

PROBLEM CAŁKOWITEGO UPLASTYCZNIENIA CYLINDRÓW KOŁOWYCH O NIESYMETRYCZNEJ NIEJEDNORODNOŚCI

ZDZISŁAWA KORDAS i ADAM WRÓBLEWSKI (KRAKÓW)

Praca rozszerza problematykę całkowitego uplastycznienia elementów konstrukcyjnych w stadium zniszczenia na materiały plastyczne niejednorodne, w szczególności poszukuje się w niej takiej niesymetrycznej niejednorodności materiału, która umożliwi całkowite uplastycznienie przy wyczerpaniu nośności granicznej kołowych cylindrów grubościennych pod działaniem ciśnienia wewnętrznego. Problem rozważono w dwóch ujęciach, mianowicie przy założeniu funkcji naprężeń określano zmienną granicę plastyczności materiału, tak by warunek plastyczności był spełniony w każdym punkcie cylindra. W drugim ujęciu, zakładając granicę plastyczności nie wykazującą kołowej symetrii, podano warunki całkowite, określające klasę funkcji, przy których możliwe jest uzyskanie rozwiązania postawionego problemu.

1. WSTĘP

Konstrukcje idealnie sprężysto-plastyczne stosunkowo rzadko podlegają całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia, odpowiadającemu wyczerpaniu nośności granicznej. Przypadek taki ma miejsce np. przy kołowej symetrii jednocześnie kształtu, obciążenia, ewentualnej niejednorodności plastycznej itp. (cylindry grubościenne i tarcze kołowo-symetryczne). Odstępstwa od kołowej symetrii powodują z reguły pozostawienie pewnych stref sprężystych (lub sztywnych zależnie od przyjętej schematyzacji wykresu rozciągania) w stanie granicznym.

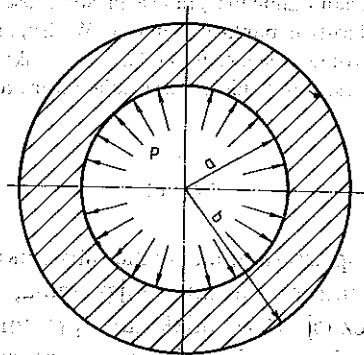
Istnienie takich stref w stanie granicznym oznacza z reguły niewłaściwe zaprojektowanie konstrukcji. W stanie granicznym, w konstrukcji zaprojektowanej optymalnie powinien ulec uplastycznieniu bądź cały jej obszar, bądź też mowliwie wielki podobzszar (D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD [1], A. ZAVELANI-ROSSI [2]). Stąd też, badanie kształtów podlegających całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia ma bezpośredni związek z optymalnym kształtowaniem konstrukcji (Z. KORDAS [3]).

Problem całkowitego uplastycznienia w stadium zniszczenia niekołowych cylindrów grubościennych jednorodnych badali Z. KORDAS i M. ŻYCZKOWSKI [4], natomiast niejednorodnych A. DOLLAR [5]. Z. KORDAS i W. SKRABA [6] uwzględnili dodatkowo wpływ jednoczesnego zginania.

Obecna praca stawia sobie za cel tylko analizę niesymetrycznych niejednorodności materiału, umożliwiających całkowite uplastycznienie kołowych cylindrów grubościennych w stadium zniszczenia. W stosunku do pracy [5] zawężenie polega więc na rezygnacji z doboru kształtów, natomiast obecne ujęcie określa znacznie szerszą klasę niejednorodności. W takim ujęciu praca nie ma oczywiście bezpośredniego związku z optymalnym kształtowaniem. Jej znaczenie jest głównie poznawcze, jednak może znaleźć znaczenie praktyczne np. przy określaniu optymalnych niejednorodności wynikających z obróbki cieplnej nie wykazującej kołowej symetrii.

2. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA PODSTAWOWE

Rozważamy kołowy grubościenny cylinder o promieniach a i b , pod działaniem ciśnienia wewnętrznego p (rys. 1). Ze względu na nieograniczoną długość i brak obciążeń wzdłuż osi cylindra (siła normalna i moment



Rys. 1

zginający) przyjmujemy płaski stan odkształcenia. Zakładamy ponadto nieściśliwość materiału. Stan naprężenia w dowolnym punkcie cylindra określony jest trójką składowych σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ spełniających warunki równowagi wewnętrznej (w przyjętym biegunowym układzie współrzędnych r, θ)

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0.$$

Składowe stanu naprężenia, wobec przyjętego kryterium, powinny spełniać w każdym punkcie warunek plastyczności w formie równości. Przyjmujemy warunek plastyczności Hubera–Misesa–Hencky'ego:

$$(2.2) \quad (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2,$$

gdzie σ_0 jest granicą plastyczności materiału i

$$(2.3) \quad \sigma_0 = \sigma_0(r, \vartheta).$$

Związki pomiędzy składowymi stanu naprężenia a obciążeniem zewnętrznym określimy z warunków brzegowych, które w naszym przypadku przyjmą postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r(a, \vartheta) &= -p, \\ \sigma_r(b, \vartheta) &= 0, \\ \tau_{r\vartheta}(a, \vartheta) &= \tau_{r\vartheta}(b, \vartheta) = 0. \end{aligned}$$

Problem całkowitego uplastycznienia cylindrów o niesymetrycznej niejednorodności rozwiążemy w dwóch ujęciach. Pierwsze, to przy założonym rozkładzie naprężeń, a ściślej funkcji naprężeń w cylindrze, określimy odpowiednią zmianę granicy plastyczności tak, aby spełnić warunek plastyczności w każdym punkcie. W drugim ujęciu, przy z góry założonej zmianie granicy plastyczności będziemy poszukiwać rozkładu naprężeń w cylindrze. W obu przypadkach określimy warunki, jakie muszą spełniać bądź założona funkcja naprężeń, bądź zmiana granicy plastyczności. Pierwszy z przypadków można rozwiązać w sposób ścisły. W drugim założymy, że zmiany granicy plastyczności są niewielkie i zagadnienie rozwiążemy metodą małego parametru.

3. ZASTOSOWANIE METODY FUNKCJI NAPRĘŻEN

Przyjmujemy funkcję naprężeń $\Phi = \Phi(r, \vartheta)$ taką, że

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \Phi' + \frac{1}{r^2} \Phi'', \\ \sigma_\vartheta &= \Phi'', \\ \tau_{r\vartheta} &= -\frac{1}{r} \Phi'' + \frac{1}{r^2} \Phi', \end{aligned}$$

(kropka oznacza różniczkowanie po zmiennej ϑ a przecinek po zmiennej r).

Warunki równowagi (2.1) są wówczas spełnione tożsamościowo, a warunek plastyczności (2.2) wyznacza nam równanie

$$(3.2) \quad \left(\frac{1}{r^2} \Phi'' + \frac{1}{r} \Phi' - \Phi'' \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{r} \Phi'' - \frac{1}{r^2} \Phi' \right)^2 = \frac{4}{3} \sigma_0^2.$$

Klasę funkcji Φ ograniczymy do funkcji typu

$$(3.3) \quad \Phi(r, \vartheta) = R(r) T(\vartheta).$$

Wobec powyższego równania (2.4) napiszemy w postaci

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{a} R'(a) T(\vartheta) + \frac{1}{a^2} R(a) T''(\vartheta) &= -p, \\ \frac{1}{b} R'(b) T(\vartheta) + \frac{1}{b^2} R(b) T''(\vartheta) &= 0, \\ \left[-\frac{1}{a} R'(a) + \frac{1}{a^2} R(a) \right] T'(\vartheta) &= 0, \\ \left[-\frac{1}{b} R'(b) + \frac{1}{b^2} R(b) \right] T'(\vartheta) &= 0. \end{aligned}$$

Założona niesymetryczna niejednorodność oraz warunek okresowości $T(\varphi) = T(\varphi + 2\pi)$ prowadzą do stwierdzenia

$$(3.5) \quad \begin{aligned} T(\vartheta) &\neq \text{const}, \\ T'(\vartheta) &\neq \text{const}. \end{aligned}$$

Analizując równania (3.4) i (3.5) otrzymamy rozwiązanie funkcji $T(\vartheta)$ w postaci

$$(3.6) \quad T(\vartheta) = \bar{\alpha} \sin \vartheta + \bar{\beta} \cos \vartheta - \frac{pa^2}{R(a)}, \quad \bar{\alpha}, \bar{\beta} \text{ stałe},$$

a funkcja $R(r)$ musi spełniać następujące warunki:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} R(a) - aR'(a) &= 0, \\ R(a) &\neq 0, \\ R(b) = R'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Można łatwo wykazać, że tak określona funkcja naprężeń spełnia w każdym przekroju wzdłużnym (określonym kątami $\vartheta = \varphi$ i $\vartheta = \varphi + \pi$) warunki równowagi

$$(3.8) \quad \int_a^b \sigma_\vartheta dr = 2pa.$$

4. ZASTOSOWANIE METODY MAŁEGO PARAMETRU

Przy założeniu niewielkiego odstępstwa od stałej granicy plastyczności $\sigma_0 = \text{const}$, możemy funkcję rozkładu granicy plastyczności rozwinąć w szereg małego parametru δ

$$(4.1) \quad \sigma_0(r, \vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_{0i}(r, \vartheta) \delta^i.$$

Konsekwencją tego jest niewielkie zaburzenie składowych naprężenia w stosunku do przypadku klasycznego ($\sigma_0 = \text{const}$). Można więc także i te wielkości rozwinąć w szereg małego parametru δ :

$$(4.2) \quad X(r, \vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i(r, \vartheta) \delta^i,$$

gdzie $X = \sigma_r, \sigma_{\vartheta}, \tau_{r\vartheta}$.

Przyjęta metoda jest szeroko stosowana przy rozwiązywaniu zagadnień, których wielkości wykazują niewielkie odstępstwa od przypadku wydzielizowanego. Jej zaletą jest to, iż z dostateczną dokładnością (już na pierwszym szczeblu przybliżenia) można uzyskać ważne z punktu widzenia poznawczego efekty jakościowe.

W naszym przypadku przyjmiemy za stan podstawowy rozwiązanie jednorodnego cylindra w płaskim stanie odkształcenia:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{r0} &= \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b}, \\ \sigma_{\vartheta 0} &= \frac{2\sigma_{00}}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right), \\ \tau_{r\vartheta 0} &= 0, \\ \sigma_{00} &= \text{const}. \end{aligned}$$

Wprowadzamy założone rozwiązania (4.1) i (4.2) do równań podstawowych (2.1) i (2.2) oraz warunków brzegowych (2.4) i porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach parametru δ . Otrzymujemy ciąg układów równań różniczkowych na kolejne wyrazy rozwinięć funkcji $\sigma_r, \sigma_{\vartheta}, \tau_{r\vartheta}$ identyczne z równaniami (2.1) (poszczególne funkcje otrzymają indeks i):

$$(4.4) \quad \frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\vartheta i}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta i}}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta i}}{r} = 0,$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$(4.5) \quad \sigma_{ri}(a) = \sigma_{ri}(b) = \tau_{r\vartheta i}(a) = \tau_{r\vartheta i}(b) = 0.$$

Nieliniowy warunek plastyczności (2.2) linearyzuje się i dla pierwszego przybliżenia ($i = 1$) przyjmuje postać

$$(4.6) \quad \sigma_{r1} - \sigma_{\vartheta 1} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_{01}.$$

Układ równań różniczkowych (4.4) sprowadzamy do jednego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu, niejednorodnego na poprawkę naprężenia $\tau_{r\vartheta 1}$:

$$(4.7) \quad r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\vartheta 1}}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\vartheta 1}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \tau_{r\vartheta 1}}{\partial \vartheta^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} [r\sigma_{01}].$$

Dowolną, okresową funkcję $\sigma_{01}(r, \vartheta)$ można rozwinąć w szereg Fouriera, np.

$$(4.8) \quad \sigma_{01}(r, \vartheta) = \sum_n q_n(r) \cos n\vartheta.$$

Warunek całkowitego uplastycznienia narzuci później pewne warunki na funkcję $q_n(r)$. Ponieważ warunki te będą nałożone na poszczególne funkcje $q_n(r)$, więc praktycznie można będzie wykorzystać nie tylko szereg nieskończony, lecz dowolny wielomian trygonometryczny (szereg skończony).

Wobec powyższego, rozwiązania równania (4.7) poszukiwać będziemy w postaci szeregu

$$(4.9) \quad \tau_{r\vartheta 1} = \sum_n t_n(r) \sin n\vartheta.$$

Funkcja $t_n(r)$ jest całką następującego równania różniczkowego zwyczajnego, niejednorodnego:

$$(4.10) \quad r^2 t_n'' + 3rt_n' + n^2 t_n = \frac{2n\sqrt{3}}{3} \frac{d}{dr} [rq_n].$$

Rozwiązanie równania (4.10) znajdziemy jako sumę rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy współrzędne bezwymiarowe i pomocnicze oznaczenia:

$$(4.11) \quad \xi = \frac{r}{b}, \quad \eta = \frac{a}{b}, \quad \gamma_n = \sqrt{n^2 - 1} \ln \xi, \quad \omega_n = \sqrt{n^2 - 1} \ln \eta.$$

Całka ogólna równania jednorodnego ma postać

$$(4.12) \quad t_{on} = \frac{A_n}{\xi} \sin \gamma_n + \frac{B_n}{\xi} \cos \gamma_n, \quad A_n, B_n \text{ stałe,}$$

a całka szczególna

$$(4.13) \quad t_{sn} = \frac{2\sqrt{3}}{3\xi} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \left[\sin \gamma_n \int_{\eta}^{\xi} \cos \gamma_n \frac{d}{d\xi} [\xi q_n] d\xi - \right.$$

$$-\cos \gamma_n \int_n^\xi \sin \gamma_n \frac{d}{d\xi} [\xi q_n] d\xi \Big].$$

Napężenia σ_{r1} i $\sigma_{\theta 1}$ wyznaczymy z warunków równowagi (4.4) i z warunku plastyczności (4.6). Pierwsze więc poprawki naprężeń wyrażą się wzorami

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta 1}(\xi, \vartheta) &= \sum_n \frac{1}{n} [\xi t'_n(\xi) + 2t_n(\xi)] \cos n\vartheta, \\ \sigma_{r1}(\xi, \vartheta) &= \sum_n \left\{ \frac{1}{n} [\xi t'_n(\xi) + 2t_n(\xi)] - \frac{2\sqrt{3}}{3} q_n \right\} \cos n\vartheta, \\ \tau_{r\theta 1}(\xi, \vartheta) &= \sum_n t_n(\xi) \sin n\vartheta. \end{aligned}$$

W przypadku tym mamy więcej warunków brzegowych (cztery warunki) niż wymaga tego rząd równania różniczkowego (dwa warunki). Jest to dość często spotykane zjawisko w zadaniach teorii plastyczności. Wykorzystując warunki $\tau_{r\theta 1}(\eta) = \tau_{r\theta 1}(1) = 0$ wyznaczymy stałe całkowania A_n i B_n :

$$(4.15) \quad \begin{aligned} B_n &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \int_n^1 \sin \gamma_n \frac{d}{d\xi} [\xi q_n] d\xi, \\ A_n &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{ctg} \omega_n \int_n^1 \sin \gamma_n \frac{d}{d\xi} [\xi q_n] d\xi. \end{aligned}$$

Warunek $\sigma_{r1}(\eta) = 0$ przyjmie postać

$$(4.16) \quad \frac{1}{n} \eta t'_n(\eta) - \frac{2\sqrt{3}}{3} q_n(\eta) = 0,$$

a wyznaczając $t'_n(\eta)$ można napisać go w równoważnej formie

$$(4.17) \quad \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \frac{1}{\eta} B_n \frac{1}{\sin \omega_n} + \frac{2\sqrt{3}}{3} q_n(\eta) = 0.$$

Całkując przez części pierwsze z równań (4.15) i wykorzystując je w (4.17) otrzymamy w końcu warunek

$$(4.18) \quad \int_n^1 q_n(\xi) \cos \gamma_n d\xi = 0.$$

Czwarty z warunków brzegowych $\sigma_{r1}(1) = 0$ daje równanie

$$(4.19) \quad \frac{1}{n} t'_n(1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} q_n(1) = 0.$$

Podobnie jak wyżej, nieskomplikowane przekształcenia prowadzą do warunku

$$(4.20) \quad \int_{\eta}^1 q_n(\xi) \sin \gamma_n d\xi = 0.$$

Ponadplanowe warunki brzegowe dają nam dwie równości całkowe, które musi spełniać pierwsza poprawka granicy plastyczności, aby cały przekrój cylindra uległ uplastycznieniu.

Zakres stosowalności wyprowadzonych wzorów (w szczególności przedział zmienności małego parametru δ) prowadzą do warunku nieujemnej wartości energii odkształcenia. Jeśli przyjmiemy prawo podobieństwa dewiatorów (teoria Hencky-Iliuszyna) to energię odkształcenia grubościennego cylindra w płaskim stanie naprężenia wyrazimy wzorem

$$(4.21) \quad W = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \frac{2}{3} \varphi \sigma_0^2(r, \vartheta),$$

gdzie $\varphi = \varphi(r, \vartheta)$ jest modulem zaawansowania odkształceń plastycznych i w stanie całkowitego uplastycznienia $\varphi > 1/2G$; G zaś jest modulem Kirchhoffa. Warunek nieujemnej energii odkształcenia implikuje warunek nieujemności modułu zaawansowania odkształceń plastycznych. Funkcję φ wyznaczyć można z warunku nierozdzielności:

$$(4.22) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \varepsilon_\vartheta}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\vartheta})}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = 0,$$

który wyrazić można przez naprężenia σ_r , σ_ϑ , $\tau_{r\vartheta}$ oraz φ :

$$(4.23) \quad \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} [\varphi (\sigma_r - \sigma_\vartheta)] - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\varphi (\sigma_r - \sigma_\vartheta)] - \\ - 4 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} [r \varphi \tau_{r\vartheta}] - 3r \frac{\partial}{\partial r} [\varphi (\sigma_r - \sigma_\vartheta)] = 0.$$

Postępując tak jak wyżej, rozwijamy funkcję φ w szereg małego parametru δ . W stanie podstawowym ($i = 0$)

$$(4.24) \quad \varphi_0 = \frac{C_0}{\xi^2}, \quad C_0 \text{ — stała.}$$

Pierwszą poprawkę funkcji φ określa następujące równanie różniczkowe:

$$(4.25) \quad \xi^2 \varphi_1'' + 3\xi \varphi_1' - \ddot{\varphi}_1 = \frac{C_0 \sqrt{3}}{2\sigma_{00} \xi^2} [-\xi (\sigma_{r1}' - \sigma_{\vartheta 1}') + \xi^2 (\sigma_{r1}'' - \sigma_{\vartheta 1}'') - \\ - (\ddot{\sigma}_{r1} - \ddot{\sigma}_{\vartheta 1}) - 4\dot{\tau}_{r\vartheta 1} + 4\xi \dot{\tau}_{\vartheta 1}'].$$

Ze względu na otrzymane rozwiązania poprawek naprężeń σ_{r1} , $\sigma_{\vartheta 1}$, $\tau_{r\vartheta 1}$ rozwiązania φ_1 poszukujemy w postaci szeregu

$$(4.26) \quad \frac{\varphi_1 \sigma_{00}}{C_0} = \sum_n f_n(\xi) \cos n\vartheta.$$

Funkcja f_n jest całką następującego równania różniczkowego zwyczajnego

$$(4.27) \quad \xi^2 f_n'' + 3\xi f_n' + n^2 f_n = -\frac{1}{\xi^2} (\xi^2 q_n'' - \xi q_n' + n^2 q_n) + \frac{2n\sqrt{3}}{\xi^2} (\xi t_n' - t_n).$$

Rozwiązanie składa się z rozwiązania ogólnego f_{1n} , f_{2n} i całki szczególnej f_{sn} . Funkcję φ można wyrazić następująco:

$$(4.28) \quad \varphi = \frac{C_0}{\xi^2} \left[1 + \frac{1}{\sigma_{00}} \xi^2 \delta \sum_n (C_{11n} f_{1n} + C_{12n} f_{2n} + f_{sn}) \cos n\vartheta \right],$$

gdzie C_{11n} , C_{12n} są to stałe, których nie możemy wyznaczyć, ponieważ pole przemieszczeń grubościennego cylindra nie jest jednoznacznie określone (brak warunków brzegowych dla funkcji φ). Dopuszczalne wartości parametru δ określa warunek

$$(4.29) \quad \sup_{\xi} \frac{1}{\sigma_{00}} \xi^2 \delta \left| \sum_n (C_{11n} f_{1n} + C_{12n} f_{2n} + f_{sn}) \right| < 1.$$

5. PRZYKŁADY

W niniejszym rozdziale przedstawimy przykłady ilustrujące ogólne rozwiązania zawarte w punktach 3 i 4.

5.1. Metoda funkcji naprężeń

Rozważymy dwie postacie funkcji R

$$(5.1) \quad \begin{aligned} R_I(\xi) &= A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3, \\ R_{II}(\xi) &= A \ln \xi + B(\xi - 1)(\xi - C), \end{aligned}$$

gdzie A_1 , A , B , C są stałymi, $\xi = r/b$. Wykorzystując warunki (3.7) oraz wzory (3.2) i (3.6) otrzymujemy następujące rozkłady granicy plastyczności:

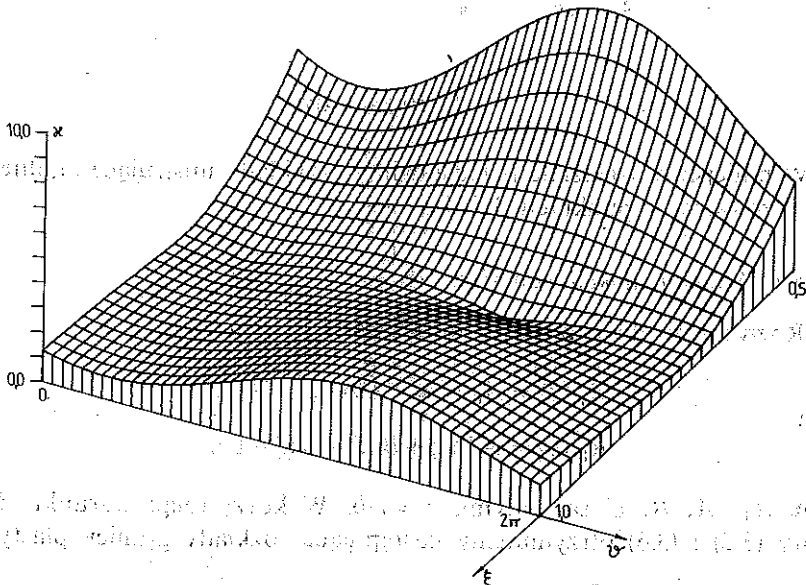
$$(5.2) \quad s_r^2 = \frac{3}{4\xi^4} \left\{ \left[(-4a_1 \xi^3 - a_2 \xi^2 - 1)(\alpha_1 \sin \vartheta + \beta_1 \cos \vartheta) - (-3a_1 \xi^3 + a_3 \xi) \frac{\eta^2}{a_1 \eta^3 + a_2 \eta^2 + a_3 \eta + 1} \right]^2 + \right.$$

$$+ 4 \left[(2a_1 \xi^3 + a_2 \xi^2 - 1) (\alpha_I \cos \vartheta - \beta_I \sin \vartheta) \right]^2 \Big\},$$

$$s_{II}^2 = \frac{3}{4\xi^4} \left\{ \left[\left(\frac{\eta^2 - 1}{\ln \eta} (1 - \ln \xi) - \xi^2 - 1 \right) (\alpha_{II} \sin \vartheta + \beta_{II} \cos \vartheta) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\eta^2 - 1}{\ln \eta} (2 - \xi) - 2\xi \right) \frac{\eta^2}{(\eta - 1)(2\eta \ln \eta - \eta^2 - 1)} \right]^2 + \right. \\ \left. + 4 \left[\left(\xi^2 - 1 - \frac{\eta^2 - 1}{\ln \eta} \ln \xi \right) (\alpha_{II} \cos \vartheta - \beta_{II} \sin \vartheta) \right]^2 \right\},$$

gdzie

$$(5.3) \quad s = \frac{\sigma_0^2}{p^2}, \quad \eta = \frac{a}{b}, \quad a_1 = -(1 + \eta)/2, \quad a_2 = \eta^2 + \eta + 1, \\ a_3 = -(4\eta^2 + \eta + 1)/2, \quad \alpha_I = \frac{\bar{\alpha}A_0}{2p\eta^2}, \quad \beta_I = \frac{\bar{\beta}A_0}{2p\eta^2}, \\ \alpha_{II} = \frac{\bar{\alpha}B}{p}, \quad \beta_{II} = \frac{\bar{\beta}B}{p}.$$



Rys. 2

Pomimo przyjęcia różnych postaci funkcji naprężeń rozkłady granicy plastyczności niewiele różnią się od siebie. Na rys. 2 przedstawiono zmianę rozkładu granicy plastyczności s_I dla $\alpha_I = \beta_I = 1$.

5.2. Metoda małego parametru

Przyjmujemy, że zaburzenie n -tego wyrazu granicy plastyczności na pierwszym szczeblu przybliżenia można przedstawić wzorem

$$(5.4) \quad q_n = [K_{1n} \xi^{k_1} + K_{2n} \xi^{k_2} + K_{3n} \xi^{k_3}] \frac{\sigma_{00}}{n}.$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do analizy rozwiązania, przy założeniu, że poprawka granicy plastyczności opisana jest jednym wyrazem szeregu trygonometrycznego.

Całki typu $\int F[\xi^\alpha, \sin(\ln \xi)] d\xi$, $\int F[\xi^\alpha, \cos(\ln \xi)] d\xi$ można wyliczyć efektywnie

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \int \xi^{k_i} \cos \gamma_n d\xi &= P_{1in} \xi^{k_i+1} \cos \gamma_n + P_{2in} \xi^{k_i+1} \sin \gamma_n, \\ \int \xi^{k_i} \sin \gamma_n d\xi &= P_{1in} \xi^{k_i+1} \sin \gamma_n - P_{2in} \xi^{k_i+1} \cos \gamma_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.6) \quad P_{1in} = \frac{k_i + 1}{(k_i + 1)^2 + n^2 - 1}, \quad P_{2in} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{(k_i + 1)^2 + n^2 - 1}.$$

Wykorzystując warunki całkowe (4.18) i (4.20) otrzymamy następujący układ równań:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} K_{1n} A_{11n} + K_{2n} A_{12n} + K_{3n} A_{13n} &= 0, \\ K_{1n} A_{21n} + K_{2n} A_{22n} + K_{3n} A_{23n} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.8) \quad \begin{aligned} A_{1in} &= -P_{1in} \eta^{k_i+1} \sin \omega_n - P_{2in} + P_{2in} \eta^{k_i+1} \cos \omega_n, \\ A_{2in} &= P_{1in} - P_{1in} \eta^{k_i+1} \cos \omega_n - P_{2in} \eta^{k_i+1} \sin \omega_n. \end{aligned}$$

Przy założeniu

$$(5.9) \quad A_{11n} A_{22n} - A_{12n} A_{21n} \neq 0,$$

wyrazimy stałe K_{1n} , K_{2n} za pomocą K_{3n} , którą można wprowadzić do małego parametru δ . Wzory (4.14) możemy napisać w postaci

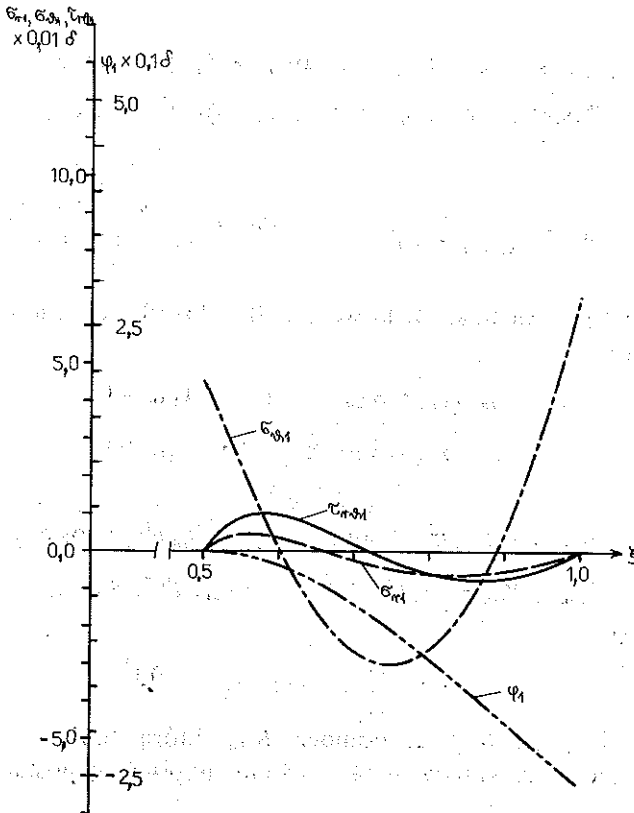
$$(5.10) \quad \begin{aligned} t_n(\xi) &= \frac{2\sqrt{3}}{3\xi} \sigma_{00} \sum_{i=1}^3 K_{in} \alpha_{in}, \\ \frac{1}{n} [\xi t'_n(\xi) + 2t_n(\xi)] &= \frac{2\sqrt{3}}{3} q_n(\xi) + \\ &+ \frac{2\sqrt{3}}{3\xi} \frac{\sigma_{00}}{n} \left[\sum_{i=1}^3 K_{in} (\alpha_{in} + \sqrt{n^2 - 1} \beta_{in}) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \alpha_{in} &= P_{1in} \xi^{k_i+1} - P_{1in} \eta^{k_i+1} \cos(\gamma_n - \omega_n) + P_{2in} \eta^{k_i+1} \sin(\gamma_n - \omega_n), \\ \beta_{in} &= -P_{2in} \xi^{k_i+1} + P_{1in} \eta^{k_i+1} \sin(\gamma_n - \omega_n) + P_{2in} \eta^{k_i+1} \cos(\gamma_n - \omega_n), \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe na poprawkę modułu φ przyjmie postać

$$(5.12) \quad \xi^2 f_n'' + 3\xi f_n' + n^2 f_n = -\frac{1}{\xi^2} (\xi^2 q_n'' - \xi q_n' - 3n^2 q_n) - \frac{4n}{\xi^3} \sigma_{00} \left[2 \sum_{i=1}^3 K_{in} (\alpha_{in} - \sqrt{n^2 - 1} \beta_{in}) \right].$$



Rys. 3

Na rys. 3 pokazano pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia odniesionych do σ_{00} , w przekroju określonym kątem $\vartheta = 20^\circ$ odpowiadające granicy plastyczności (5.4) dla $n = 2$. Zaznaczono również zmianę wyrażenia występującego w warunku (4.29). Rozważono tylko rozwiązanie szczególne, tzn. przyjęto $C_{11n} = C_{12n} = 0$. Dopuszczalna wielkość parametru δ wyznaczona

wg zależności (4.29) wynosi $\delta < 3.99$. Zakres ten można rozszerzyć przez odpowiedni dobór stałych C_{11n} i C_{12n} tak, aby $\sup \phi_1$ było najmniejsze.

Przedstawione opracowanie ma znaczenie przede wszystkim poznawcze. Rozszerza dotychczasowe rozwiązania problemów całkowitego uplastycznienia elementów konstrukcyjnych uwzględniając niejednorodność materiału. Praca nie ma bezpośredniego zastosowania inżynierskiego, ale wskazuje kierunki w projektowaniu prowadzące do lepszego wykorzystania materiału. Wyprowadzone w punkcie 4 warunki całkowite (4.18) i (4.20) na rozkład granicy plastyczności oraz w punkcie 3 warunki (3.7) wskazują, iż całkowite uplastycznienie cylindra kołowo-symetrycznego jest możliwe w szerokiej klasie funkcji naprężeń, czy też granicy plastyczności nie wykazującej kołowej symetrii.

Autorzy wyrażają podziękowanie Profesorowi dr. hab. Michałowi ŻYCZKOWSKIEMU za cenne sugestie w trakcie realizacji pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech. 5 Brussels, 212-222, 1956.
2. A. ZAVELANI-ROSSI, *Minimum-weight for two-dimensional bodies*, Meccanica, 4, 445-452, 1969.
3. Z. KORDAS, *Problematyka określania kształtów ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Zesz. Nauk. PK, 7, 1977.
4. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inżyn., 18, 3, 1970.
5. A. DOLLAR, *Wpływ niejednorodności materiału na kształty niekołowych przekrojów cylindrów grubościennych całkowicie uplastycznionych w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inżyn., 31, 2, 1980.
6. Z. KORDAS, W. SKRABA, *Kształtowanie cylindrów grubościennych pod działaniem ciśnienia wewnętrznego i zginania z warunku całkowitego uplastycznienia w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inżyn., 25, 1, 1977.

РЕЗЮМЕ

ПРОБЛЕМА ПОЛНОГО ПЕРЕХОДА В ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Работа расширяет проблематику полного перехода в пластическое состояние конструктивных элементов в стадии разрушения на пластически неоднородные материалы, в частности ищется в ней такой несимметричной неоднородности материала, которая дает возможность полного перехода в пластическое состояние при исчерпании предельной несущей способности круговых толстостенных цилиндров под действием внешнего давления. Проблема рассмотрена в двух подходах, именно в первом, при заданной функции напряжений, определялся переменный предел пластичности материала, таким

образом, чтобы условие пластичности удовлетворялось в каждой точке цилиндра. Во втором подходе, предполагая, что предел пластичности не обладает круговой симметрией, приведены интегральные условия, определяющие класс функций, при которых возможно получить решения поставленной проблемы.

SUMMARY

THE PROBLEM OF FULL PLASTIFICATION OF CIRCULAR CYLINDERS WITH ASYMMETRIC NONHOMOGENEITY

The paper extends the problem of full plastification of structural elements in the limit state to the case of plastic nonhomogeneity. In particular, we look for such kinds of asymmetric nonhomogeneity of perfectly elastic-plastic thick-walled circular cylinders which enable full plastification at the stage of collapse. The problem is investigated in two approaches. First, for prescribed stress functions we determine the distributions of the yield-point stress so as to satisfy the yield condition at any point of the cylinder. In the second approach, certain integral conditions imposed on the distribution of the yield-point stress are derived; they ensure full plastification of a nonhomogeneous cylinder.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1986 r.