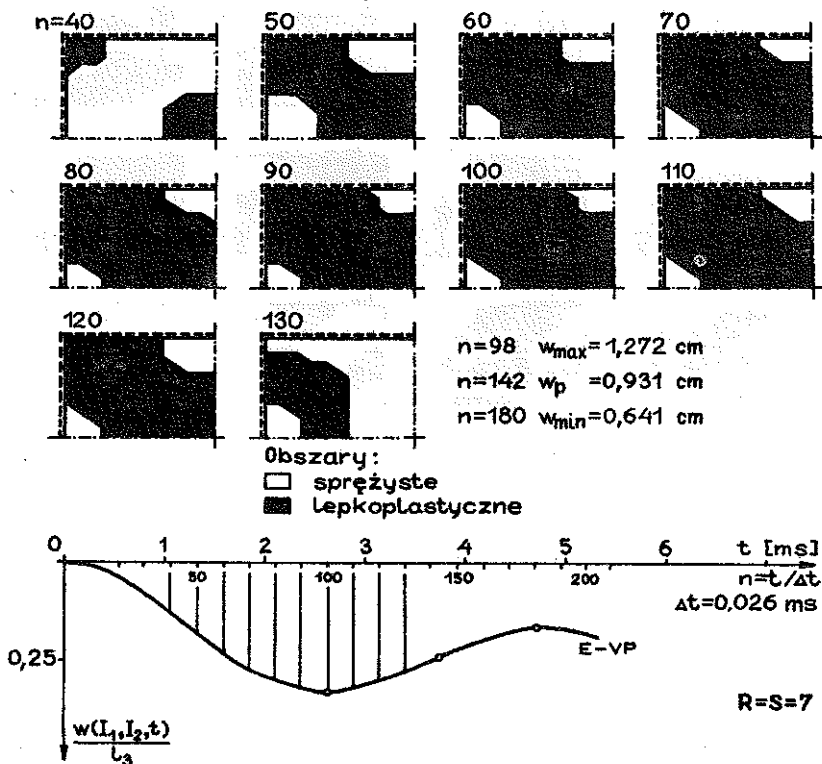


Rys. 6

W pracy uznano przemieszczenia trwałe punktu środkowego jako odpowiadające poziomowi maksymalnych prędkości przemieszczeń tego punktu dla drgań ustalonych (tj. po osiągnięciu pierwszej maksymalnej amplitudy przemieszczeń).

Przeprowadzone doświadczenia numeryczne dla różnych wartości obciążeń p/p_{0c} działających na analizowaną płytę wskazują, że jest możliwe wystąpienie większych różnic pomiędzy przemieszczeniami trwałymi dla rozwiązań (E -VP, DYP) i (E -VP). Przykładowo dla obciążenia $p/p_{0c} = 0,5$ różnica ta wynosi około 10%. Natomiast dla obciążenia $p/p_{0c} = 0,4$ następuje jakościowa zmiana charakteru pracy płyty; dla rozwiązań (E -VP, DYP) i (E -P, DYP) obserwuje się tylko sprężystą pracę płyty w całym zakresie trwania procesu dynamicznego odkształcania, podczas gdy dla rozwiązań nie uwzględniających opóźnienia plastycznego (E -VP) i (E -P) występują obszary uplastycznione.

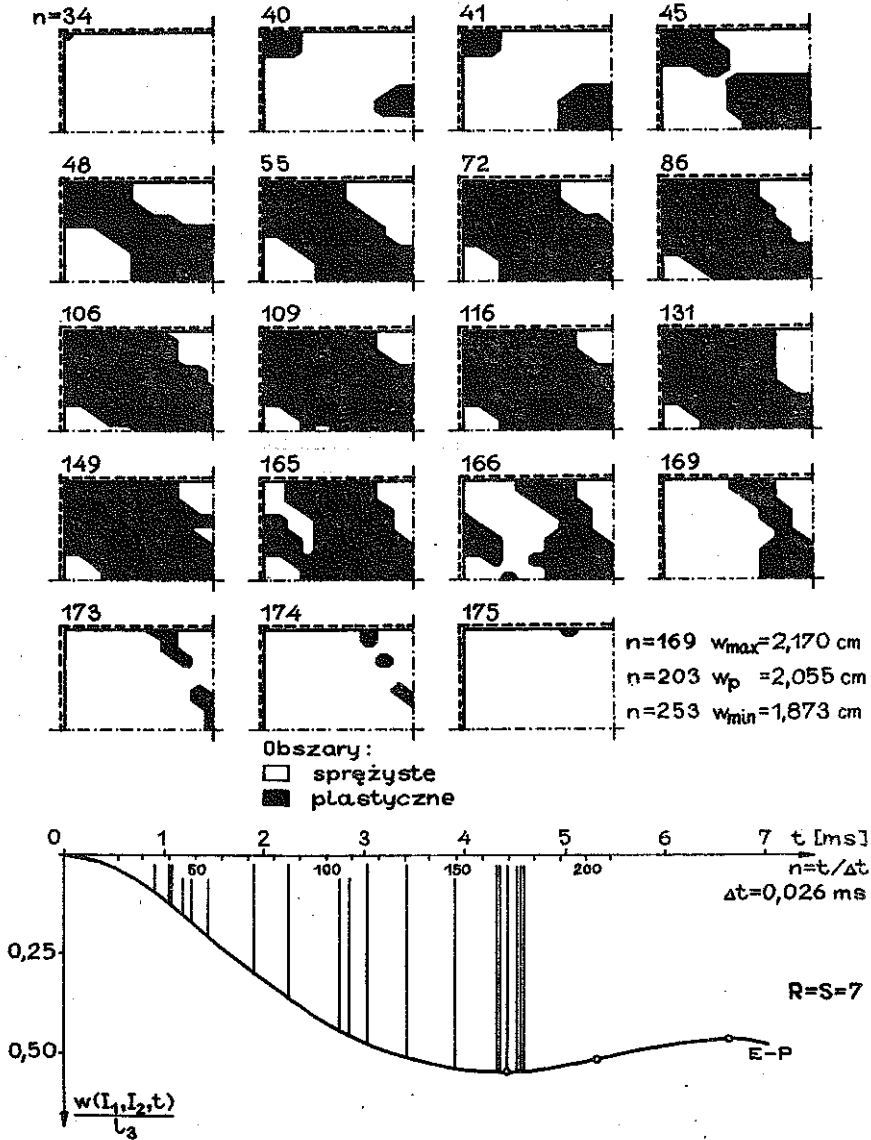
Na rys. 7 przedstawiono zmianę w czasie konfiguracji obszarów sprężystych i lepkoplastycznych w zewnętrznej warstwie płyty sprężysto/lepkoplastycznej — bez uwzględnienia zjawiska opóźnienia plastycznego. W tym przypadku obszary lepkoplastyczne zajmują znacznie większą powierzchnię, w porównaniu do wyników wg rys. 5.



Rys. 7

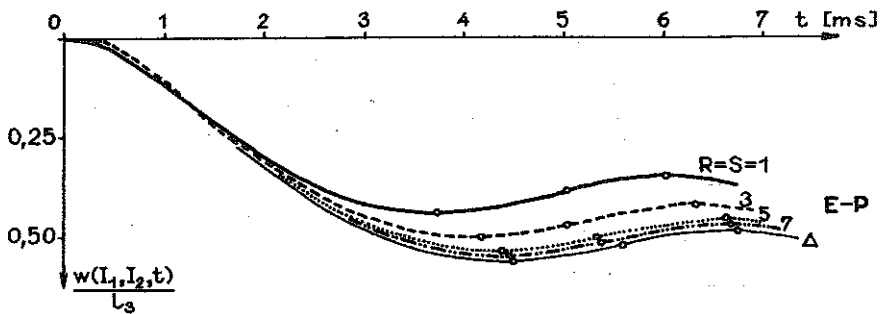
Dla porównania na rys. 8 przedstawiono zmianę w czasie konfiguracji obszarów sprężystych i plastycznych w zewnętrznej warstwie płyty sprężysto-idealnie plastycznej. W tym przypadku uplastycznienie warstwy zewnętrznej rozpoczyna się od naroża. Strefy plastyczne rozwijają się niemonotonicznie. Obserwuje się, że w niektórych punktach płyty występują lokalne odciążenia spowodowane niestacjonarnością pola prędkości założonego rozwiązania. Maksymalny zasięg stref plastycznych jest podobny do występującego w płycie sprężysto/lepkoplastycznej (rys. 7), ale obszary uplastycznione zanikają po osiągnięciu maksymalnych przemieszczeń punktu środkowego.

Na rys. 9 przedstawiono zmienność w czasie ugięć punktu środkowego płyty sprężysto-plastycznej dla rozwiązań $R = S = 1, 3, 5, 7$, tj. z 1, 4, 9 i-16 wyrazami szeregu (3.1). Na rysunku tym zamieszczono także wynik (oznaczenie Δ) uzyskany metodą różnic skończonych, konsekwentną dla przestrze-



Rys. 8

ni i czasu [4 i 5], przy identycznym podziale przestrzennym płyty. Charakterystyczna jest zbieżność rozwiązań. W miarę zwiększania liczby wyrazów szeregu: 1) zmniejszają się różnice pomiędzy poszczególnymi rozwiązaniami oraz 2) rozwiązania dążą do wyniku uzyskanego metodą różnicową. Dalsze zwiększanie liczby wyrazów szeregu nie powoduje istotnych zmian ilościowych i nie jest efektywne z uwagi na znaczne wydłużenie czasu liczenia. Zwraca uwagę fakt znacznego wpływu niestacjonarnych form ruchu płyty



Rys. 9

na ugięcia. W przypadku płyty sprężysto-plastycznej różnica przemieszczeń maksymalnych pomiędzy rozwiązaniem stacjonarnym $R = S = 1$ a niestacjonarnym $R = S = 7$ wynosi około 24% i jest około 8 razy większa niż w przypadku rozwiązań dla płyt sprężysto/lepkoplastycznych.

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono rozwiązanie dla dynamicznie obciążonych płyt prostokątnych ze szczególnym uwzględnieniem problemu nieliniowości fizycznej właściwej dla materiału charakteryzującego się występowaniem efektów opóźnienia i lepkości. Rozwiązania uzyskano przy wykorzystaniu przybliżonej, analityczno-numerycznej metody kinematycznej [7 i 8]. Rezultaty rozwiązań wskazują, że stosowany algorytm pozwala na efektywną analizę procesu dynamicznego odkształcania płyt. Wykorzystanie zmodyfikowanego modelu dynamicznego odkształcania [1] powoduje zmiany jakościowe w przebiegu procesu odkształcania, w porównaniu z innymi modelami fizycznymi oraz ma wpływ na efektywność analizy numerycznej. Uwzględnienie zjawiska opóźnienia plastycznego powoduje bowiem wydłużenie czasu trwania sprężystej reakcji materiału oraz znaczne zmniejszenie objętości obszarów uplastycznionych, w których realizują się nieliniowe procesy odkształcania. Te jakościowe różnice prowadzą do pewnych zmian ilościowych rzutujących na zmniejszenie amplitud przemieszczeń płyt. Wniosek ten dotyczy szczególnie elementów typowych dla konstrukcji budowlanych, poddanych oddziaływaniu tzw. małych obciążeń dynamicznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. BAK, A. STOLARSKI, *Delayed yield effect in dynamic flow of elastic/viscoplastic material*, Arch. Mech., 37, 4—5, 285—302, 1985.
2. P. PERZYNA, *The constitutive equation for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., 20, 321—332, 1963.

3. J. D. CAMPBELL, *The dynamic yielding of mild steel*, Acta Metallurgica, 1, 706—710, 1953.
4. J. W. LEECH, E. A. WITMER, T. H. H. PIAN, *Numerical calculation technique for large elastic-plastic transient deformations of thin shells*, AIAA J., 6, 12, 2352—2359, 1968.
5. E. A. WITMER, H. A. BALMER, J. W. LEECH, T. H. H. PIAN, *Large dynamic deformations of beams, rings, plates and shells*, AIAA J., 1, 8, 1848—1857, 1968.
6. G. BAK, B. KOPYŚCIŃSKI, A. STAŃCZYK, A. STOLARSKI, *Analiza numeryczna dynamicznie obciążonych belek i płyt sprężysto-plastycznych metodą różnic skończonych*, Biul. WAT, 6, 394, 101—120, 1985.
7. G. BAK, *Metoda kinematyczna w zagadnieniach dynamiki konstrukcji sprężysto-plastycznych*, Dodatek do Biul. WAT, 7, 347, 1981.
8. G. BAK, *Metoda analityczno-numeryczna dla zagadnień dynamiki belek i płyt sprężysto-plastycznych*, Arch. Inż. Łąd., 32, 1, 51—62, 1986.
9. YU. N. RABOTNOV, *Model of an elastic-plastic body with delayed yielding* [in Russian], PMTF, 3, 45—54, 1968.
10. K. C. PARK, *An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations*, J. Appl. Mech., 42E, 2, 464—470, 1975.
11. J. W. LEECH, *Stability of a finite-difference equations for the transient response of a flat plate*, AIAA J., 3, 9, 1772—1773, 1965.
12. J. W. LEECH, P. T. HSU, E. W. MACK, *Stability of a finite-difference method for solving matrix equations*, AIAA J., 3, 11, 2172—2173, 1965.
13. M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa 1985.
14. D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt prostokątnych*, Arkady, Warszawa 1962.

РЕЗЮМЕ

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ
С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ТЕКУЧЕСТИ**

Целью работы является анализ влияния явления запаздывания текучести на процесс динамического деформирования прямоугольных плит. Это явление проявляется увеличением начального динамического предела пластичности по сравнению со статическим значением. Используются определяющие соотношения упруго-вязкопластичности П. Пэжина, проинтегрированные с начальным условием, определенным согласно критерию динамической текучести Дж. Д. Кэмпбелла. Подробные решения получены при использовании приближенного, аналитически-численного кинематического метода. Представлены сравнения, указывающие на влияние эффектов запаздывания текучести и вязкости на амплитуду перемещений и характер процесса динамического деформирования плит.

SUMMARY

**DYNAMIC RESPONSE OF ELASTIC/VISCOPLASTIC
RECTANGULAR PLATES INCLUDING THE DELAYED YIELD PHENOMENON**

The purpose of the paper is to analyze the influence of the delayed yield phenomenon on the dynamic strain process of the rectangular plates. The phenomenon is manifested by the increase of the initial dynamic yield stress in comparison with the static value.

Constitutive P. Perzyna's elastic/viscoplastic relationships was integrated with the initial condition determined according to the J. D. Campbell's criterion of dynamic yielding. Detailed solutions were obtained by using the approximate analytical-numerical kinematical method. Comparisons were carried out to indicate the influence delayed yielding and viscosity effects on the amplitude of the displacement and on the character of the dynamic strain process of the plates.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1986 r.
