

## DYNAMIKA POWŁOKI WALCOWEJ OBCIĄŻONEJ LOSOWĄ SERIĄ SIŁ RUCHOMYCH

PAWEŁ ŚNIA D Y i MAREK W I T T (WROCLAW)

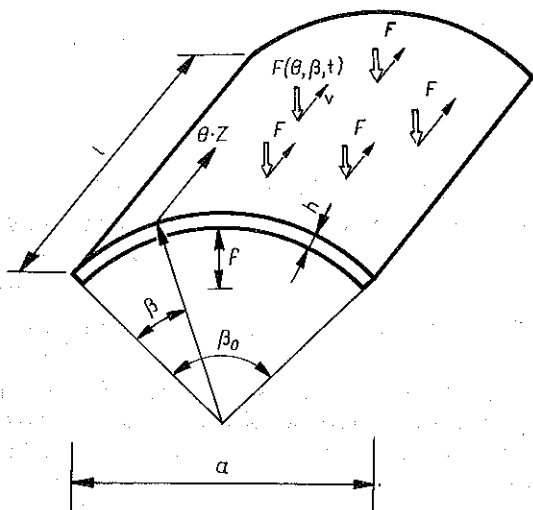
Rozpatruje się drgania powłoki cylindrycznej wywołane losową serią sił ruchomych. Przyjęto, że amplitudy sił i ich poprzeczne położenie ma charakter losowy, a chwile pojawienia się na powłoce tworzą stochastyczny proces punktowy. Wyprowadzono wzory na wartość oczekiwaną i wariancję przemieszczenia powłoki, a dla procesu Poissona podano również funkcję gęstości prawdopodobieństwa i funkcję charakterystyczną oraz przedstawiono ocenę niezawodności powłoki.

### 1. WSTĘP

Problem drgań konstrukcji wywołanych ruchomym obciążeniem podejmowany był w szeregu prac, a bogaty przegląd literatury zawierają między innymi monografie [1 i 2]. Rozpatrywano drgania cięgien, prętów, belek, ram, płyt, a także w nielicznych pracach powłoki. Zagadnienie obciążeń ruchomych występuje między innymi w konstrukcjach inżynierskich związanych z mostownictwem, a także w konstrukcjach lotniczych. W większości przypadków zagadnienie to rozpatruje się w kategoriach deterministycznych. Podejście probabilistyczne przedstawiono w zagadnieniu drgań belki wywołanych ruchem pojedynczej siły, np. [3], bądź losowej serii sił [4-7]. W niniejszej pracy rozpatruje się drgania powłoki walcowej obciążonej losową serią sił poruszających się w jednym kierunku z ustaloną prędkością. Przyjęto, że chwile i miejsca wjazdu sił na powłokę oraz wielkości tych sił są losowe. Wyznaczono wartość przeciętną i wariancję przemieszczenia powłoki oraz wariancję prędkości przemieszczeń. Następnie przedstawiono oszacowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiedzi powłoki na obciążenia oraz ocenę jej niezawodności ze względu na pierwsze przekroczenie poziomu dopuszczalnego.

### 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU. ROZWIĄZANIE OGÓLNE

Niech drgania powłoki walcowej (rys. 1) opisuje, zgodnie z teorią Własowa, układ równań:



Rys. 1

$$(2.1) \quad \frac{1}{E_0 h} V^2 \nabla^2 \varphi(\theta, \beta, t) - R \frac{\partial^2 w(\theta, \beta, t)}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \varphi(\theta, \beta, t)}{\partial \theta^2} + N V^2 \nabla^2 w(\theta, \beta, t) + c R^4 \dot{w}(\theta, \beta, t) - \\ - m R^4 \ddot{w}(\theta, \beta, t) = R^3 F(\theta, \beta, t).$$

gdzie  $x = R \sin \beta$ ,  $y = R \cos \beta$ ,  $z = \theta R$ , a  $E_0$  oznacza moduł Younga,  $R$  promień krzywizny powłoki,  $h$  grubość powłoki,  $\nu$  współczynnik Poissona,  $c$  współczynnik tłumienia,  $m$  masę jednostkową powłoki oraz

$$N = E_0 h^3 [12(1 - \nu^2)]^{-1}, \quad V^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}.$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że powłoka jest swobodnie podparta na całym obwodzie. Stąd rozwiązanie poszukiwać będziemy w postaci szeregów

$$(2.3) \quad \varphi(\theta, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{nk}(t) \sin a_n \theta \sin b_k \beta,$$

$$(2.4) \quad w(\theta, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{nk}(t) \sin a_n \theta \sin b_k \beta,$$

gdzie  $a_n = n\pi R/l$ ,  $b_k = k\pi/\beta_0$ , przy czym  $l$  jest długością powłoki oraz  $\beta_0$  określa szerokość powłoki.

Powłoka obciążona jest poczynając od chwili początkowej  $t_0$  losową serią sił ruchomych. Stąd funkcja obciążenia  $F(\theta, \beta, t)$  ma postać

$$(2.5) \quad F(\theta, \beta, t) = \sum_{i=1}^{N(t_0, t)} A_i S(t-t_i) p(\beta, \gamma_i) \delta \left[ \theta - \frac{v}{R} (t-t_i) \right],$$

gdzie symbol  $\delta(\ )$  oznacza deltę Diraca.

Siły pojawiają się w losowych chwilach  $t_i$  tworzących punktowy proces stochastyczny i niech  $N(t_0, t)$  oznacza losową liczbę sił pojawiających się w przedziale  $(t_0, t)$ . Proces  $N(t_0, t)$  jest ogólnym procesem punktowym [8] i znane są jego gęstości produktowe pierwszego i drugiego stopnia, a więc  $\lambda(t)$  średnie natężenie zgłoszenia się w chwili  $t$  oraz  $\Phi(t_1, t_2)$  korelacja między zgłoszeniami w chwili  $t_1$  i  $t_2$ . Zakładamy, że losowe amplitudy  $A_i$  sił są statystycznie niezależne od chwili  $t_i$  oraz wzajemnie niezależne i znane są charakterystyki probabilistyczne  $E[A_i] = E[A] = \text{const}$ ,  $E[A_i^2] = E[A^2] = \text{const}$ . Deterministyczna funkcja  $S(t-t_i)$  określa przebieg w czasie siły poruszającej się z prędkością  $v$ , a funkcja  $p(\beta, \gamma_i)$  określa rozkład obciążenia poprzecznie do kierunku ruchu. Wielkości  $\gamma_i = \gamma_i(\beta)$  są zmiennymi losowymi, wzajemnie niezależnymi i niezależnymi od chwil  $t_i$  i określają lokalizację obciążenia w kierunku prostopadłym do tworzącej powłoki, np. jego początek i koniec dla obciążenia ciągłego. Zakłada się, że znane są gęstości jedno i dwuwymiarowe zmiennych losowych  $\gamma_i$ . Powyższe charakterystyki probabilistyczne procesu obciążenia pozwalają określić wartość oczekiwaną i wariancję przemieszczeń powłoki oraz wariancję prędkości przemieszczeń. Po podstawieniu funkcji (2.3) i (2.4) do równania (2.1) otrzymuje się zależność

$$(2.6) \quad \varphi_{nk}(t) = - \frac{RE_0 ha_n}{(a_n^2 + b_n^2)^2} q_{nk}(t).$$

a następnie z równania (2.2) układ równań rozdzielonych

$$(2.7) \quad \ddot{q}_{nk}(t) + 2\alpha \dot{q}_{nk}(t) + \omega_{nk}^2 q_{nk}(t) = \frac{4}{m\beta_0 l} \sum_{i=1}^{N(t_0, t)} A_i p_k(\gamma_i) S(t-t_i) \sin a_n \frac{V}{R} (t-t_i),$$

gdzie

$$\omega_{nk}^2 = m^{-1} R^{-1} [N(a_n^2 + b_k^2)^2 + R^2 E_0 ha^4 (a_n^2 + b_k^2)^{-2}], \quad 2\alpha = c/m,$$

oraz

$$p_k(\gamma_i) = \int_{B(\gamma_i)} p(\beta, \gamma_i) \sin b_k \beta d\beta,$$

przy czym rozkład poprzeczny  $B(\gamma_i)$  każdej siły określa zmienne losowe  $\gamma_i$ .

Dla wygody wprowadzimy funkcje  $y_{nk}(t)$  i  $z_{nk}(t)$  określone całkami

$$(2.8) \quad y_{nk}(t-t_i) = \int_{t_i}^{-t} h_{nk}(t-\xi) S(\xi-t_i) \sin a_n \frac{V}{R} (\xi-t_i) d\xi,$$

$$(2.9) \quad z_{nk}\left(t-t_i-\frac{l}{v}\right) = \int_{t_i}^{t+\frac{l}{v}} h_{nk}(t-\xi) S(\xi-t_i) \sin a_n \frac{V}{R} (\xi-t_i) d\xi,$$

gdzie  $h_{nk}(t) = \Omega_{nk}^{-1} \exp(-\alpha t) \sin \Omega_{nk}(t)$ ,  $\Omega_{nk}^2 = \omega_{nk}^2 - \alpha^2$ . Rozwiązanie równania (2.7) w postaci całki Stieltjesa przyjmuje następującą postać dla  $(t \geq t_0 + \frac{l}{v})$ :

$$(2.10) \quad q_{nk}(t) = q_{nk}^{(1)}(t) + q_{nk}^{(2)}(t) = \frac{4}{m\beta_0 l} \left\{ \int_{t-\frac{l}{v}}^t A(\tau) p_k(\gamma(\tau)) \times \right. \\ \left. \times y_{nk}(t-\tau) dN(\tau) + \int_{t_0}^{t-\frac{l}{v}} A(\tau) p_k(\gamma(\tau)) z_{nk}\left(t-\tau-\frac{l}{v}\right) dN(\tau) \right\}.$$

Jeżeli  $t_0 \leq t < t_0 + \frac{l}{v}$ , to należy zmienić granice całkowania podstawiając na miejsce  $t - \frac{l}{v}$  wielkość  $t_0$ ; wtedy więc znika druga całka we wzorze (2.10).

Dokonując na równości (2.10) operacji wartości oczekiwanej, otrzymuje się

$$(2.11) \quad E[q_{nk}(t)] = \frac{4E[A]E[p_k(\gamma)]}{m\beta_0 l} \left\{ \int_{t-\frac{l}{v}}^t y_{nk}(t-\tau) \lambda(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t-\frac{l}{v}} z_{nk}\left(t-\tau-\frac{l}{v}\right) \lambda(\tau) d\tau \right\}.$$

Wykorzystując własności ogólnych procesów punktowych otrzymuje się ze wzoru (2.10) funkcje kowariantne w postaci

$$(2.12) \quad \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}(t, t) = \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(1)(1)}(t, t) + \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(2)(2)}(t, t) + \\ + \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(1)(2)}(t, t) + \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(2)(1)}(t, t),$$

przy czym

$$(2.13) \quad \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(1)(1)}(t, t) = \frac{16}{m^2 \beta_0^2 l^2} \left\{ E[A^2] E[p_k(\gamma) p_j(\gamma)] \int_{t-\frac{l}{v}}^t y_{nk}(t-\tau) \times \right. \\ \left. \times y_{ij}(t-\tau) \lambda(\tau) d\tau + E^2[A] \int_{t-\frac{l}{v}}^t \int_{t-\frac{l}{v}}^t y_{nk}(t-\tau_1) y_{ij}(t-\tau_2) g(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\},$$

$$(2.14) \quad \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(2)(2)}(t, t) = \frac{16}{m^2 \beta_0^2 l^2} \left\{ E[A^2] E[p_k(\gamma) p_j(\gamma)] \int_{t_0}^t z_{nk}(t-\tau) z_{ij}(t-\tau) d\tau + \right. \\ \left. + E^2[A] \int_{t_0}^{t-\frac{l}{v}} \int_{t_0}^{t-\frac{l}{v}} z_{nk}\left(t-\tau_1-\frac{l}{v}\right) z_{ij}\left(t-\tau_2-\frac{l}{v}\right) g(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\},$$

$$(2.15) \quad \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(1)(2)}(t, t) = \frac{16}{m^2 \beta_0^2 l^2} \left\{ E^2[A] \int_{t-\frac{l}{v}}^t \int_{t-\frac{l}{v}}^{t_0} y_{nk}(t-\tau_1) z_{ij}\left(t-\tau_2-\frac{l}{v}\right) \times \right. \\ \left. \times g(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\},$$

gdzie

$$g(\tau_1, \tau_2) = E[p_k(\gamma_1) p_j(\gamma_2)] \Phi(\tau_1, \tau_2) - \\ - E[p_k(\gamma_1)] E[p_j(\gamma_2)] \lambda(\tau_1) \lambda(\tau_2).$$

Wykorzystując wzory (2.11)–(2.15) otrzymuje się wzory na wartość oczekiwaną i wariancję przemieszczenia powłoki w postaci następującej

$$(2.16) \quad E[w(\theta, \beta, t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E[q_{nk}(t)] \sin a_n \theta \sin b_k \beta,$$

$$(2.17) \quad \sigma_w^2(\theta, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}(t, t) \sin a_n \theta \sin b_k \beta \times \\ \times \sin a_i \theta \sin b_j \beta.$$

Wariancję prędkości przemieszczenia powłoki określają wzory analogiczne do (2.8)–(2.10), (2.12)–(2.15) i (2.17) z tą różnicą, że we wzorach (2.8) i (2.9) na miejsce funkcji  $h_{nk}(t)$  należy podstawić

$$\dot{h}_{nk}(t) = \exp(-\alpha t) [\cos \Omega_{nk} t - \alpha \Omega_{nk}^{-1} \sin \Omega_{nk} t].$$

## 3. ROZWIĄZANIA SZCZEGÓŁOWE

Rozpatrzmy szczegółowo przypadek, gdy poruszające się siły mają wartość stałą, a więc  $S(t-t_i) = 1$  dla  $t \geq t_i$ , natomiast strumień zgłoszeń sił tworzy proces Poissona ( $\lambda = \text{const}$ ) i położenie każdej siły w kierunku poprzecznym jest wzajemnie niezależne, bądź ma charakter deterministyczny. Z tych założeń wynika, że  $g(\tau_1, \tau_2) = 0$  i wszystkie całki podwójne we wzorach (2.12)–(2.15) są równe zeru. Ograniczając rozważania do drgań ustalonych ( $t_0 = -\infty$ ) ze wzorów (2.11) i (2.12)–(2.14) otrzymuje się wyrażenie na wartość oczekiwaną i funkcje kowariantne współrzędnych głównych w postaci

$$(3.1) \quad E[q_{nk}(\infty)] = \frac{4E[A] E[p_k(\gamma)] \lambda [1 - (-1)^n]}{m\beta_0 l \omega_{nk}^2 a_n \frac{v}{R}},$$

oraz

$$(3.2) \quad \text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(1)(1)}(t) = \frac{16\lambda E[A^2] E[p_k(\gamma) p_j(\gamma)]}{m^2 l^2 \beta_0^2 M_{nk} M_{ij}} \{ C_{nkij} + \\ + a_{nk}^{(1)} a_{ij}^{(3)} J_3(\alpha, \beta_n, \Omega_{ij}) - a_{nk}^{(1)} a_{ij}^{(2)} J_4(\alpha, \beta_n, \Omega_{ij}) + \\ + a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(3)} J_4(\alpha, \Omega_{ij}, \beta_n) - a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(2)} J_4(\alpha, \beta_n, \Omega_{ij}) + \\ + a_{nk}^{(3)} a_{ij}^{(1)} J_3(\alpha, \Omega_{nk}, \beta_i) + a_{nk}^{(3)} a_{ij}^{(2)} J_4(\alpha, \Omega_{nk}, \beta_i) + \\ + a_{nk}^{(3)} a_{ij}^{(3)} J_3(2\alpha, \Omega_{nk}, \Omega_{ij}) - a_{nk}^{(3)} a_{ij}^{(2)} J_4(2\alpha, \Omega_{nk}, \Omega_{ij}) - \\ - a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(1)} J_4(\alpha, \beta_i, \Omega_{nk}) - a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(2)} J_5(\alpha, \beta_i, \Omega_{nk}) - \\ - a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(3)} J_4(2\alpha, \Omega_{ij}, \Omega_{nk}) + a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(2)} J_5(2\alpha, \Omega_{nk}, \Omega_{ij}) \},$$

przy czym

$$C_{nkij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{l}{v} (a_{nk}^{(1)} a_{ij}^{(1)} + a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(2)}), & \text{gd}y \ n = i, \\ \frac{l}{2\pi v} [1 - (-1)^{n+i}] \left\{ \frac{1}{n+i} [a_{nk}^{(1)} a_{ij}^{(2)} + a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(1)}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{n-i} [a_{nk}^{(1)} a_{ij}^{(2)} - a_{nk}^{(2)} a_{ij}^{(1)}] \right\}, & \text{gd}y \ n \neq i, \end{cases}$$

$$\text{cov}_{q_{nk}q_{ij}}^{(2)(2)}(\infty) = \frac{16\lambda E[A^2] E[p_k(\gamma) p_j(\gamma)]}{m^2 l^2 \beta_0^2 M_{nk} M_{ij}} \times \\ \times \left\{ b_{nk}^{(1)} b_{ij}^{(1)} \frac{4\alpha \Omega_{nk} \Omega_{ij}}{[4\alpha^2 + (\Omega_{nk} - \Omega_{ij})^2] [4\alpha^2 + (\Omega_{nk} + \Omega_{ij})^2]} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} b_{nk}^{(1)} b_{ij}^{(2)} \left[ \frac{\Omega_{nk} - \Omega_{ij}}{4\alpha^2 + (\Omega_{nk} - \Omega_{ij})^2} - \frac{\Omega_{nk} + \Omega_{ij}}{4\alpha^2 + (\Omega_{nk} + \Omega_{ij})^2} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} b_{nk}^{(2)} b_{ij}^{(1)} \left[ \frac{\Omega_{ij} - \Omega_{nk}}{4\alpha^2 + (\Omega_{nk} - \Omega_{ij})^2} - \frac{\Omega_{nk} - \Omega_{ij}}{4\alpha^2 + (\Omega_{nk} + \Omega_{ij})^2} \right] + \\
 & + b_{nk}^{(2)} b_{ij}^{(2)} \alpha \left[ \frac{1}{4\alpha^2 + (\Omega_{nk} - \Omega_{ij})^2} + \frac{1}{4\alpha^2 + (\Omega_{nk} + \Omega_{ij})^2} \right] \Bigg\},
 \end{aligned}$$

$$\text{cov } q_{nk}^{(1)} q_{ij}^{(2)} = 0,$$

gdzie

$$\beta_n = \frac{n\pi v}{2}, \quad \Omega_{nk}^2 = \omega_{nk}^2 - \alpha^2,$$

$$M_{nk} = (\omega_{nk}^2 - \beta_n^2) + 4\alpha^2 \beta_n^2,$$

$$a_{nk}^{(1)} = \omega_{nk}^2 - \beta_n^2, \quad a_{nk}^{(2)} = -2\alpha\beta_n,$$

$$a_{nk}^{(3)} = \beta_n \Omega_{nk}^{-1} [2\alpha^2 - (\omega_{nk}^2 - \beta_n^2)],$$

$$\begin{aligned}
 b_{nk}^{(1)} = & (-1)^n \Omega_{nk}^{-1} (a_{nk}^{(1)} \beta_n + a_{nk}^{(2)} \alpha) + a_{nk}^{(3)} e^{-\alpha \frac{l}{v}} \cos \Omega_{nk} \frac{l}{v} + \\
 & + a_{nk}^{(2)} e^{-\alpha \frac{l}{v}} \sin \Omega_{nk} \frac{l}{v},
 \end{aligned}$$

$$b_{nk}^{(2)} = (-1)^n a_{nk}^{(2)} + a_{nk}^{(3)} e^{-\alpha \frac{l}{v}} \sin \Omega_{nk} \frac{l}{v} - a_{nk}^{(2)} e^{-\alpha \frac{l}{v}} \cos \Omega_{nk} \frac{l}{v}.$$

Występujące we wzorze (3.2) całki  $J_k(\cdot)$  określono w Dodatku.

#### 4. OCENA GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIENSTWA I OCENA NIEZAWODNOŚCI

Zakłada się, że strumień zgłoszeń sił tworzy niestacjonarny proces Poissona, a ich rozkład poprzeczny do kierunku ruchu jest zdeterminowany. Rozważania ograniczono tylko do funkcji  $w(\theta, \beta, t)$ . Niech funkcje  $H_1(\theta, \beta, t-t_i)$  i  $H_2\left(\theta, \beta, t-t_i - \frac{l}{v}\right)$  przedstawiają drgania powłoki wywołane ruchem pojedynczej siły, o jednostkowej amplitudzie, przy czym pierwsza funkcja odpowiada sytuacji, gdy siła znajduje się na powłoce, a druga funkcja przedstawia stan powłoki po opuszczeniu powłoki przez siłę. Funkcje te można wyznaczyć ze wzorów

$$(4.1) \quad H_1(\theta, \beta, t-t_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_{nk}(t-t_i) \sin a_n \theta \sin b_k \beta,$$

oraz

$$(4.2) \quad H_2 \left( \theta, \beta, t - t_i - \frac{l}{v} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} z_{nk} \left( t - t_i - \frac{l}{v} \right) \sin a_n \theta \sin b_k \beta,$$

przy czym funkcje  $y_{nk}(t - t_i)$  i  $z_{nk} \left( t - t_i - \frac{l}{v} \right)$  określone są wzorami (2.8)–(2.9).

Niech funkcje  $f(w, \theta, \beta, t)$  i  $\psi(u, \theta, \beta, t)$  oznaczają odpowiednio funkcje gęstości prawdopodobieństwa i funkcję charakterystyczną zmiennej losowej  $w(\theta, \beta, t)$ . Między funkcjami tymi zachodzą związki następujące

$$(4.4) \quad f(w, \theta, \beta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuv} \psi(u, \theta, \beta, t) du,$$

$$\psi(u, \theta, \beta, t) = E [e^{iuv}(\theta, \beta, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuv} f(w, \theta, \beta, t) dw.$$

Wykorzystując funkcje  $H_1(\theta, \beta, t - t_i)$  i  $H_2 \left( \theta, \beta, t - t_i - \frac{l}{v} \right)$  określone wzorami (4.1) i (4.2) znajdziemy funkcję charakterystyczną w postaci:

$$(4.5) \quad \psi(u, \theta, \beta, t) = E \left[ \exp \left\{ iu \left[ \int_{t - \frac{l}{v}}^t A(\tau) H_1(\theta, \beta, t - \tau) dN(\tau) + \int_{t_0}^{t - \frac{l}{v}} A(\tau) H_2 \left( \theta, \beta, t - \tau - \frac{l}{v} \right) dN(\tau) \right] \right\} \right].$$

Stosując metodę półniemniników [10], które określone są wzorem

$$(4.6) \quad \ln \psi(u, \theta, \beta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k(\theta, \beta, t)}{k!} (iu)^k,$$

i postępując podobnie jak w przypadku „szumu śrutowego” [11 i 12], a także w pracy [7] otrzymuje się

$$(4.7) \quad \eta_k(\theta, \beta, t) = E [A^k] \int_{t - \frac{l}{v}}^t H_1^k(\theta, \beta, t - \tau) \lambda(\tau) d\tau + E [A^k] \int_{t_0}^{t - \frac{l}{v}} H_2^k \left( \theta, \beta, t - \tau - \frac{l}{v} \right) \lambda(\tau) d\tau.$$



Po podstawieniu (4.7) do wzoru (4.6) i wykonaniu sumowania szeregu otrzymuje się funkcję charakterystyczną w postaci zamkniętej

$$(4.8) \quad \psi(u, \theta, \beta, t) = \exp \left\{ \int_{t-\frac{1}{v}}^t e^{AH_1(\theta, \beta, t-\tau)iu} \xi(A) \lambda(\tau) dA d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^{t-\frac{1}{v}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{AH_2(\theta, \beta, t-\frac{1}{v}-\tau)iu} \xi(A) \lambda(\tau) dA d\tau - \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right\},$$

gdzie  $\xi(A)$  oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa amplitudy sił  $A$ . Znajomość funkcji charakterystycznej pozwala określić funkcję gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia powłoki ze wzoru (4.3). Podobnie można wyprowadzić związki dla prędkości przemieszczeń powłoki. Późnieznymi określonymi wzorem (4.5) pozwalają określić funkcję gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia powłoki w postaci szeregu Grama-Charliera [13], otrzymując

$$(4.9) \quad f(w, \theta, \beta, t) = \sigma_w^{-1} Q^0 - \frac{\eta_3 \sigma_w^{-4} Q^3}{3!} + \frac{\eta_4 \sigma_w^{-5} Q^4}{4!} + \dots$$

gdzie

$$\sigma_w = \sigma_w(\theta, \beta, t), \quad \eta_k = \eta_k(\theta, \beta, t), \quad \sigma_w^2 = \eta_2, \quad E[w] = \eta_1,$$

$$Q^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^k}{dr^k} \left[ \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right], \quad r = \frac{w(\theta, \beta, t) - \eta_1(\theta, \beta, t)}{\sigma_w(\theta, \beta, t)}$$

Podobnie jak wzór (4.9) można określić funkcję gęstości prawdopodobieństwa prędkości przemieszczeń powłoki.

Jeżeli  $\lambda(t) \rightarrow \infty$  dla wszystkich  $t$  w taki sposób, że iloczyny  $\lambda(t) E[A^k]$  dla  $k = 1, 2, 3, \dots$  mają wartości skończone, to późniejsi  $\eta_k(\theta, \beta, t)$  dążą do zera ( $\eta_k \rightarrow 0$ ) dla  $k = 3, 4, \dots$ , a funkcja gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia powłoki (4.9) dąży do rozkładu normalnego. Stąd wynika wniosek, że dla nieskończonej gęstej serii sił o nieskończone małych amplitudach funkcja gęstości prawdopodobieństwa dąży do rozkładu normalnego. Do takiego granicznego przypadku, gdy  $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$  i powłoka wykonuje drgania ustalone ( $t_0 = -\infty$ ), a więc drgania powłoki są stacjonarnym procesem stochastycznym; średnią ilość przekroczeń poziomu  $w_0(\theta, \beta)$  można wyznaczyć ze wzoru Rice'a [9, 11]

$$(4.10) \quad V_{w_0}^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_w}{\sigma_w} \exp\left(-\frac{w_0 - E[w]}{2\sigma_w^2}\right),$$

a prawdopodobieństwo niezawodności  $R(T_0)$  odpowiednio ze wzoru

$$(4.11) \quad R(T_0) = \exp(-V_{w_0}^+ T_0),$$

Wzór (4.11) wynika z założenia, że proces przekroczeń tworzy proces Poissona o intensywności  $V_{w_0}^+$ , co jest prawdziwe tylko wówczas, gdy przekroczenia są zdarzeniami rzadkimi i nie występuje ich grupowanie.

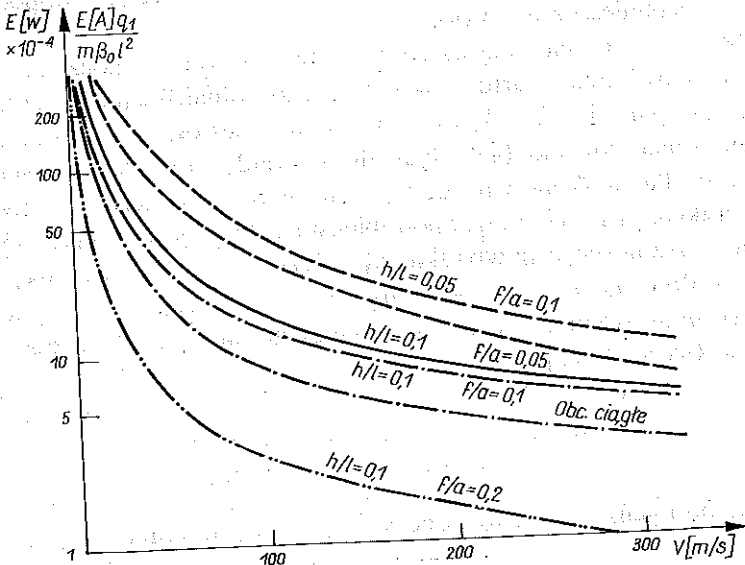
## 5. OBLICZENIA NUMERYCZNE I WNIOSKI

Obliczenia numeryczne wykonano zakładając, że proces zgłoszeń obciążenia jest procesem Poissona ( $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ ), funkcja  $S(t)$  określająca przebieg w czasie siły jest stała, tzn.  $S(t) = 1$ , a drgania mają charakter ustalony ( $t_0 = -\infty$ ).

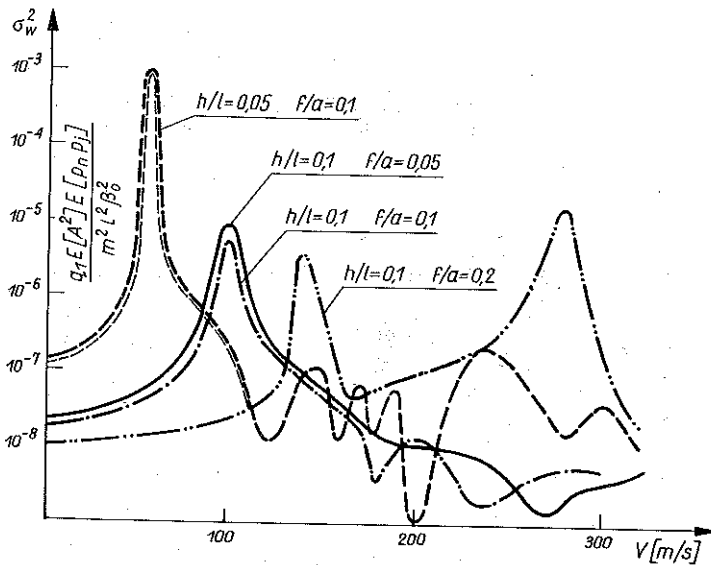
Dla rozkładu poprzecznego przyjęto następujące założenia: a) siły skupione poruszające się wzdłuż jednej prostej  $\gamma = \beta_0/2$ , b) siły skupione poruszające się po losowych prostych, przy czym funkcja gęstości prawdopodobieństwa położenia tych prostych jest jednostajna na całej szerokości powłoki, c) obciążenie jest równomierne wzdłuż promieni wodzących na całej szerokości powłoki.

Obliczenia wykonano przyjmując, że powłoka jest wykonana ze stali o rzucie kwadratowym  $a = l$  i prostokątnym  $l = 2a$ . Analizowano zmianę krzywizny powłoki ( $f/a$ ) na wartość oczekiwaną i wariancję ugięcia w środku rozpiętości.

Wartość oczekiwana (rys. 2) powłoki na rzucie kwadratu jest maksymalna dla małych prędkości przepływu sił i maleje wraz ze wzrostem prędkości



Rys. 2. Wartość średnia ugięcia powłoki,  $a = l$


 Rys. 3. Wariancja ugięcia w środku rozpiętości powłoki,  $a = l$ 

pojawiania się obciążenia. Także ze wzrostem wzniosu-strzałki powłoki  $f/a$  maleje wartość oczekiwana  $E[w]$  przy stałym stosunku grubości do rozpiętości  $h/l$ . Przy wzroście grubości maleje wartość oczekiwana dla identycznych parametrów geometrycznych powłok.

 Tablica 1. Wartość oczekiwana  $E[w]$   $l = 2a$ ,  $f/a = 0,05$   $\left( \times \frac{E[A] q_1}{m\beta_0 l^2} \right)$ 

Prędkość $V$ m/s	Obciążenie po prostej		Obciążenie dowolne	
	$h/a = 0,1$	$h/a = 0,05$	$h/a = 0,1$	$h/a = 0,05$
1	2	3	4	5
20	$0,4242 \times 10^{-3}$	$0,1604 \times 10^{-2}$	$0,2637 \times 10^{-3}$	$0,9964 \times 10^{-3}$
40	$0,2181 \times 10^{-3}$	$0,8024 \times 10^{-3}$	$0,1318 \times 10^{-3}$	$0,4982 \times 10^{-3}$
60	$0,1414 \times 10^{-3}$	$0,5349 \times 10^{-3}$	$0,8790 \times 10^{-4}$	$0,3321 \times 10^{-3}$
80	$0,1060 \times 10^{-3}$	$0,4012 \times 10^{-3}$	$0,6593 \times 10^{-4}$	$0,8491 \times 10^{-3}$
100	$0,8483 \times 10^{-4}$	$0,3209 \times 10^{-3}$	$0,5274 \times 10^{-4}$	$0,1992 \times 10^{-3}$
120	$0,7069 \times 10^{-4}$	$0,2674 \times 10^{-3}$	$0,4395 \times 10^{-4}$	$0,1660 \times 10^{-3}$
140	$0,6060 \times 10^{-4}$	$0,2292 \times 10^{-3}$	$0,3767 \times 10^{-4}$	$0,1423 \times 10^{-3}$
160	$0,5302 \times 10^{-4}$	$0,2006 \times 10^{-3}$	$0,3296 \times 10^{-4}$	$0,1245 \times 10^{-3}$
180	$0,4713 \times 10^{-4}$	$0,1783 \times 10^{-3}$	$0,2960 \times 10^{-4}$	$0,1107 \times 10^{-3}$
200	$0,4242 \times 10^{-4}$	$0,1604 \times 10^{-3}$	$0,2637 \times 10^{-4}$	$0,9964 \times 10^{-4}$
220	$0,3856 \times 10^{-4}$	$0,1459 \times 10^{-3}$	$0,2397 \times 10^{-4}$	$0,9058 \times 10^{-4}$
240	$0,3535 \times 10^{-4}$	$0,1337 \times 10^{-3}$	$0,2197 \times 10^{-4}$	$0,8303 \times 10^{-4}$
260	$0,3263 \times 10^{-4}$	$0,1234 \times 10^{-3}$	$0,2028 \times 10^{-4}$	$0,7664 \times 10^{-4}$
280	$0,3030 \times 10^{-4}$	$0,1146 \times 10^{-3}$	$0,1883 \times 10^{-4}$	$0,7117 \times 10^{-4}$
300	$0,2828 \times 10^{-4}$	$0,1070 \times 10^{-3}$	$0,1758 \times 10^{-4}$	$0,6642 \times 10^{-4}$
320	$0,2651 \times 10^{-4}$	$0,1003 \times 10^{-3}$	$0,1648 \times 10^{-4}$	$0,6227 \times 10^{-4}$

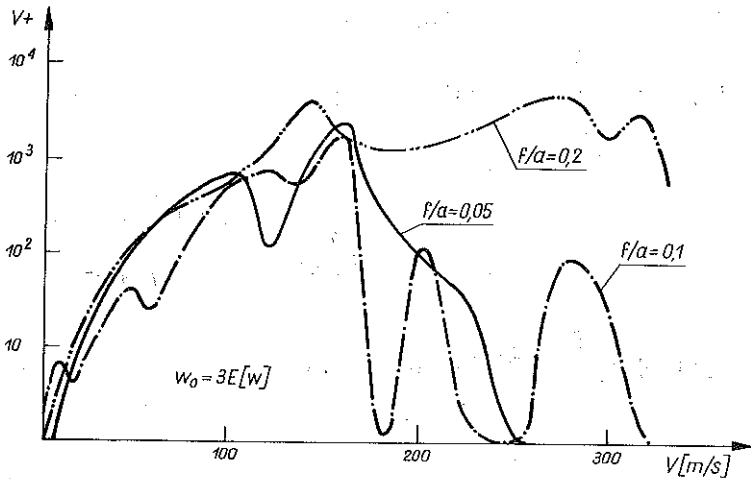
Tablica 2. Wariancja  $\sigma_w^2$ ,  $l = 2a$ ,  $f/a = 0,5$   $\left( \times \frac{q_1 E [A^2] E [p_n p_j]}{m^2 l^2 \beta_0^2} \right)$

V m/s	$h/a = 0,1$				$h/a = 0,05$			
	Obciążenie po prostej	Obciążenie dowlone	Obciążenie ciągłe	Obciążenie po prostej	Obciążenie dowlone	Obciążenie ciągłe		
20	0,6633 × 10 <sup>-6</sup>	0,3174 × 10 <sup>-6</sup>	0,2540 × 10 <sup>-6</sup>	0,1138 × 10 <sup>-4</sup>	0,5456 × 10 <sup>-5</sup>	0,4369 × 10 <sup>-5</sup>		
40	0,3902 × 10 <sup>-6</sup>	0,1873 × 10 <sup>-6</sup>	0,1501 × 10 <sup>-6</sup>	0,1425 × 10 <sup>-4</sup>	0,6942 × 10 <sup>-5</sup>	0,5586 × 10 <sup>-3</sup>		
60	0,3675 × 10 <sup>-6</sup>	0,1776 × 10 <sup>-6</sup>	0,1425 × 10 <sup>-6</sup>	0,8343 × 10 <sup>-3</sup>	0,4165 × 10 <sup>-3</sup>	0,3375 × 10 <sup>-3</sup>		
80	0,5526 × 10 <sup>-6</sup>	0,2701 × 10 <sup>-6</sup>	0,2175 × 10 <sup>-6</sup>	0,2810 × 10 <sup>-4</sup>	0,1416 × 10 <sup>-4</sup>	0,1148 × 10 <sup>-4</sup>		
100	0,1663 × 10 <sup>-5</sup>	0,8219 × 10 <sup>-6</sup>	0,6640 × 10 <sup>-6</sup>	0,6953 × 10 <sup>-5</sup>	0,3506 × 10 <sup>-5</sup>	0,2847 × 10 <sup>-5</sup>		
120	0,7619 × 10 <sup>-4</sup>	0,3805 × 10 <sup>-4</sup>	0,3083 × 10 <sup>-4</sup>	0,2853 × 10 <sup>-6</sup>	0,1572 × 10 <sup>-6</sup>	0,1300 × 10 <sup>-6</sup>		
140	0,1809 × 10 <sup>-5</sup>	0,9104 × 10 <sup>-6</sup>	0,7392 × 10 <sup>-6</sup>	0,3511 × 10 <sup>-6</sup>	0,1846 × 10 <sup>-6</sup>	0,1496 × 10 <sup>-6</sup>		
160	0,2110 × 10 <sup>-6</sup>	0,1080 × 10 <sup>-6</sup>	0,8815 × 10 <sup>-7</sup>	0,1419 × 10 <sup>-5</sup>	0,7154 × 10 <sup>-6</sup>	0,5788 × 10 <sup>-6</sup>		
180	0,5341 × 10 <sup>-7</sup>	0,2809 × 10 <sup>-7</sup>	0,2306 × 10 <sup>-7</sup>	0,3533 × 10 <sup>-6</sup>	0,1845 × 10 <sup>-6</sup>	0,9034 × 10 <sup>-7</sup>		
200	0,1305 × 10 <sup>-6</sup>	0,6616 × 10 <sup>-7</sup>	0,5380 × 10 <sup>-7</sup>	0,8149 × 10 <sup>-6</sup>	0,4094 × 10 <sup>-6</sup>	0,3304 × 10 <sup>-6</sup>		
220	0,1157 × 10 <sup>-7</sup>	0,6397 × 10 <sup>-8</sup>	0,5301 × 10 <sup>-8</sup>	0,4065 × 10 <sup>-7</sup>	0,2212 × 10 <sup>-7</sup>	0,1781 × 10 <sup>-7</sup>		
240	0,9978 × 10 <sup>-8</sup>	0,5437 × 10 <sup>-8</sup>	0,4483 × 10 <sup>-8</sup>	0,2314 × 10 <sup>-6</sup>	0,1172 × 10 <sup>-6</sup>	0,9503 × 10 <sup>-7</sup>		
260	0,4140 × 10 <sup>-8</sup>	0,2416 × 10 <sup>-8</sup>	0,2006 × 10 <sup>-8</sup>	0,4534 × 10 <sup>-6</sup>	0,2279 × 10 <sup>-6</sup>	0,1847 × 10 <sup>-6</sup>		
280	0,8722 × 10 <sup>-8</sup>	0,4643 × 10 <sup>-8</sup>	0,3761 × 10 <sup>-8</sup>	0,2627 × 10 <sup>-6</sup>	0,1324 × 10 <sup>-7</sup>	0,1073 × 10 <sup>-6</sup>		
300	0,5017 × 10 <sup>-7</sup>	0,2512 × 10 <sup>-7</sup>	0,1329 × 10 <sup>-7</sup>	0,4772 × 10 <sup>-7</sup>	0,2471 × 10 <sup>-7</sup>	0,1939 × 10 <sup>-7</sup>		
320	0,9097 × 10 <sup>-8</sup>	0,4723 × 10 <sup>-8</sup>	0,3796 × 10 <sup>-8</sup>	0,5533 × 10 <sup>-8</sup>	0,3680 × 10 <sup>-8</sup>	0,2807 × 10 <sup>-8</sup>		

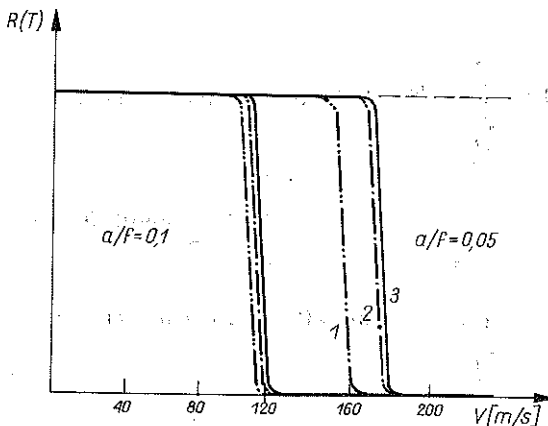
Wariancję przemieszczenia  $\sigma_w^2$  (rys. 3) w środku rozpiętości powłoki na rzucie kwadratowym ma maksimum przy określonej („krytycznej”) prędkości. Wielkość maksimum jest zależna od krzywizny i grubości powłoki. Dla małych stosunków  $f/a$  i  $h/l$  wartość wariancji rośnie i w miarę wzrostu sztywności powłoki prędkość „krytyczna” rośnie i może występować więcej lokalnych maksimów.

Dla dłuższej powłoki  $L = 2a$ , wartości oczekiwane (tablica 1) zachowują się podobnie i również wariancja przemieszczenia  $\sigma_w^2$  (tablica 2) ma jakościowy charakter porównywalny z poprzednią powłoką.

Sposób obciążenia powłoki nie wpływa na jakość wyników. Większe wartości otrzymuje się przy obciążeniu siłami skupionymi działającymi po prostej, następnie siłami skupionymi obciążającymi powłokę dowolnie, a potem



Rys. 4. Przekroczenie poziomu  $w_0 = 3E$  [w] w okresie  $T_0 = 1000$  dni



Rys. 5. Prawdopodobieństwo uszkodzenia powłoki,  $a = l$ ,  $h/l = 0,1$

obciążeniami rozłożonymi. Przekroczenie ustalonego poziomu  $w_0$  przyjęto jako trzykrotne ugięcie statyczne powłoki (rys. 4) w okresie  $T_0 = 1000$  dni ( $l = a$ ) i  $V_+$  jest maksymalne przy prędkościach „krytycznych”, a niezawodność  $R(T_0)$  (rys. 5) ma charakter przeskoku.

Obliczenia wykonano dla 25 form drgań co daje dokładność poniżej 1‰ między następnymi kolejnymi formami drgań.

Przedstawioną w pracy ocenę niezawodności wykonano przy upraszczającym założeniu, że przemieszczenie powłoki ma rozkład normalny. W dokładniejszej analizie można wykorzystać funkcję gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia powłoki określoną wzorem (4.9) i zbudowanej w analogiczny sposób funkcji gęstości prawdopodobieństwa prędkości przemieszczeń powłoki.

## DODATEK

$$J_1(a, b) = \int_{t-\frac{l}{v}}^t e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2} - \frac{a \sin b \frac{l}{v} + b \cos b \frac{l}{v}}{a^2+b^2} e^{-a \frac{l}{v}},$$

$$J_2(a, b) = \int_{t-\frac{l}{v}}^t e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b \sin b \frac{l}{v} - a \cos b \frac{l}{v}}{a^2+b^2} e^{-a \frac{l}{v}},$$

$$J_3(a, b, c) = \int_{t-\frac{l}{v}}^t e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) \sin c(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J_2(a, b-c) - \frac{1}{2} J_2(a, b+c),$$

$$J_4(a, b, c) = \int_{t-\frac{l}{v}}^t e^{-a(t-\tau)} \sin b(t-\tau) \cos c(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J_1(a, b-c) + \frac{1}{2} J_1(a, b+c),$$

$$J_5(a, b, c) = \int_{t-\frac{1}{b}}^t e^{-a(t-\tau)} \cos(t-\tau) \cos c(t-\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} J_2(a, b-c) + \frac{1}{2} J_2(a, b+c).$$

ЛИТЕРАТУРА ЦЫТОВАНА В ТЕКСТЕ

1. L. FRYBA, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Academia, Prague 1972.
2. P. ŚNIADY, *Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem*, Politechnika Wroclawska, 21, 5, 1976.
3. L. FRYBA, *Non-stationary response of a beam to a moving random force*, J. Sound and Vibr., 46, 3, 323-338, 1976.
4. C. C. TUNG, *Random response of highway bridges to vehicles loads*, J. Eng. Mech. Div., 93, EM 5, 73-94, 1967.
5. R. IWANKIEWICZ, P. ŚNIADY, *Vibration of a bridge beam due to highway traffic*, Arch. Mech., 35, 5-6, 671-686, 1983.
6. P. ŚNIADY, *Vibration of a beam due to a random stream of moving forces with random velocity*, J. Sound and Vibr., 97, 1, 23-33, 1984.
7. P. ŚNIADY, *Drgania belki nieskończenie długiej wywołane losową serią sił ruchomych*, Rozpr. Inżyn., 31, 2, 193-201, 1983.
8. Y. K. LIN, *Probabilistic theory of structure dynamics*, New York, Mc Graw-Hill Book Co., 1967.
9. S. H. CRANDAL, W. D. MARK, *Random vibration in mechanical systems*, Academic Press, New York and London 1963.
10. M. FISZ, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1967.
11. S. O. RICE, *Mathematical analysis of random noise*, Bell. Syst. Tech. J., 23, 282, 1944.
12. J. B. ROBERTS, *The response of linear vibratory systems to random impulses*, J. Sound and Vibr., 24, 2, 375-390, 1965.
13. K. SOBczyk, *Metody dynamiki statystycznej*, PWN, Warszawa 1973.

РЕЗЮМЕ

ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НАГРУЖЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ СЕРИЕЙ ПОДВИЖНЫХ СИЛ

Рассматриваются колебания цилиндрической оболочки, вызванные случайной серией подвижных сил. Принято, что амплитуды сил и их поперечное положение имеют случайный характер, а моменты появления на оболочке образуют стохастический точечный процесс. Выведены формулы для математического ожидания и для дисперсии перемещения оболочки, а для процесса Пуассона приведены тоже функция плотности вероятности и характеристическая функция, а также представлена оценка надежности оболочки.

## SUMMARY

DYNAMIC RESPONSE AND RELIABILITY OF CYLINDRICAL SHELL  
TO A RANDOM STREAM OF MOVING FORCES

The problem of dynamic response of a cylindrical shell to the passage of a train of concentrated forces with random amplitudes and positions is considered. Force arrivals at the shell are assumed to constitute the stochastic point process of events. Explicit expressions for the expected value, variance, probability density function and characteristic function of deflection and reliability of the shell are provided.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 grudnia 1985 r.*