

## ANALIZA PROCESU WYCISKANIA OSIOWO-SYMETRYCZNEGO

JAN PIWNIK (BIAŁYSTOK)

W pracy przedstawiono nowe iteracyjne rozwiązanie równań teorii plastycznego płynięcia dla procesu wyciskania osiowo-symetrycznego. Umożliwia ono obliczenie pól naprężeń i odkształceń w deformowanym materiale. Rozwiązanie otrzymano dla warunku plastyczności Hubera-Misesa z pominięciem hipotezy Haara-Kármána. Uwzględniono izotropowe wzmocnienie materiału. Warunki brzegowe dotyczące tarcia określono z doświadczalnego rozkładu funkcji płynięcia w obszarze uplastycznienia. Znajomość doświadczalnych funkcji płynięcia umożliwiło porównanie teoretycznych pól: prędkości przemieszczeń, prędkości odkształceń, intensywności odkształceń i linii prądu z ich rzeczywistymi odpowiednikami. Porównania te wykazały zadowalającą zgodność obydwu grup wyników. Przedstawione rozwiązanie problemu osiowo-symetrycznego może posłużyć do racjonalnej analizy procesów wyciskania metali na zimno.

### 1. WPROWADZENIE

Teoretyczna analiza procesów obróbki plastycznej jest możliwa w ogóle po wprowadzeniu bardzo istotnych założeń upraszczających. Wyznaczanie pól naprężeń i odkształceń w tych procesach opiera się głównie na wynikach teorii plastycznego płynięcia [1, 2, 3, 4 i 5]. W obróbce plastycznej dla większości procesów równania statyki są sprzężone z równaniami kinematyki. Nieliniowość podstawowego układu równań różniczkowych stanu plastycznego, brak warunków brzegowych na powierzchni kontaktu deformowanego materiału z narzędziem zmuszają do stosowania iteracyjnych metod obliczeń dobieranych do każdego problemu oddzielnie. Typowym przykładem takiej sytuacji są osiowo-symetryczne procesy wyciskania.

W zagadnieniach osiowej symetrii podstawowe uproszczenia idą w kierunku rozdzielenia rozwiązań dla naprężeń i prędkości. W tym celu przyjmuje się model ciała sztywno-plastycznego z warunkiem plastyczności Treski i postulatem A. Haara i Th. Kármána [6, 7 i 8]. Uproszczenia te sprowadzają zagadnienie do statycznie wyznaczalnego układu równań różniczkowych typu hiperbolicznego dla naprężeń i analogicznego układu dla prędkości płynięcia. Podstawowym narzędziem matematycznym stosowanym w takich wypadkach jest metoda charakterystyk [1, 2 i 3].

Jednak tak sformułowane uproszczenia dla równań procesu wyciskania osiowo-symetrycznego nie prowadzą do zadania statycznie wyznaczalnego. Wynika to z braku warunków brzegowych dla naprężeń, które umożliwiłyby rozwiązanie zagadnień brzegowych dla równań charakterystyk. Znane metody rozwiązań zagadnień statycznie niewyznaczalnych dotyczą tylko płaskiego stanu odkształcenia [9, 10, 11 i 12].

Interesującą próbę wykorzystania metody charakterystyk do rozwiązania równań stanu plastycznego dla procesu wyciskania osiowo-symetrycznego podjęto w pracy [13]. Przedstawione w niej rozwiązanie uzyskano na drodze iteracyjnej. Rozwiązanie to było przedmiotem ścisłej weryfikacji doświadczalnej w pracach [14, 15 i 16]. Rozbieżności pomiędzy teoretycznymi i doświadczalnymi polami prędkości przemieszczeń były znaczne. Dość dobrą zgodność wyników teorii i eksperymentu stwierdzono dla linii prądu oraz sił. Rozwiązanie zagadnienia osiowo-symetrycznego pokazane w pracy [13] można uznać za określone z grubsza, ale ważne, przybliżenie pól prędkości przemieszczeń i naprężeń w obszarze uplastycznienia materiału wyciskanego przez matrycę stożkową.

Podjęmowane próby rozwiązań równań procesu wyciskania osiowo-symetrycznego na gruncie teorii plastyczności opierają się zwykle na drastycznych uproszczeniach schematów płynięcia plastycznego lub warunku plastyczności. Krytyczną ocenę tych rozwiązań wraz z weryfikacją doświadczalną omówiono obszernie w pracy [17].

Celem tej pracy jest przedstawienie nowego rozwiązania problemu osiowo-symetrycznego wyciskania z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa z pominięciem postulatu A. Haara-Th. Kármána. Równania stanu plastycznego wyrażono nieznaną funkcją płynięcia  $\phi(r, z)$ . Warunki brzegowe odnośnie tarcia określono doświadczalnie. Uwzględniono izotropowe wzmocnienie materiału.

Zastosowany sposób obliczeń, oparty na metodzie iteracji, pozwala na wyznaczenie pól naprężeń i prędkości w każdym punkcie obszaru uplastycznienia. Wyniki teoretyczne dla pól kinematycznych porównano z ich doświadczalnymi odpowiednikami.

## 2. RÓWNANIA I ZAŁOŻENIA PODSTAWOWE

Sformułujemy obecnie równania izotermicznej teorii plastycznego płynięcia dla procesu wyciskania osiowo-symetrycznego. Przyjmijmy układ współrzędnych cylindrycznych  $r, z, \theta$ . Równania równowagi bez sił masowych i bezwładnościowych mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Warunek plastyczności Hubera–Misesa z uwzględnieniem izotropowego wzmocnienia materiału na formę

$$(2.2) \quad (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + (\sigma_\vartheta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6k^2(\beta) = F(\sigma_{ij}).$$

Funkcja  $k(\beta)$  we wzorze (2.2) nie zależy od stanu naprężenia i oznacza granicę plastyczności na ścinanie. Zależy ona od parametru skalarne go  $\beta$ , który może być intensywnością odkształceń postaciowych  $e_i$ . Dalej wygodniej jest zastąpić w (2.2) funkcję  $k(\beta)$  intensywnością naprężeń  $\sigma_i(\beta)$ . Przyjmujemy jednocześnie poprawność hipotezy jednej krzywej materiałowej  $\sigma_i - e_i$  w prostych i złożonych stanach naprężeń. Funkcję  $\sigma_i(\beta) = \sigma_i(e_i)$  określamy następująco:

$$(2.3) \quad \sigma_i = ce_i^m,$$

gdzie stałe  $c$  i  $m$  wyznaczamy z próby jednoosiowego rozciągania lub ściskania.

Wartość intensywności odkształceń  $e_i$  nie jest stała w punktach obszaru uplastycznienia, tj.  $e_i = e_i(r, z)$ ; stąd materiał jest niejednorodny plastycznie. W każdym punkcie obszaru uplastycznienia materiał jest idealnie plastyczny, ale funkcja  $\sigma_i(r, z)$  jest zmienna w polu płynięcia plastycznego.

Niejednorodność plastyczna  $\sigma_i(r, z)$  jest wymuszona odkształceniami plastycznymi i pośrednio utożsamia się ją z izotropowym wzmocnieniem materiału. W rozpatrywanym punkcie obszaru płynięcia plastycznego podczas trwania jednego małego etapu deformacji wartości  $\sigma_i$  i  $e_i$  mogą być przyjmowane za stałe.

Stowarzyszone z warunkiem plastyczności (2.2) prawo plastycznego płynięcia

$$(2.4) \quad \dot{e}_{ij} = \lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

można we współrzędnych cylindrycznych  $r, z, \vartheta$  w rozpatrywanym punkcie obszaru uplastycznienia przedstawić następującymi czterema wzorami:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_z, & \sigma_r &= \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_r, \\ \sigma_\vartheta &= \sigma + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{e}_\vartheta, & \tau_{rz} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{e}_i} \dot{\gamma}_{rz}. \end{aligned}$$

Funkcje  $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{rz}$  określają składowe tensora naprężenia Cauchy'ego. Składowe tensora prędkości odkształceń  $\dot{e}_{ij}$  wyrażają się następująco przez składowe prędkości przemieszczeń  $V_r$  i  $V_z$ :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{e}_r &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, & \dot{e}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial z}, \\ \dot{e}_s &= \frac{V_r}{r}, & \dot{\gamma}_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Intensywność prędkości odkształceń  $\dot{e}_i$  obliczamy ze wzoru

$$(2.7) \quad \dot{e}_i = \left[ \frac{2}{3} \left( \dot{e}_r^2 + \dot{e}_z^2 + \dot{e}_s^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{rz}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Intensywność odkształceń  $e_i$  wzdłuż trajektorii cząstki wyznaczano ze wzorów

$$(2.8) \quad e_i = \int_0^t \dot{e}_i dt,$$

gdzie

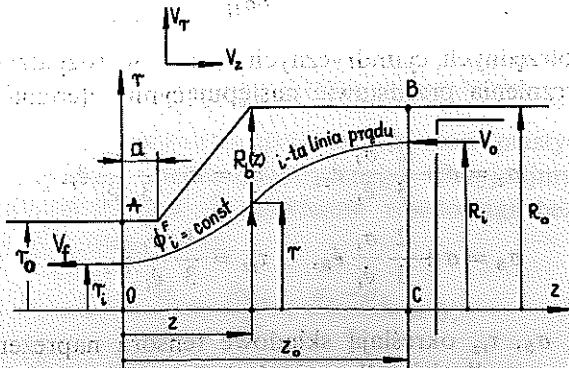
$$dt = \frac{dz}{V_z}$$

Srednie ciśnienie hydrostatyczne  $\sigma$  ma postać

$$(2.9) \quad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_z + \sigma_s}{3}$$

Powyższe równania płynięcia są takie same jak przy idealnej plastyczności. Należy jednak zaznaczyć, że skalarny mnożnik  $\lambda$  w (2.4) w przypadku wzmocnienia izotropowego zależy dodatkowo od parametru  $\beta$ .

Warunki brzegowe dla równań (2.1) i (2.5) można podzielić na trzy grupy: a) kinematyczne, b) na powierzchni tarcia deformowanego materiału z matrycą oraz c) dotyczące sił w przekroju wyjściowym lub na stemple (rys. 1).



Rys. 1

Równania (2.1) i (2.5) z uwzględnieniem (2.6), (2.7), (2.8) i (2.9) tworzą układ sześciu równań zawierających sześć niewiadomych funkcji  $\sigma_r(r, z)$ ,  $\sigma_z(r, z)$ ,  $\sigma_\theta(r, z)$ ,  $\tau_{rz}(r, z)$ ,  $V_r(r, z)$  i  $V_z(r, z)$ . Warunki brzegowe odnośnie tarcia są nieznanne. Postulowane w cytowanej literaturze wzory na tarcie w postaci

$$(2.10) \quad \tau_n = \mu\sigma_t, \quad \tau_n = \mu\sigma_n,$$

są przyjmowane z konieczności, aby uzyskać przybliżone rozwiązanie podstawowego układu równań. We wzorach (2.10)  $\tau_n$  oznacza naprężenia styczne pochodzące od sił tarcia,  $\mu$  współczynnik tarcia oraz  $\sigma_n$  naprężenia normalne.

Układ równań (2.1) i (2.5) nie jest typu hiperbolicznego [1 i 18]. Rozwiązanie tego układu przy omawianych warunkach brzegowych stwarza poważne trudności. Ogólne metody rozwiązywania takiego układu nie są znane, dlatego stosuje się różne uproszczenia. Wydaje się, że podstawową pomocą przy ustalaniu założeń upraszczających powinny być doświadczenia. Uproszczenia powinny być wyrażone wielkościami kinematycznymi, ponieważ są one wtedy łatwiejsze do weryfikacji.

Występujące w warunku plastyczności (2.2) funkcje opisujące izotropowe wzmocnienia są zależne od stanu odkształcenia. Sprzężenie równań opisujących stan naprężenia ze stanem odkształcenia wymaga jednoczesnego rozwiązywania całego układu równań.

Przedstawiony sposób uzyskania rozwiązania polega najpierw na zastąpieniu układu sześciu równań jednym, nieliniowym równaniem, które rozwiążemy metodą kolejnych iteracji. Okazuje się, że równanie to można w obszarze uplastycznienia wyrazić ciągią i  $n$ -krotnie różniczkowalną względem  $r$  i  $z$  funkcją płynięcia  $\phi(r, z)$ . Wtedy niejednorodne składowe prędkości przemieszczeń płynięcia plastycznego muszą być wyrażone przez pochodne funkcji płynięcia. Mają one postać [5 i 19] następującą: składowa promieniowa prędkości

$$(2.11) \quad V_r(r, z) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z},$$

składowa osiowa prędkości

$$(2.12) \quad V_z(r, z) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r}.$$

Przepływ plastyczny ma charakter ustalony. Linie prądu są jednocześnie trajektoriami. Tak określona funkcja płynięcia  $\phi(r, z)$  spełnia tożsamościowo warunek nieściśliwości materiału

$$(2.13) \quad \dot{e}_r + \dot{e}_z + \dot{e}_\theta = 0,$$

i fizycznie oznacza wydatek przepływu. Ta cecha funkcji płynięcia daje bezpośrednią możliwość porównania rozwiązania teoretycznego z doświadczeniem.

Fizyczny wydatek przepływu dla  $i$ -tej linii prądu (rys. 1) na wejściu do obszaru uplastycznienia jest stały i określony jest w sposób następujący:

$$(2.14) \quad \phi_i = \pi R_i^2 |V_0|,$$

gdzie  $i$  oznacza numer kolejnej linii prądu,  $R_i$  odległość danej linii prądu od osi  $z$  z nieodkształconej części oraz  $V_0$  prędkość stempla wywołującego ruch.

Funkcje płynięcia wzdłuż linii prądu są stałe. Sześć równań stanu plastycznego zastąpimy z kolei jednym równaniem wyrażonym pochodnymi funkcji płynięcia  $\phi(r, z)$ . Otrzymujemy je podstawiając składowe prędkości odkształceń (2.6) wyrażone funkcją płynięcia  $\phi(r, z)$  z (2.11) i (2.12) do równań płynięcia (2.5) i równań równowagi (2.1). Równanie (2.1)<sub>1</sub> kolejno różniczkujemy względem zmiennej  $z$  i równanie (2.1)<sub>2</sub> względem zmiennej  $r$ . Następnie tak zróżniczkowane równanie równowagi odejmujemy stronami i otrzymujemy następujące równanie

$$(2.15) \quad \phi^{rrrr} + \phi^{rrzz} + \phi^{zzzz} - \frac{2}{r} \phi^{rrr} - \frac{2}{r} \phi^{rzz} + \frac{3}{r^2} \phi^{rr} - \frac{3}{r^3} \phi^r = \\ = \frac{1}{m} \left[ 2m^{rz} \left( 2\phi^{rz} - \frac{1}{r} \phi^z \right) + (m^{rr} - m^{zz}) \left( \phi^{rr} - \frac{1}{r} \phi^r - \phi^{zz} \right) + \right. \\ \left. + m^r \left( 2\phi^{rrr} - \frac{3}{r} \phi^{rr} + \frac{3}{r^2} \phi^r + 2\phi^{rzz} - \frac{1}{r} \phi^{zz} \right) + \right. \\ \left. + 2m^z \left( \phi^{rzz} - \frac{1}{r} \phi^{rz} + \phi^{zzz} \right) \right].$$

Wielkość  $m$  w (2.15) ma postać

$$(2.16) \quad m(r, z) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(r, z)}{\dot{\epsilon}_i(r, z)},$$

i uwzględnia wpływ wzmocnienia izotropowego na kształt funkcji płynięcia  $\phi(r, z)$ . Górne indeksy w (2.15) oznaczają symbole różniczkowania funkcji  $\phi(r, z)$  i  $m(r, z)$  względem odpowiednich zmiennych.

Oznaczenia i kształt obszaru uplastycznienia przyjmujemy jak to pokazano na rys. 1, na którym uplastycznione pole oznaczono jako  $OABC$ . Kształt linii  $OA$  i  $CB$  ograniczających obszar uplastycznienia najwygodniej jest przyjąć w postaci odcinków prostoliniowych, prostopadłych do osi symetrii. Jest to zgodne z rezultatem doświadczeń [19 i 20]. W ogólnym przypadku kształt linii  $OA$  i  $BC$  może zależeć od dwóch współrzędnych  $r$  i  $z$ .

Wielkości  $a$  i  $z_0$  na rys. 1 określają położenie obszaru płynięcia plastycznego. Możemy je wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym wykorzystujemy wzory na minimum mocy zużytej na odkształcenie plastyczne. Drugi

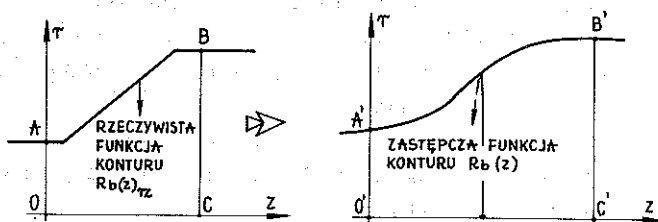
sposób polegać może np. na obraniu wymiaru  $a$ , natomiast wymiar  $z_0$  znajdujemy przyjmując w określonym punkcie bliskiego otoczenia linii  $BC$  ustaloną, małą wartość intensywności odkształceń  $e_i = e_0$ .

Jeżeli warunki brzegowe odnośnie do tarcia określimy doświadczalnym rozkładem funkcji płynięcia, to wymiary  $a$  i  $z_0$  określimy z eksperymentu.

Kształt konturu matrycy wzdłuż  $AB$  musi być opisany funkcją  $R_b(z)$ , która jest ciągłą, jednoznaczną i  $n$ -krotnie różniczkowalną względem  $z$  w każdym punkcie  $z \in [0, z_0]$ . Dodatkowo zakładamy, że w punktach  $A$  ( $z = 0$ ) i  $B$  ( $z = z_0$ ) zachodzą związki

$$(2.17) \quad \frac{dR_b(z)}{dz} = \frac{d^2 R_b(z)}{dz^2} = \frac{d^3 R_b(z)}{dz^3} = \frac{d^4 R_b(z)}{dz^4} = 0.$$

Kształt konturu matrycy  $R_b(z)$  nie przewiduje ostrych naroży. Stąd rzeczywisty kontur z narożami musimy zastąpić konturem gładkim spełniającym postulowane wyżej założenia. Ilustruje to rys. 2. W przypadku matrycy płaskiej po usunięciu ostrych naroży uwzględniamy kształt strefy martwej. Pokazano to na rys. 3. Kształt strefy martwej można np. określić kątem  $\alpha$



Rys. 2

Wyznaczamy go z minimum funkcji na moc realizującą proces wyciskania lub z doświadczeń modelowych.

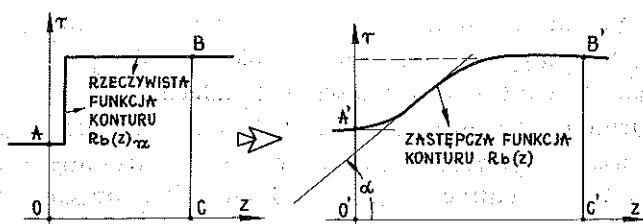
Po określeniu dziedziny funkcji płynięcia  $\phi(r, z)$  podamy dla niej warunki brzegowe. Oto one:

1) Warunki kinematycznej dopuszczalności dla  $\phi(r, z)$  są następujące:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} & a) \quad V_r|_{z=0} = 0, \quad V_z|_{z=z_0} = V_0, \quad V_z|_{z=0} = V_f, \\ & b) \quad V_r|_{r=0} = 0, \\ & c) \quad V_n|_{r=R_b(z)} = 0. \end{aligned}$$

2) Warunki odnośnie do tarcia na linii konturu matrycy:

$$(2.19) \quad \tau_n(z) = t(z).$$



Rys. 3

Naprężenie styczne  $\tau_n(z)$  na powierzchni styku materiału z matrycą (rys. 1) wyznaczone z warunku równowagi jest następujące:

$$(2.20) \quad \tau_n(z)|_{r=R_b(z)} = \tau_{rz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_r - \sigma_z) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Podstawiając do (2.20) funkcje płynięcia (2.5) otrzymujemy

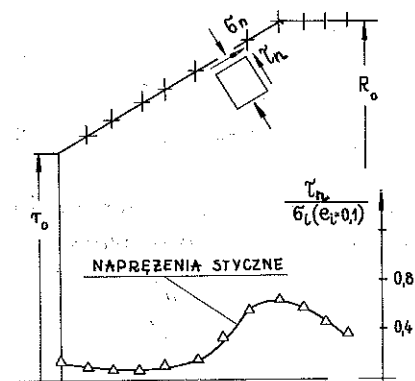
$$(2.21) \quad \tau_n(z)|_{r=R_b(z)} = \frac{\sigma_i(z)}{3} \frac{\dot{\gamma}_{rz}(z)}{\dot{e}_i(z)} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_i(z)}{3} \frac{[\dot{e}_r(z) - \dot{e}_z(z)]}{\dot{e}_i(z)} \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

Porównując funkcję określoną wzorem (2.21) z prawą stroną wzoru (2.19) otrzymaliśmy związek pochodnych funkcji płynięcia  $\phi(r, z)$  w  $r = R_b(z)$  z warunkiem na tarcie. Pochodne te, tj.  $\phi'$ ,  $\phi''$ ,  $\phi'''$ ,  $\phi^z$  i  $\phi^{zz}$  występują we wzorze (2.21) w funkcjach:  $\dot{\gamma}_{rz}(z)$ ,  $\dot{e}_r(z)$ ,  $\dot{e}_z(z)$ ,  $\dot{e}_i(z)$  oraz w przypadku uwzględnienia wzmocnienia również w  $\sigma_i(z)$ .

Zatem do wzoru (2.19) w miejsce  $t(z)$  można podstawić prawą stronę wzorów (2.10) lub jakąś inną funkcję wyrażającą przebieg naprężeń stycznych od sił tarcia wzdłuż konturu matrycy.

W naszym przypadku za funkcję  $t(z)$  przyjęto prawą stronę wzoru (2.21), do którego podstawiono doświadczalne funkcje:  $\dot{e}_r(z)$ ,  $\dot{e}_z(z)$ ,  $\dot{\gamma}_{rz}(z)$ ,  $\dot{e}_i(z)$  i  $\sigma_i(z)$ . Te doświadczalne funkcje pól kinematycznych otrzymano z doświadczalnego rozkładu funkcji płynięcia  $\phi_B(r, z)$  w obszarze uplastycznienia próbki ze stopu PA2, którą wyciskano na zimno z redukcją średnicy 50 mm do 33 mm i kątem rozwarcia tworzących matrycy  $2\alpha = 60^\circ$ . Wykres naprężeń stycznych  $\tau_n(z) = t(z)$  od sił tarcia w rozpatrywanym przypadku pokazano na rys. 4. Z prawej strony rys. 4 na osi pionowej odłożono bezwymiarowe wartości ilorazu naprężeń stycznych do intensywności naprężeń branej przy  $e_i = 0,1$ , tj.:  $\tau_n(z)/\sigma_i(e_i = 0,1)$ . Punkty oznaczone trójkątami na wykresie odpowiadają naprężeniom stycznym od sił tarcia. Są one przyporządkowane tym miejscom z linii konturu matrycy, które oznaczono krzyżykami. Z rys. 4 widzimy, że obliczone z (2.21) wzorami płynięcia doświadczalne naprężenia tarcia przyjmują największe wartości w rejonach naroży matrycy. Rozkład  $\tau_n(z)$  jest nierównomierny i jakościowo odbiega od powszechnie przyjmowanych założeń odnośnie do tarcia w obróbce plastycznej wyrażonych wzorami (2.10). Bardziej szczegółowo omówiono ten problem w pracy [20].





Rys. 4

Równanie (2.15) z omawianymi warunkami brzegowymi jest nieliniowym związkiem względem nieznanej funkcji  $\phi(r, z)$ . Ogólna teoria rozwiązywania takich równań jest nieznana. W takich przypadkach stosujemy najczęściej metodę kolejnych iteracji [20, 21 i 22]. Jeżeli nieznana funkcję płynięcia  $\phi(r, z)$  w (2.15) określimy w postaci pewnego wyrażenia analitycznego, to takie postępowanie ma cechy metody przewidywania rozwiązania opartej na uproszczeniach kinematycznych. Typ wyrażenia analitycznego można przewidzieć opierając się na intuicji, albo najpewniej na wnioskach z wyników pomiarów współrzędnych doświadczalnych linii prądu. Wyrażenia na  $\phi(r, z)$  mogą zawierać niewiadome funkcje zależne od jednej lub dwu współrzędnych. Te niewiadome funkcje wyznaczamy iteracyjnie z nieliniowego względem nich równania stanu plastycznego (2.15).

Punktem wyjścia przy opracowywaniu prezentowanego rozwiązania były wnioski z doświadczalnych wykresów funkcji płynięcia w obszarach uplastycznienia wyciskanych na zimno cylindrycznych próbek ze stopu aluminium PA2 [20]. Pokażemy teraz dla ilustracji niektóre wyniki doświadczeń.

### 3. DOŚWIADCZALNE ROZKŁADY FUNKCJI PŁYNIĘCIA

Doświadczalne rozkłady wydatku przepływu utożsamionego z funkcją płynięcia  $\phi(r, z)$  otrzymano dla czterech wyciskanych na zimno próbek cylindrycznych ze stopu aluminium PA2. Realizowano następujące parametry procesu wyciskania:

$$1) \quad \frac{D}{d} = \frac{70}{56,7}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad R = 0,35,$$

$$2) \quad \frac{D}{d} = \frac{50}{33}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad R = 0,57,$$

$$3) \quad \frac{D}{d} = \frac{50}{19,08}, \quad \alpha = 60^\circ, \quad R = 0,88,$$

$$4) \quad \frac{D}{d} = \frac{50}{19,5}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad R = 0,88,$$

gdzie  $D$  oznacza średnicę początkową w mm,  $d$  średnicę po wyciśnięciu w mm,  $\alpha$  kąt nachylenia tworzącej otworu matrycy do osi symetrii oraz

$$(3.1) \quad R = 1 - \frac{d^2}{D^2}$$

stopień redukcji.

Wyciskanie prowadzono z prędkością stempla  $V_0 = 15$  mm/min bez smarowania, ale z wysoką gładkością powierzchni próbek i matryc. Przed wyciskaniem próbki poddano wyżarzaniu ujednorodniającemu. Proces wyciskania przerywano po ustaleniu się wartości siły na znacznym odcinku przemieszczenia stempla. Było to zewnętrznym objawem osiągnięcia ustalonego etapu płynięcia plastycznego.

Próbki składały się z dwóch półcylicydrycznych połówek. Na płaszczyznę podziału jednej z połówek naniesiono metodą mechanicznego nacinania siatkę kwadratową złożoną z linii oddalonych o  $2 \pm 0,1$  mm. Obrazy zdeformowanych siatek, jak też inne szczegółowe informacje dotyczące tego doświadczenia, omówiono obszernie w pracach [17 i 20].

Linie wzdłużne zdeformowanych uprzednio kwadratowych siatek przyjęto za trajektorie. Trajektorie te uważa się dalej za linie prądu. Wtedy podstawową informacją doświadczalną o płynięciu plastycznym są pomierzone współrzędne  $r$  i  $z$  poszczególnych punktów leżących na kolejnych  $i$ -tych liniach prądu.

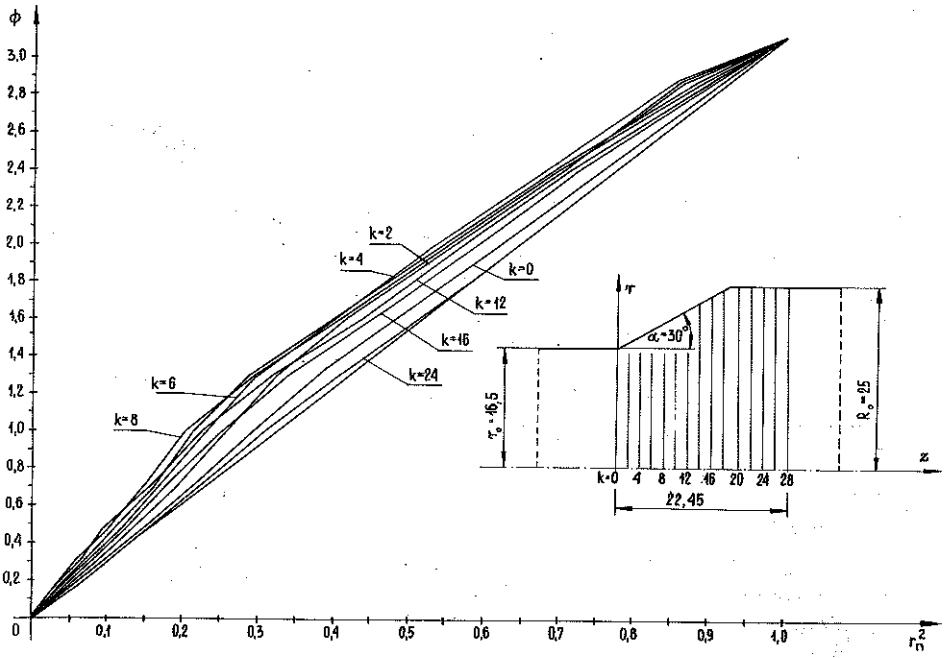
Bezwymiarowe wartości funkcji płynięcia  $\phi(r, z)$  wzdłuż  $i$ -tych linii prądu obliczono ze wzoru

$$(3.2) \quad \phi_i = \pi \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2$$

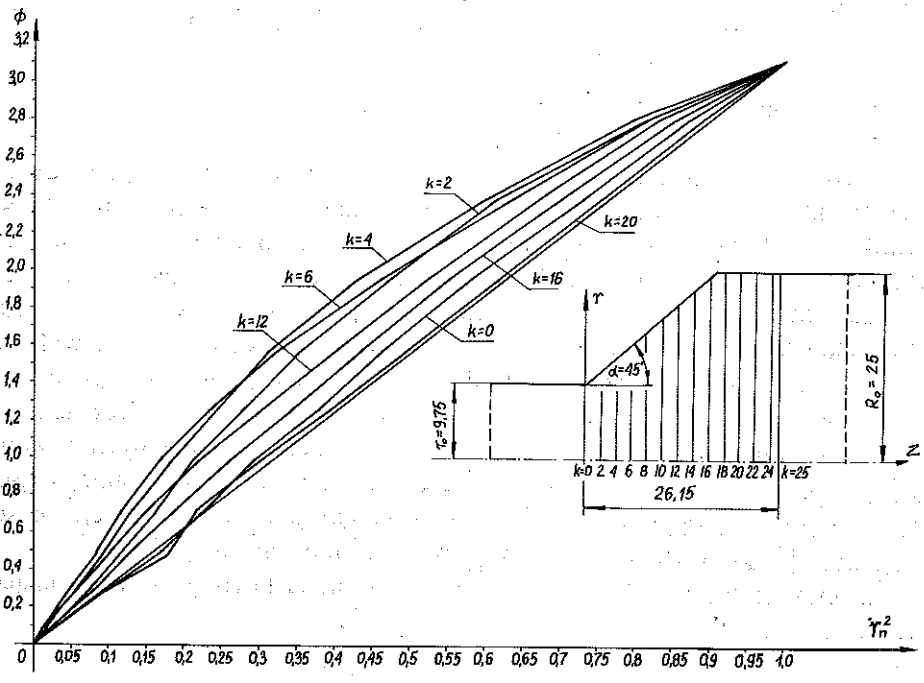
Wzór (3.2) otrzymano dzieląc (2.14) przez iloczyn  $R_0 |V_0|$ . Wartość  $\phi_i$  jest inna w każdym punkcie  $k$ -tego przekroju współrzędnej  $z$  w obszarze płynięcia i wynika z położenia linii prądu; stąd  $\phi = \phi(r, z)$ . Dalej wygodniej jest wprowadzić do opisu  $\phi(r, z)$  bezwymiarową współrzędną  $r_n(r, z)$ . Ma ona postać (rys. 1)

$$(3.3) \quad r_n(r, z) = \frac{r}{R_b(z)}$$

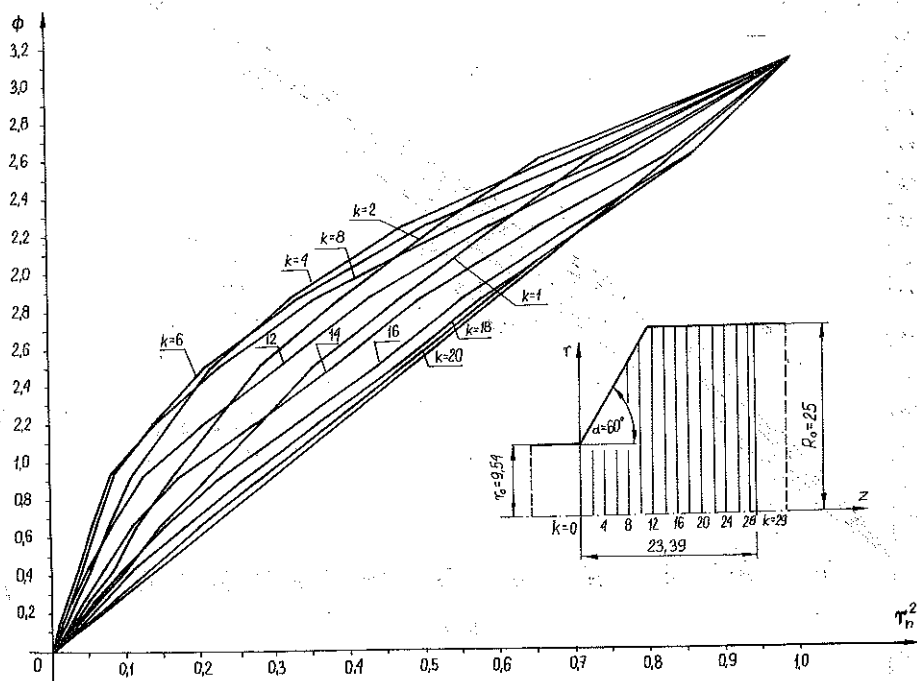
Wprowadzenie bezwymiarowej współrzędnej  $r_n(r, z)$  uniezależnia opis  $\phi(r, z)$  od kształtu konturu matrycy.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

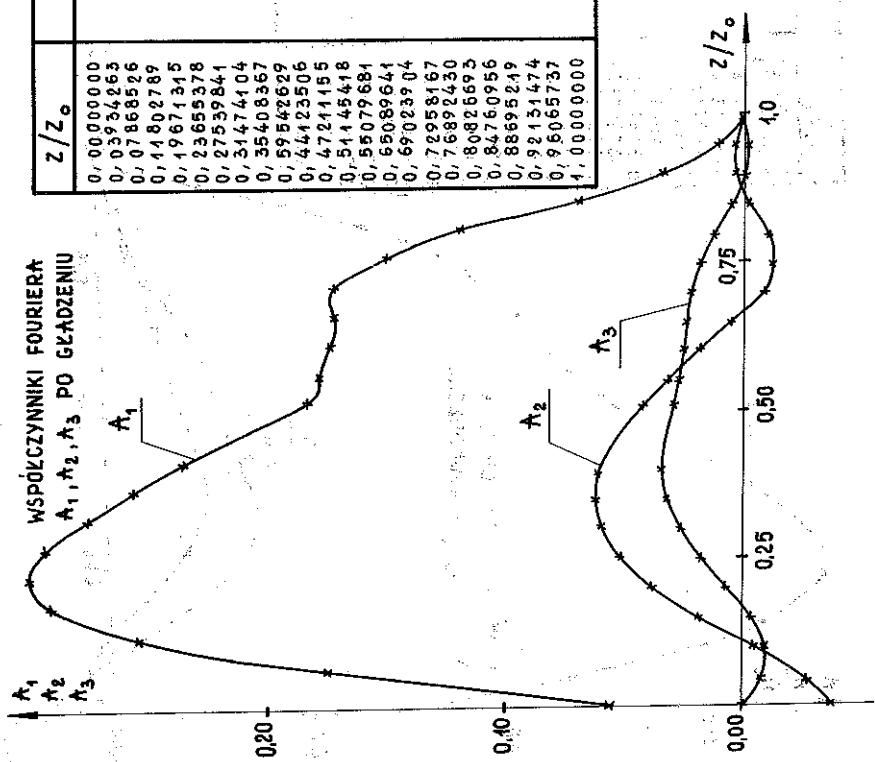
Wykresy bezwymiarowych funkcji  $\phi(r, z)$  wyrażone we współrzędnych  $r_n^2(r, z)$  dla rozpatrywanych trzech próbek zestawiono na rys. 5, 6 i 7. Na rysunkach tych na osi pionowej odłożono wartości  $\phi$  obliczone ze wzoru (3.2), natomiast na osi poziomej wartości  $r_n^2(r, z)$  obliczone według wzoru (3.3). Funkcję  $\phi(r, z) = \phi[r_n^2(r, z)]$  przedstawiono tam jako zbiór wykresów  $\phi = \phi(r_n^2)$ , odpowiadających  $k$ -tym przekrojom współrzędnej  $z$ . Doświadczalne wykresy  $\phi = \phi(r_n^2)$  wskazują, że we wszystkich czterech próbkach wartości  $\phi(r, z)$  można przedstawić jako sumę dwóch odcinków, tj.  $\pi r_n^2$  i  $\delta\phi_B$ . Odcinek  $\pi r_n^2$  odpowiada funkcji płynięcia w skrajnych przekrojach współrzędnej  $z$ , które oddzielają pole niejednorodnego płynięcia plastycznego od pozostałej części. Doświadczalne wykresy  $\phi = \phi(r_n^2)$  w  $k$ -tych przekrojach współrzędnej  $z$  nasuwa sposób aproksymacji  $\phi(r, z)$  w obszarze uplastycznienia.

Doświadczalną funkcję płynięcia  $\phi_B(r, z)$  przedstawimy w następującej postaci:

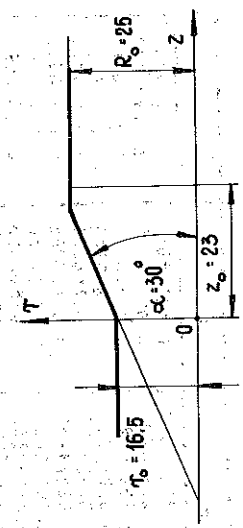
$$(3.4) \quad \phi_B(r, z) = \pi r_n^2(r, z) + \delta\phi_B(r, z).$$

Wyraz  $\pi r_n^2(r, z)$  odpowiada przepływowi umownie jednorodnemu, natomiast funkcja  $\delta\phi_B(r, z)$  daje główny wkład do opisu niejednorodnych składowych prędkości odkształceń [19 i 20]. Kształty doświadczalnych wykresów  $\phi = \phi(r_n^2)$  wskazują, że funkcję  $\delta\phi_B(r, z)$  można dokładnie aproksymować zbieżnym

WSPÓŁCZYNNIKI FOURIERA  
 $A_1, A_2, A_3$  PO GŁADZENIU

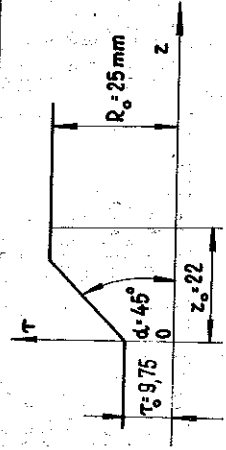
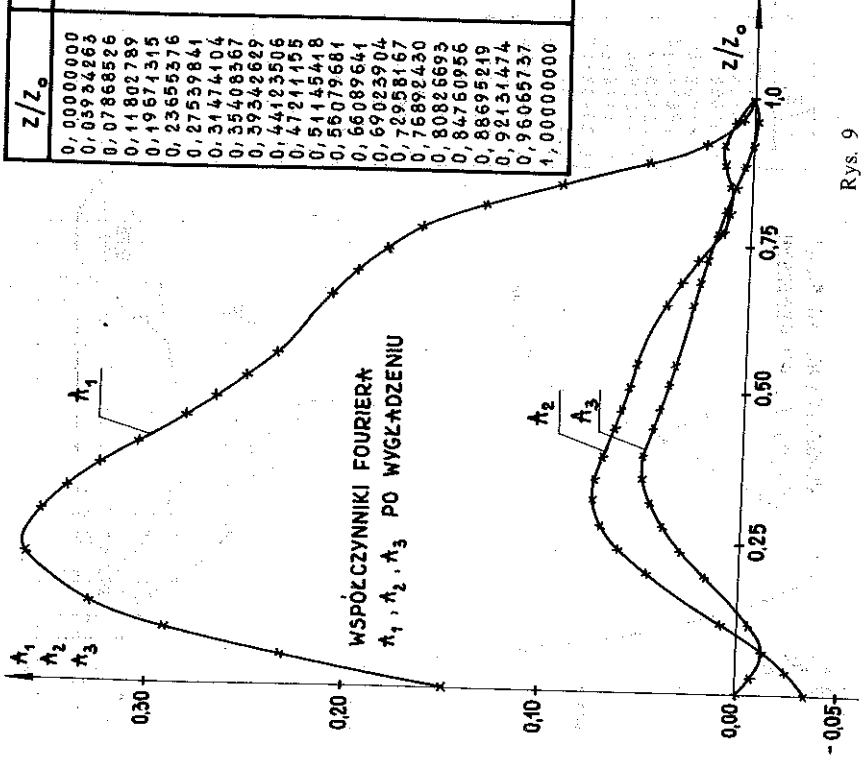


$z/z_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
0,00000000	0,15140693	-0,03565513	-0,00090618
0,03936263	0,23146706	-0,02686879	-0,00747119
0,07868526	0,29145523	-0,01865979	-0,01264248
0,11802789	0,32960787	0,00845784	-0,00564633
0,15737052	0,36226176	0,04754634	0,01662502
0,19671315	0,36221947	0,06498846	0,03926540
0,23605578	0,35472632	0,07107770	0,03967952
0,27539841	0,34289357	0,07564625	0,04674692
0,31474104	0,32618292	0,07854806	0,05031191
0,35408367	0,30519658	0,078312	0,05037450
0,39342629	0,28225514	0,06497817	0,04643903
0,43276892	0,26856351	0,06173677	0,04333039
0,47211155	0,25166578	0,05848381	0,03940693
0,51145418	0,23618226	0,05527765	0,03491586
0,55079681	0,21833651	0,04439528	0,02732841
0,59013944	0,19773251	0,03364761	0,02419593
0,62948207	0,18284651	0,02460692	0,02096644
0,66882470	0,16617853	0,01477523	0,01760992
0,70816733	0,13204820	0,01082993	0,01384371
0,74751000	0,09574926	0,00975249	0,00925432
0,78685263	0,05000810	0,01416338	0,00302096
0,82619526	0,02213698	0,01440179	0,00013193
0,86553789	0,00040242	0,00954988	-0,00125016
0,90488052	0,00067490	0,00021375	-0,00057652

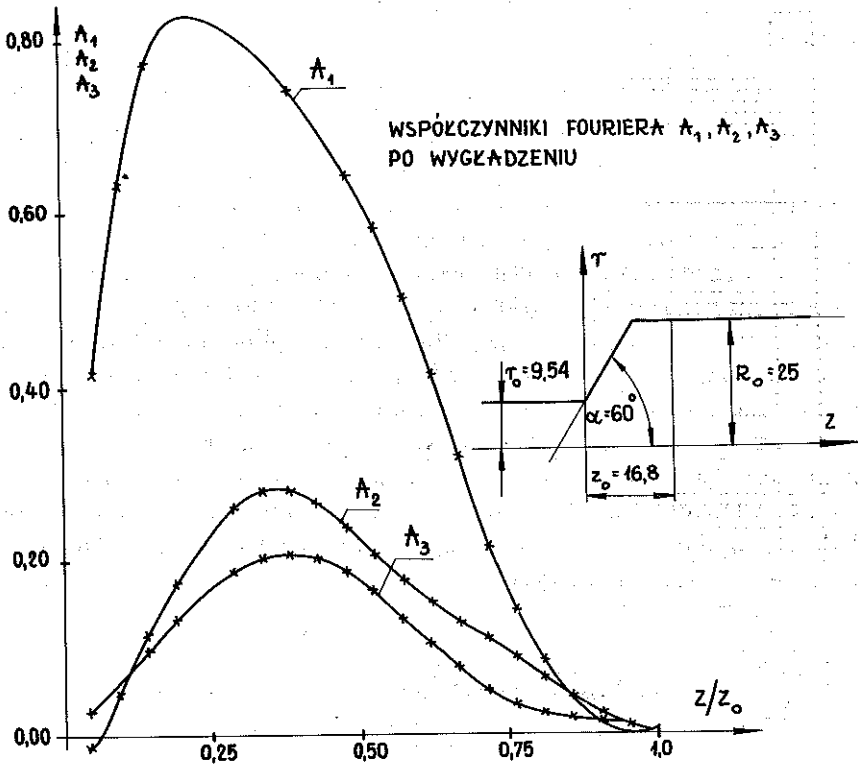


Rys. 8

$z/z_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
0,00000000	0,15110693	-0,03545513	0,00090618
0,03924863	0,23146706	-0,02686879	-0,00944749
0,07868526	0,29145523	-0,01965979	-0,01264248
0,11807789	0,32950787	0,00815784	0,016664633
0,19671315	0,36226476	0,04754634	0,01662502
0,2365376	0,36224947	0,06196846	0,029265640
0,27539841	0,35472832	0,07107770	0,03967952
0,31474104	0,34269357	0,07564625	0,04674692
0,35408367	0,32618292	0,07554806	0,0503191
0,39342629	0,30519638	0,07078312	0,05037450
0,44123506	0,28225514	0,06497817	0,04643903
0,47211455	0,26834931	0,06173677	0,04353039
0,51145418	0,25166578	0,05818381	0,03940893
0,56079681	0,23614226	0,05527765	0,03481586
0,66089641	0,21083651	0,04139528	0,02732841
0,69023904	0,19773251	0,03364781	0,02649593
0,72938167	0,18284661	0,02460692	0,02098644
0,7682430	0,16617863	0,01427323	0,01760992
0,8082693	0,15201820	0,01082993	0,01284377
0,84780956	0,09574916	0,00975249	0,00825432
0,88695219	0,05000810	0,01416358	0,00302096
0,92131474	0,02212638	0,01410179	0,00013193
0,96065737	0,00402442	0,00954988	-0,00125016
1,00000000	0,00067490	0,00021375	-0,00057662



Rys. 9



$z/z_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
0,04761905	0,41312806	0,02109756	0,01956272
0,09523810	0,63235964	0,04677751	0,05376984
0,14285714	0,76997220	0,11033167	0,09426871
0,19047619	0,82186715	0,17369992	0,13365516
0,28571429	0,81088337	0,26263261	0,18790965
0,33333333	0,77823521	0,28044143	0,20167137
0,38095238	0,73956611	0,27919325	0,20612092
0,42857143	0,69409641	0,26573995	0,20113617
0,47619048	0,64182603	0,24008154	0,18671712
0,52380952	0,58275499	0,20221801	0,16286577
0,57142857	0,50250740	0,17484330	0,13271318
0,61904762	0,41430362	0,15005120	0,10296883
0,66666667	0,31814362	0,12784173	0,07363072
0,71428571	0,21402742	0,10821488	0,04469885
0,76190476	0,13883583	0,08535474	0,03024729
0,80952381	0,08034496	0,06314656	0,02015198
0,85714286	0,04022920	0,03920944	0,01733633
0,90476190	0,01346533	0,02068605	0,01303008
0,95238095	0,00005336	0,00757639	0,00723324
1,00000000	-0,00000471	-0,00011953	-0,00005420

Rys. 10

podwójnym szeregiem trygonometrycznym [19 i 20]. Wtedy wzór na  $\phi_B(r, z)$  ma ostateczną postać

$$(3.5) \quad \phi_B(r, z) = \pi r_n^2 + A_1(z) \sin \pi r_n^2 + A_2(z) \sin 2\pi r_n^2 + \dots + A_m(z) \sin m\pi r_n^2.$$

Funkcje  $A_m(z)$  w (3.5) są zależne tylko od współrzędnej  $z$ . Założenie to oznacza, że główny przyrost funkcji  $\delta\phi_B(r, z)$  jest wyróżniony kierunkiem ruchu stempla, tj. osią  $z$ . Do dalszej analizy wzór (3.5) brano tylko z wyrazami  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$ . Wartości współczynników  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$  i  $A_3(z)$  w zależności (3.5) obliczano dla trzech próbek metodą najmniejszych kwadratów. Następnie funkcje te wygładzano i trzykrotnie różniczkowano numerycznie względem zmiennej  $z$ . Zastosowano do tego celu technikę spline funkcji sześcienniej [2]. Wyniki wygładzania wykresów funkcji  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$  i  $A_3(z)$  dla trzech spośród czterech rozpatrywanych próbek podano na rys. 8, 9 i 10.

Analizując doświadczalne wykresy  $\phi = \phi(r_n^2)$  na rys. 4, 5, 6 i 7 oraz kształty funkcji  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$  i  $A_3(z)$  na rys. 8, 9 i 10 można zauważyć, że w omawianych warunkach wyciskania na zimno wartości niejednorodnej składowej wydatku  $\delta\phi_B(r, z)$  rosną ze wzrostem stopnia redukcji i kąta rozwarcia tworzących matrycy.

#### 4. POSTAĆ ROZWIĄZANIA FUNKCJI PŁYNIĘCIA

Konstrukcja funkcji płynięcia  $\phi(r, z)$  w obszarze uplastycznienia  $OABC$  (rys. 1) musi spełniać wymagania stawiane przez warunki brzegowe równania (2.15), jak też powinna dawać zgodny z doświadczeniem opis wykresów tej mierzalnej wielkości. Kierując się tymi przesłankami zaproponowano następującą, ogólną postać rozwiązania równania (2.15):

$$(4.1) \quad \phi(r, z) = \pi r_n^2 + \sum_{m=1}^n A_m(z) \sin m\pi r_n^2 + \sum_{m=1}^n a_m(z) \left[ \frac{1}{m} \sin m\pi r_n^2 + \frac{1}{m+1} \sin (m+1) \pi r_n^2 \right].$$

Zaletą konstrukcji  $\phi(r, z)$  w formie (4.1) polega na tym, że do wzorów na naprężenie styczne  $\tau_n(z)$  na powierzchni styku materiału z matrycą wchodzi tylko funkcje zależne od wyrazu  $\pi r_n^2$  i szereg  $\sum_{m=1}^n A_m(z) \sin m\pi r_n^2$ . Funkcje  $a_m(z)$  we wzorze (2.21) na  $\tau_n(z)$  w  $r_n = 1$  nie występują (są one niewiadome). Konstrukcja  $\phi(r, z)$  w postaci (4.1) zawiera funkcje  $A_m(z)$  i  $a_m(z)$  zależne tylko od współrzędnej  $z$ . Funkcje  $A_m(z)$  wyznaczamy iteracyjnie z warunku (2.19) na tarcie.



Po podstawieniu pochodnych  $\phi(r, z)$  wyznaczonych z (4.1) do równania (2.15) otrzymamy w ustalonej wartości współrzędnej  $r$  silnie nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne względem nieznanymi funkcji  $a_m(z)$ .

Jeżeli warunek na tarcie określimy doświadczalnym rozkładem funkcji płynięcia  $\phi_B(r, z)$ , to uwzględniając (3.5) znajdziemy

$$(4.2) \quad \phi(r, z) = \phi_B(r, z) + \sum_{m=1}^n a_m(z) \left[ \frac{1}{m} \sin m\pi r_n^2 + \frac{1}{m+1} \sin(m+1)\pi r_n^2 \right].$$

Funkcja  $\phi_B(r, z)$  w (4.2) określa tę część bezwymiarowego wydatku przepływu  $\phi(r, z)$ , który jednoznacznie i wyłącznie określa naprężenia tarcia  $\tau_n(z)$ . Wzór (4.1) na  $\phi(r, z)$  można przedstawić w równoważnej postaci

$$\phi(r, z) = \pi r_n^2 + \sum_{m=1}^n A_m^t(z) \sin m\pi r_n^2,$$

gdzie

$$(4.3) \quad \begin{aligned} A_1^t(z) &= A_1(z) + a_1(z), \\ A_2^t(z) &= A_2(z) + \frac{1}{2} [a_1(z) + a_2(z)] \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Wyrażenie (4.3)<sub>1</sub> aproksymujące teoretyczną funkcję płynięcia  $\phi(r, z)$  jest takie samo jak przy opisie jej doświadczalnych wykresów. Różne są tylko wykresy funkcji  $A_m(z)$  i  $A_m^t(z)$ . W doświadczeniu funkcje  $A_m(z)$  określimy z pomiarów współrzędnych linii prądu, natomiast w teorii postaci tych funkcji wyznaczamy iteracyjnie z równania stanu plastycznego (2.15) i oznaczamy je jako  $A_m^t(z)$ .

Na liniach ograniczających uplastycznione pole  $OABC$  (rys. 1) zakładamy brak nieciągłości prędkości przemieszczeń i odkształceń. Wymaga to, aby w punktach  $z=0$  i  $z=z_0$  funkcje  $A_m^t(z)$  i ich pochodne spełniały następujące warunki:

$$(4.4) \quad A_m^t(z) \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{dA_m^t(z)}{dz} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{d^2 A_m^t(z)}{dz^2} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = 0,$$

lub uwzględniając wzory (4.3)<sub>2,3</sub>

$$(4.5) \quad A_m(z) \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{dA_m(z)}{dz} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{d^2 A_m(z)}{dz^2} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = 0,$$

$$(4.6) \quad a_m(z) \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{da_m(z)}{dz} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = \frac{d^2 a_m(z)}{dz^2} \Big|_{z=0}^{z=z_0} = 0.$$

Spełnienie warunków (4.4) lub (4.5) i (4.6) zapewnia spełnienie wszystkich kinematycznych warunków: (2.17), (2.18) przez funkcję  $\phi(r, z)$  [20].

W przykładzie obliczeniowym ilustrującym metodę rozwiązania wykorzystano skrócony wariant wzoru (4.1) na  $\phi(r, z)$ , tj.

$$(4.7) \quad \phi(r, z) = \pi r_n^2 + A_1(z) \sin \pi r_n^2 + A_2(z) \sin 2\pi r_n^2 + A_3(z) \sin 3\pi r_n^2 + a(z) \left[ \sin \pi r_n^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi r_n^2 \right].$$

Równoważne, skrócone wyrażenie (4.3) na  $\phi(r, z)$  ma formę

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \phi(r, z) &= \pi r_n^2 + A_1^t(z) \sin \pi r_n^2 + A_2^t(z) \sin 2\pi r_n^2 + A_3^t(z) \sin 3\pi r_n^2, \\ A_1^t(z) &= A_1(z) + a(z), \\ A_2^t(z) &= A_2(z) + \frac{1}{2} a(z), \\ A_3^t(z) &= A_3(z). \end{aligned}$$

Funkcje  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$ ,  $A_3(z)$  oraz ich pierwsze, drugie i trzecie pochodne numeryczne względem zmiennej  $z$  są dalej znane z doświadczenia. Funkcje te jednoznacznie określają rzeczywiste wykresy naprężeń stycznych od sił tarcia, których wykres dla rozpatrywanej próbki obliczony wzorem (2.21) jest przedstawiony na rys. 4.

Uwzględniając rzeczywiste dane brzegowe, w tym również zasięg i kształt obszaru uplastycznienia  $OABC$  (rys. 1), wyznaczamy iteracyjnie nieznaną funkcję  $a(z)$  z równania (2.15) przy ustalonej wartości współrzędnej  $r$ . Najkorzystniej z obliczeniowego punktu widzenia przyjmując  $r = R_b(z)$ , tj.  $r_n = 1$ . Odpowiada to znanej linii konturu matrycy, która jest jednocześnie znaną skrajną linią prądu w obszarze uplastycznienia  $OABC$  (rys. 1).

Dzięki odpowiedniej konstrukcji wzoru (4.7) na  $\phi(r, z)$  udało się ograniczyć występowanie w (2.15) (przy  $r_n = 1$ ) pochodnych nieznannej funkcji  $a(z)$  aż do rzędu pierwszego, tj.  $da(z)/dz$ . Przekształcając równanie (2.15), po podstawieniu do niego pochodnych funkcji  $\phi(r, z)$  określonej wzorem (4.7) dla  $r_n = 1$ , otrzymujemy następującą postać nieznannej funkcji  $a(z)$

$$(4.9) \quad a(z) = \frac{f - \phi_B^{rrrr} - \phi_B^{zzzz} - 2 \frac{da}{dz} F^{rrz} - \phi_B^{zzzz} - 4 \frac{da}{dz} F^{zzz}}{F^{rrrr} + F^{rrzz} + F^{zzzz} - \frac{2}{R_b(z)} [F^{rrr} + F^{rzz}]} + \frac{1}{R_b(z)} \left[ 2\phi_B^{rzz} + 2\phi_B^{rrr} + \frac{3}{R_b^2(z)} \phi_B^r - \frac{3}{R_b(z)} \phi_B^{rr} \right] \frac{1}{F^{rrrr} + F^{rrzz} + F^{zzzz} - \frac{2}{R_b(z)} [F^{rrr} + F^{rzz}]}$$

Funkcja  $f$  we wzorze (4.9) jest prawą stroną równania (2.15) dla  $r_n = 1$

i zależy nieliniowo od  $a(z)$ ,  $da/dz$ , pochodnych  $\phi_B(r, z)$  i danych materiałowych. Wyrażenie na funkcję  $\phi_B(r, z)$  i jej pochodne w (4.6) wzięto z doświadczenia i są one określone wzorem (3.15) obciążonym do trzech współczynników:  $A_1(z)$ ,  $A_2(z)$  i  $A_3(z)$ . Funkcja  $F(r, z)$  występująca w (4.9) ma postać

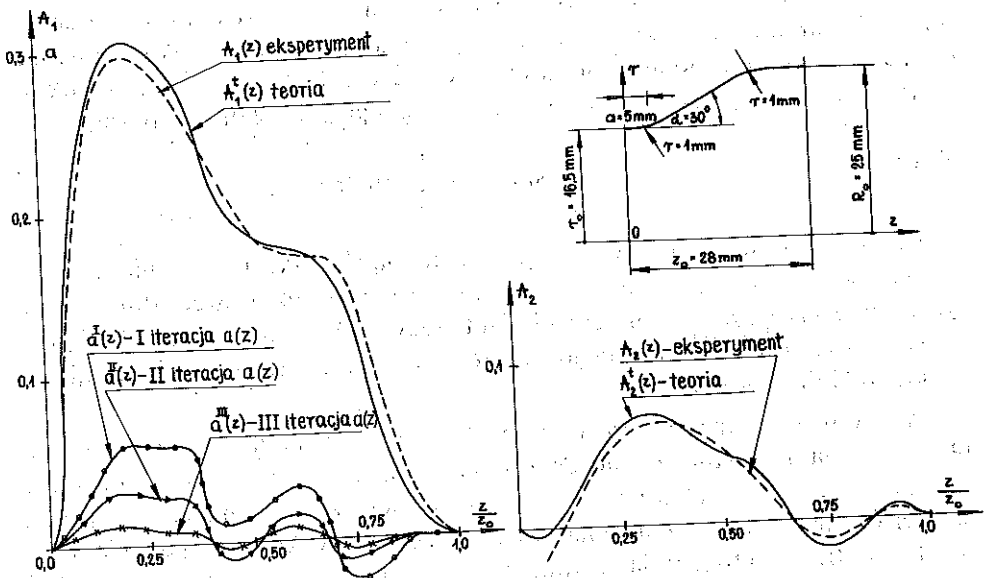
$$(4.10) \quad F(r, z) = \sin \pi r_n^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi r_n^2.$$

Górne indeksy w (4.9) przy  $\phi$  i  $F$  oznaczają kilkakrotne różniczkowanie po odpowiednich zmiennych. Funkcja  $a(z)$  o postaci (4.9) uwzględnia rzeczywiste dane brzegowe i wzmocnienie izotropowe. Wymiary  $a$  i  $z_0$  określające zasięg obszaru uplastycznionego  $OABC$  (rys. 1) wzięto z doświadczalnego rozkładu linii prądu [20].

W pierwszym kroku iteracji (przy wyznaczaniu  $a(z)$ ) do prawej strony (4.9) wstawiamy znane z założenia funkcje  $R_b(z)$ ,  $\phi_B(r, z)$  i ich pochodne. Funkcja  $a(z)$  i jej pochodne występujące we wzorze na funkcję  $f$  przyjmują w pierwszym kroku z założenia wartości zerowe w każdym punkcie przedziału  $z \in [0, z_0]$ . Obliczenia prowadzimy przy  $r = R_b(z)$ , tj. dla skrajnej linii prądu, która jest znana jako linia konturu matrycy. Umożliwia to uwzględnienie wzmocnienia w pierwszym kroku przez obliczenie intensywności naprężeń  $\sigma_i(z)$  wzdłuż linii  $R_b(z)$  ze wzoru (2.3). Intensywność odkształceń  $e_i(z)$  na linii konturu matrycy  $R_b(z)$  zależy tylko od doświadczalnie danych pochodnych funkcji  $\phi_B(r, z)$  względem  $r$  i  $z$  dla  $r_n = 1$ . Zatem wzmocnienie w pierwszym kroku jest znane z doświadczenia. Należy zaznaczyć, że w pierwszym kroku iteracji można również przyjąć brak wzmocnienia. Podejście takie stosowano w pracach [2, 23, 24 i 25].

W drugiej iteracji funkcję  $a(z)$  otrzymujemy podstawiając do prawej strony (4.9) wartości  $a^I(z)$  i jej pochodne z pierwszej iteracji. Kolejne iteracje wykonujemy analogicznie [20].

Zilustrowano to na przykładzie obliczeń  $a(z)$  dla rozpatrywanej wcześniej próbki ze stopu aluminium wyciskanej na zimno przez matrycę stożkową. Niezbędne dane doświadczalne, określające warunki tarcia, tj. funkcję  $\phi_B(r, z)$  i jej pochodne numeryczne oraz dane materiałowe wstawiono w pierwszej iteracji  $a(z)$  do prawej strony (4.9) i otrzymano pierwsze przybliżenie  $a^I(z)$ . Następnie obliczono funkcję  $a(z) = a^{II}(z)$  w drugim kroku iteracyjnym i kolejno  $a = a^{III}(z)$  w trzecim kroku. Wykresy  $a^I(z)$ ,  $a^{II}(z)$  i  $a^{III}(z)$  zestawiono na rys. 11. Na osi pionowej (rys. 11) odłożono wartości funkcji  $a(z)$  na osi poziomej zaś bezwymiarową współrzędną  $z/z_0$ . Proces poszukiwania  $a(z)$  pokazał, że już druga i trzecia iteracja  $a(z)$  różniły się nieznacznie. Wykresy  $a^I(z)$ ,  $a^{II}(z)$ ,  $a^{III}(z)$  pokazano na rys. 11 na tle doświadczalnych wielkości  $A_1(z)$  i  $A_2(z)$ . Jednocześnie na tym samym rysunku pokazano wykresy funkcji  $A_1^I(z)$  i  $A_2^I(z)$  obliczone ze wzorów (4.8) określających jednoznacznie poszukiwaną funkcję  $\phi(r, z)$  (wzór (4.8)).



Rys. 11

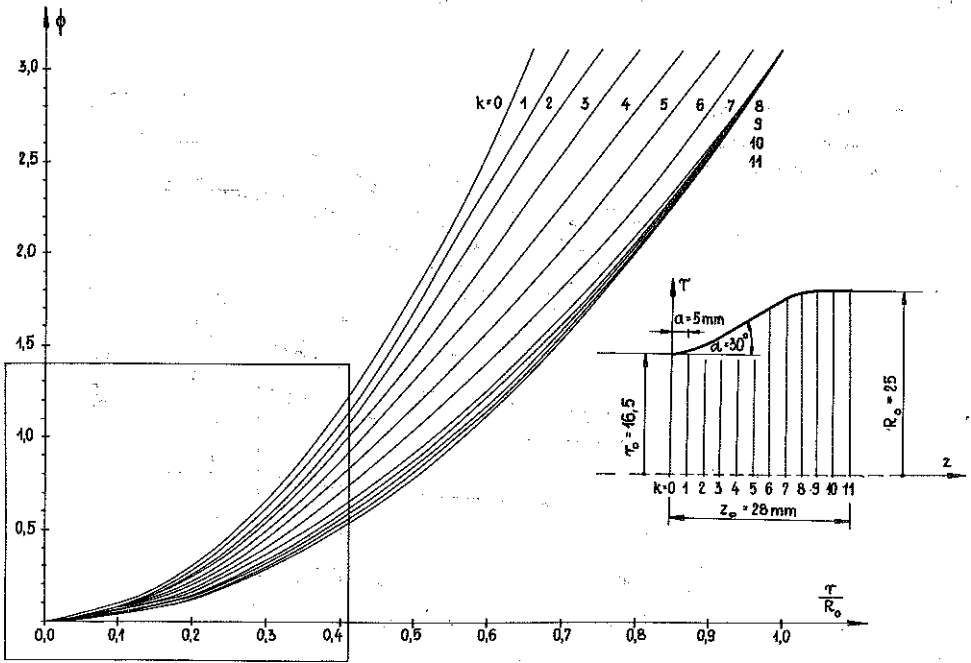
Wykresy doświadczalnych funkcji  $A_1(z)$  i  $A_2(z)$  wykazały dla rozpatrywanej próbki dobrą zgodność z wynikami teoretycznymi zarówno co do kształtu jak i wartości liczbowych.

Po wyznaczeniu funkcji  $a(z)$  kolejno obliczano i porównywano teoretyczne i doświadczalne wykresy funkcji płynięcia, linii prądu, prędkości przemieszczeń i intensywności odkształceń [20].

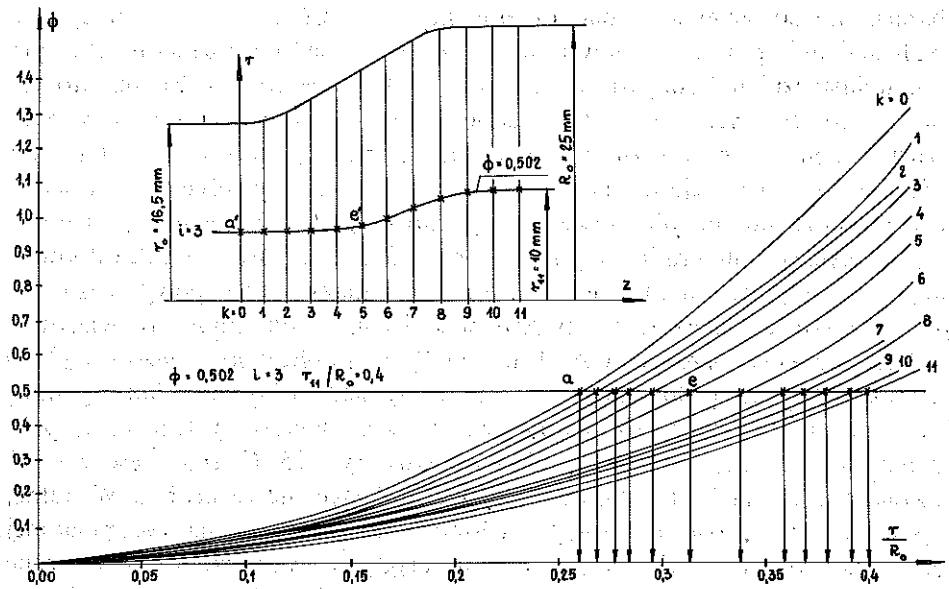
##### 5. OBLICZENIA WIELKOŚCI KINEMATYCZNYCH W ŚWIETLE BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

Wyznaczoną funkcję  $a^{III}(z)$  z trzeciej iteracji podstawiamy do wzoru (4.7) i obliczamy funkcje płynięcia  $\phi = \phi(r)$  wzdłuż promienia  $r$  w  $k$ -przekrojach zmiennej  $z$ . Ilustruje to rys. 12. Na osi pionowej odłożono wartości funkcji  $\phi(r, z)$  od 0 do  $\pi$ . Na osi poziomej zaznaczono bezwymiarowe wartości stosunku promienia  $r$  do połowy średnicy  $R_0$ .

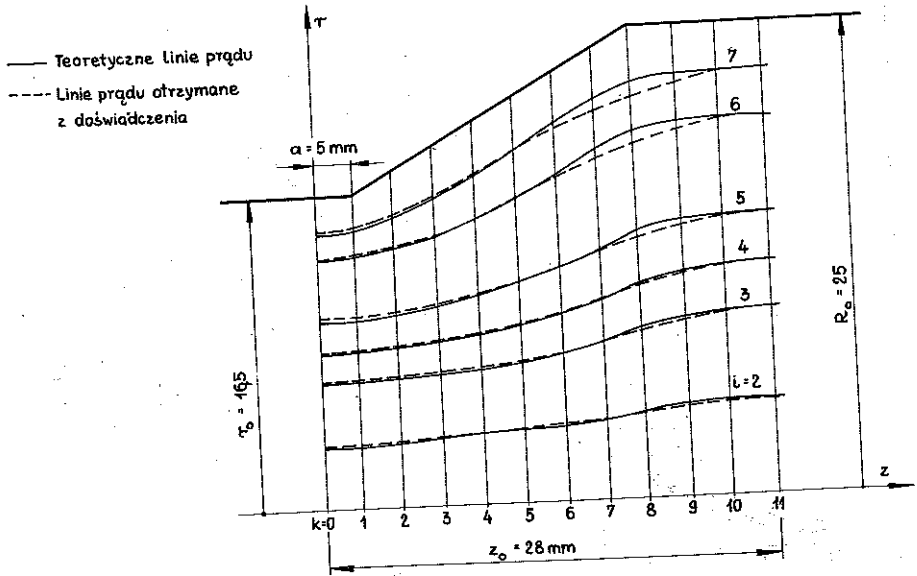
Wzdłuż linii prądu bezwymiarowa funkcja  $\phi(r, z)$  jest stała. Własność ta jest wykorzystana do wyznaczenia położenia linii prądu w polu uplastycznienia. Pokazano to na rys. 13, na którym widzimy powiększony fragment rozkładu  $\phi(r, z)$  oznaczonego prostokątem na rys. 12. Celem zilustrowania sposobu określenia położenia linii prądu poprowadzono na wykresie  $\phi = \phi(r)$  linię poziomą  $a-e$  odpowiadającą stałej wartości  $\phi(r, z) = 0.502$ . Punkty przecięcia poziomej linii  $a-e$  z krzywymi  $\phi = \phi(r)$  przy ustalonym  $k$  odwzorowują przebieg linii prądu  $a'-e'$  z płaszczyzny fizycznej  $r = z$



Rys. 12



Rys. 13

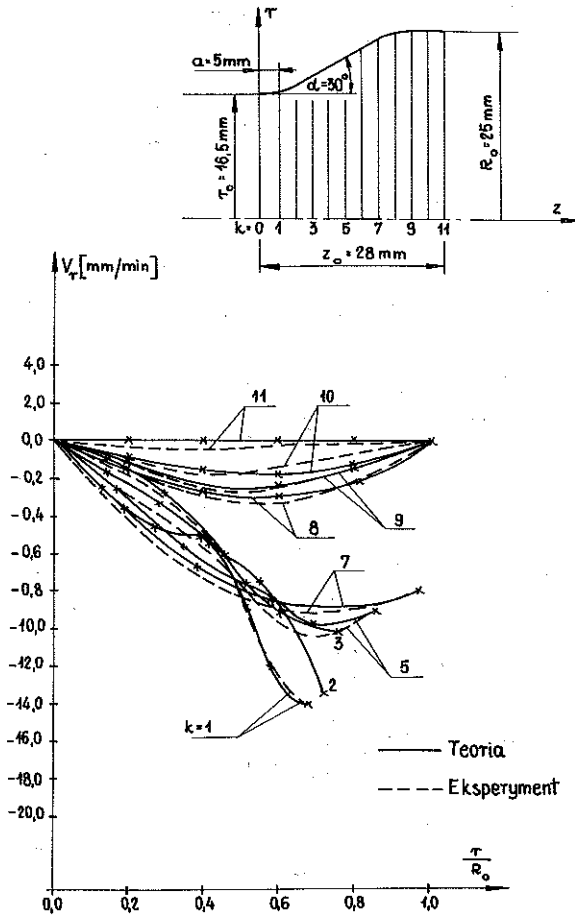


Rys. 14

obszaru uplastycznienia. Położenie linii prądu  $i = 3$  umiejscowiono na tle obszaru uplastycznienia w płaszczyźnie fizycznej próbki  $r = z$ . Ten sposób lokalizacji linii prądu wykorzystano do wyznaczenia ich rozkładu w całym polu uplastycznienia rozpatrywanej próbki. Obrazuje to rys. 14, na którym porównano teoretyczne i doświadczalne wykresy ośmiu linii prądu w polu uplastycznienia. Teoretyczne linie prądu odbiegają swym kształtem od doświadczalnych w rejonie naroża przy wejściu w obszar płynięcia plastycznego. W pozostałym polu obserwujemy dobrą zgodność obydwu wykresów.

Teoretyczne linie prądu otrzymano przy warunkach powyższego porównania, które wskazuje na poprawność i dużą dokładność rozwiązania.

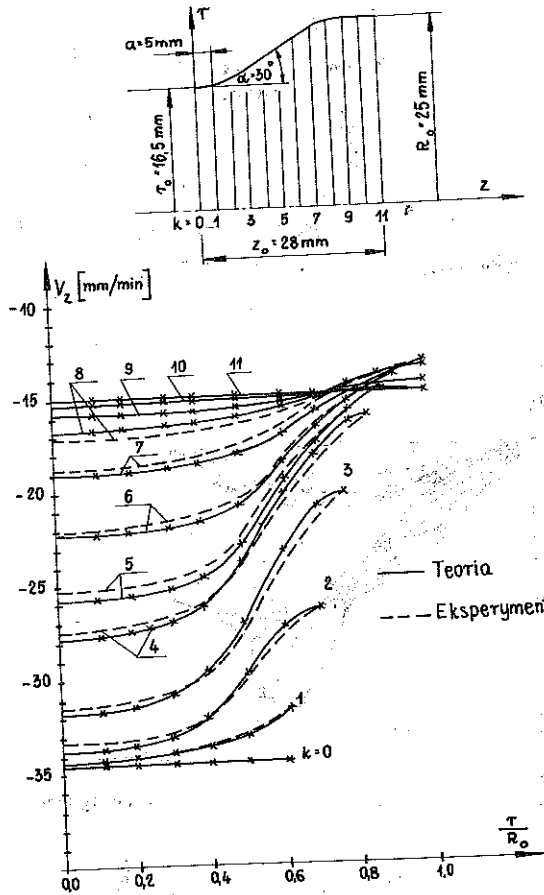
Pola prędkości przemieszczeń  $V_r(r, z)$  i  $V_z(r, z)$  obliczono ze wzorów (2.11) i (2.12). Składową promieniową  $V_r$  na osi symetrii obliczono jako granicę (2.12) przy  $r \rightarrow 0$ , która jest równa zero. Wykres składowej  $V_r(r, z)$  w polu uplastycznienia rozpatrywanej próbki obrazuje rys. 15. Górna część rys. 15 przedstawia fizyczną płaszczyznę  $r = z$  pola uplastycznienia próbki. W dolnej części rys. 15 na osi pionowej odłożono wartości  $V_r$ , a na osi poziomej bezwymiarowe wartości  $r/R_0$ . Liniami ciągłymi zaznaczono teoretyczne wykresy  $V_r = V_r(r/R_0)$  w  $k$ -przekrojach współrzędnej  $z$ . Największą nierównomierność wykresu  $V_r(r, z)$  obserwujemy w warstwie materiału przylegającej do konturu matrycy i w przekroju wyjściowym matrycy. Na tym samym rysunku i w tych samych przekrojach  $k$  współrzędnej  $z$  linia przerywana pokazuje doświadczalne wykresy  $V_r = V_r(r/R_0)$ . Zestawienie teoretycznych



Rys. 15

i doświadczalnych wykresów  $V_r(r, z)$  wskazuje na dużą zgodność zarówno co do wartości jak i kształtu tych funkcji.

Wykres składowej osiowej  $V_z(r, z)$  zobrazowano na rys. 16. Na osi pionowej zaznaczono wartości  $V_z$ , na poziomej bezwymiarowy stosunek  $r/R_0$ . Liniami ciągłymi poprowadzono teoretyczne wykresy  $V_z = V_z(r/R_0)$  w ustalonych  $k$ -przekrojach współrzędnej  $z$ , które zlokalizowano na płaszczyźnie fizycznej próbki  $r = z$  (górną część rys. 16). Wykresy teoretycznej składowej  $V_z = V_z(r/R_0)$  w  $k$ -przekrojach  $z$  odznaczają się znaczną nierównomiernością w warstwach materiału przylegających do matrycy. Składowe  $V_z(r, z)$  maleją gwałtownie w otoczeniu naroży przy wejściu w obszar uplastycznienia i są mniejsze od prędkości stempla  $V_0$ . Największą równomierność składowej osiowej prędkości  $V_z$  wzdłuż promieni obserwujemy w obszarze przyległym do osi symetrii. Znaczna nierównomierność przebiegu  $V_z = V_z(r/R_0)$  występuje w rejonie otworu matrycy. Również na rys. 16 linią przerywaną



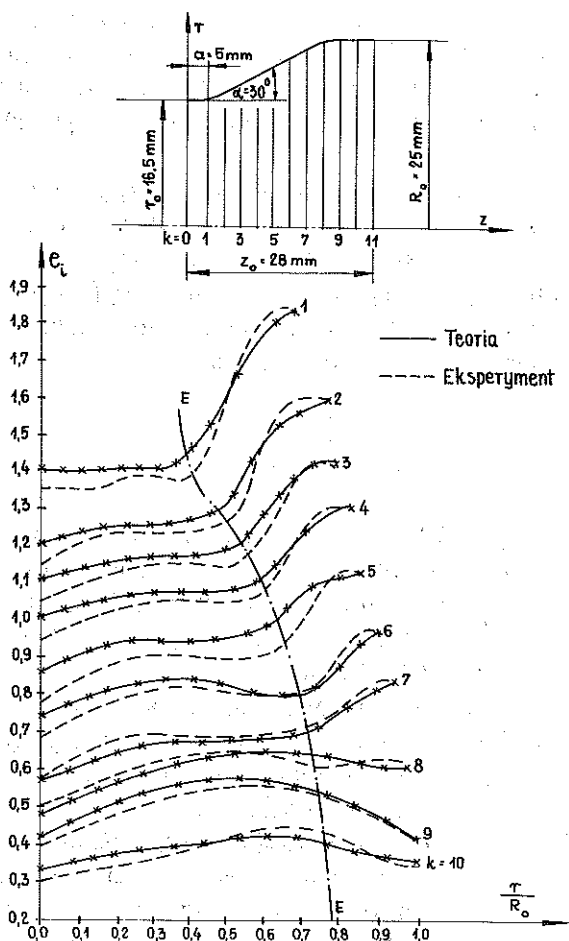
Rys. 16

zaznaczono wykresy doświadczalne  $V_z = V_z(r/R_0)$  w tych samych  $\phi_0$  i teoretyczne  $k$ -przekrojach zmiennej  $z$ .

Otrzymane na drodze teoretycznej z  $\phi(r, z)$  składowe prędkości przemieszczeń  $V_r(r, z)$  i  $V_z(r, z)$  spełniają te same warunki brzegowe co ich doświadczalne odpowiedniki. Dobrą zgodność doświadczalnych i teoretycznych funkcji  $V_r(r, z)$  i  $V_z(r, z)$  oznacza, że teoria plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału może nadawać się do wyznaczania pól prędkości przemieszczeń w polu uplastycznionym wyciskanego cylindrycznego pręta.

Kolejno obliczano ze wzorów (2.6) składowe tensora prędkości odkształceń. Wartości funkcji  $\dot{e}_r(r, z)$ ,  $\dot{e}_\theta(r, z)$  i  $\dot{\gamma}_{rz}(r, z)$  na osi symetrii, tj. przy  $r = 0$  brano jako ich granice przy  $r \rightarrow 0$ . Następnie ze wzoru (2.8) obliczono rozkład intensywności odkształceń  $e_1(r, z)$ , który dla rozpatrywanej próbki pokazano na rys. 17. Na osi pionowej odłożono wartości  $e_1$ , natomiast





Rys. 17

na osi poziomej bezwymiarowy stosunek  $r/R_0$ . Linia ciągłą zaznaczono na rys. 17 teoretyczne wykresy  $e_i = e_i(r/R_0)$  w  $k$ -przekrojach zmiennej  $z$ . Przekroje  $k$  zlokalizowano na fizycznej płaszczyźnie  $r = z$  próbki nad wykresami  $e_i = e_i(r/R_0)$ . Największe przyrosty teoretycznej funkcji  $e_i(r, z)$  wzdłuż promienia lokalizują się w rejonie otworu matrycy. Niejednorodnie zdeformowany materiał w tym obszarze przechodzi do wyrobu końcowego i wpływa bezpośrednio na jego własności mechaniczne.

Wykresy doświadczalne  $e_i = e_i(r/R_0)$  w tych samych co teoretyczne,  $k$ -przekrojach współrzędnej  $z$  pokazano za pomocą linii przerywanej na rys. 17.

Linia  $E-E$  na rys. 17 rozdziela obszar uplastycznienia na dwie strefy różniące się stopniem niejednorodności intensywności odkształceń. Pole  $e_i(r, z)$  z lewej strony linii  $E-E$  odznacza się stosunkowo małą niejednorodnością.

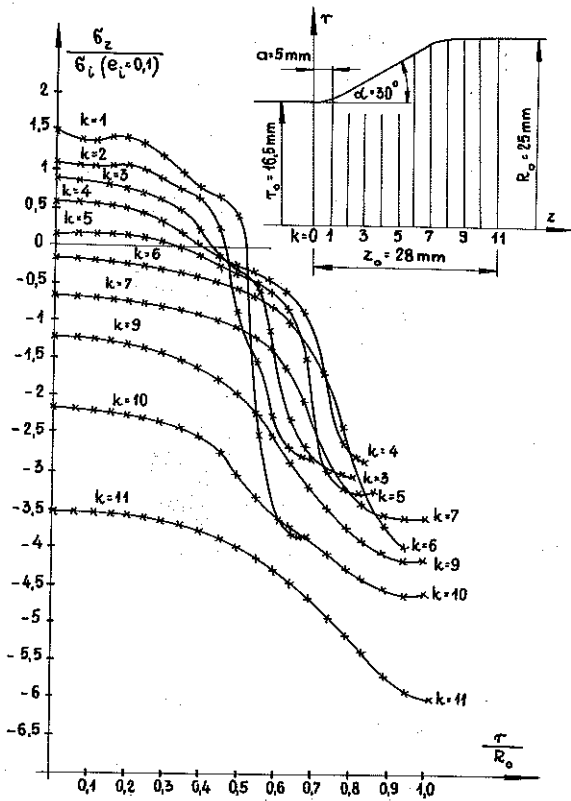
W punktach, przez które przebiega linia  $E-E$  występują największe przyrosty intensywności odkształceń wzdłuż promienia  $r$  we wszystkich  $k$ -przekrojach współrzędnej  $z$ . Można przypuszczać, że linia  $E-E$  odpowiada najkorzystniejszemu profilowi matrycy ze względu na jednorodność  $e_i(r, z)$  w polu uplastycznienia.

Teoretyczne i doświadczalne wykresy funkcji  $e_i(r, z)$  w rozpatrywanej próbce spełniają analogiczne warunki brzegowe. Porównanie tych wykresów na rys. 17 wskazuje na efektywność proponowanego rozwiązania. Przedstawione porównania dają ścisłą, doświadczalną weryfikację teorii plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału. Weryfikacja ta dotyczy wielkości mierzalnych w doświadczeniu.

## 6. WYNIKI OBLICZEŃ PÓL NAPRĘŻEŃ

Znając teoretyczną funkcję  $\phi(r, z)$  i jej pochodne możemy wyznaczyć pola naprężeń w obszarze uplastycznienia wyciskanego cylindrycznego pręta. Metoda znajdowania pól naprężeń przy znanych polach prędkości odkształceń i wzmocnieniu określonym krzywą materiałową  $\sigma_i(e_i)$  jest identyczna z metodą "wizjoplastyczności" [19 i 20]. Omówiono to szczegółowo w pracy [2].

Obliczamy najpierw składową osiową tensora naprężenia  $\sigma_z(r, z)$  z równań równowagi (2.1) po podstawieniu do nich wielkości płynięcia (2.5). Stałą całkowania we wzorze na  $\sigma_z(r, z)$  obliczano numerycznie z warunku zerowania się siły osiowej w przekroju wyjściowym próbki  $z = a$  (rys. 1). Numeryczne wyniki obliczeń rozkładu składowej osiowej tensora naprężenia  $\sigma_z(r, z)$  w polu uplastycznienia rozpatrywanej próbki pokazano w postaci wykresu na rys. 18. Na osi pionowej odłożono bezwymiarowe wartości stosunku naprężenia osiowego  $\sigma_z$  do wartości umownej granicy plastyczności materiału branej przy odkształceniu  $e_i = 0,1$ . Oś pozioma z rys. 18 posłużyła do zaznaczenia bezwymiarowej wielkości  $r/R_0$ . Liniami ciągłymi na rys. 18 wykonano wykresy bezwymiarowej wielkości naprężeń osiowych wzdłuż promienia  $r/R_0$  w ustalonych  $k$ -przekrojach współrzędnej  $z$ . Linia pozioma w punkcie  $\sigma_z/\sigma_i(e_i = 0,1) = 0$  rozdziela pole naprężeń osiowych na strefę naprężeń rozciągających i ściskających. Szczególnie ważną informacją jest kształt i zasięg strefy rozciągających naprężeń osiowych w płaszczyźnie fizycznej przekroju próbki. Ilustruje to rys. 19, na którym między innymi zaznaczono obszar dodatnich, czyli rozciągających naprężeń  $\sigma_z^{\oplus}(r, z)$  za pomocą zakreskowanego pola. W polu tym mogą wystąpić pęknięcia materiału mało odpornego na rozciąganie, ponieważ naprężenia rozciągające przekraczają tu o 50% wartość granicy plastyczności. W pozostałym obszarze tj. poza polem zakreskowanym z rys. 19 naprężenia osiowe  $\sigma_z(r, z)$  są ujemne, czyli ściskające. Bezwzględna wartość naprężeń osiowych rośnie w kierunku warstw materiału przylegających do powierzchni styku z matrycą i stemplem.

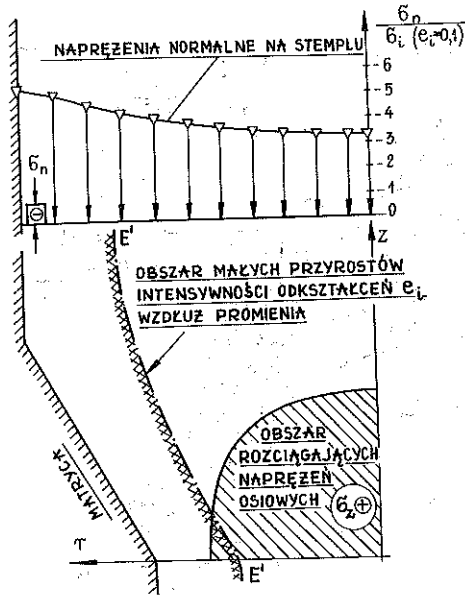


Rys. 18

Znajomość rozkładu naprężeń osiowych  $\sigma_z(r, z)$  jest najważniejszą informacją dotyczącą stanu naprężenia, ponieważ z rozkładu  $\sigma_z(r, z)$  możemy przewidzieć możliwość powstawania lokalnych pęknięć objawiających się pustkami wzdłuż osi symetrii gotowego wyrobu [19]. Z drugiej strony przebieg naprężeń osiowych  $\sigma_z(r, z)$  w najbliższym otoczeniu linii ograniczającej pole uplastycznienia od strony stępła umożliwia określenie rozkładu naprężeń normalnych na stępku. W rozważanym przypadku naprężenia normalne na stępku odpowiadają na rys. 18 wykresowi  $\sigma_z = \sigma_z(r)$  przy  $k = 11$ .

Rozkład bezwymiarowych naprężeń normalnych na stępku  $\sigma_n/\sigma_i (e_i = 0,1)$  wzdłuż promienia  $r$  pokazano na rys. 19. Widzimy, że normalne naprężenia ściskające materiał stępła przekraczają pięciokrotną wartość granicy plastyczności.

Można przypuszczać, że przy konturze matrycy  $E'-E'$  odpowiadającemu linii  $E-E'$  z rys. 17 zakreskowane pole naprężeń rozciągających  $\sigma_z^{\oplus}(r, z)$  na rys. 19 byłoby minimalne. Stąd, być może, linia  $E'-E'$  byłaby najkorzystniejszym profilem matrycy ze względu zarówno na jednorodny rozkład odkształceń w wyrobie jak też minimalny obszar osiowych naprężeń rozciągających.



Rys. 19

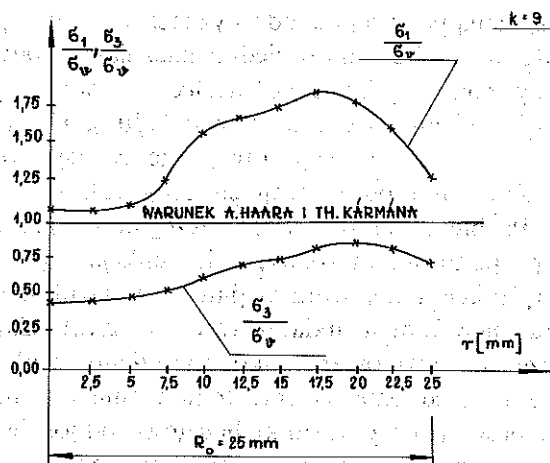
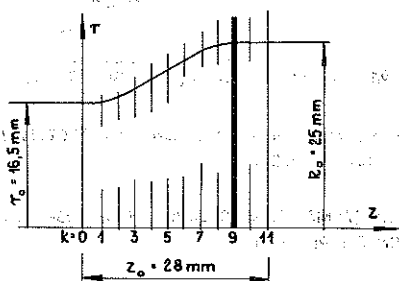
Wyjaśnienie tego problemu poruszanego również w pracach [15, 19 i 20] wymaga złożonych badań doświadczalnych procesu wyciskania. Wydaje się jednak, że ten sposób poszukiwania najkorzystniejszego profilu matrycy może prowadzić do efektywnych wyników.

Wykresy naprężeń stycznych  $\tau_{rz}$  wzdłuż promienia obliczane ze wzoru (2.5)<sub>4</sub> charakteryzowały się zmianą znaku w znacznej części pola uplastycznienia przyległego do otworu matrycy [20]. Maksymalne wartości naprężeń stycznych występują w materiale na wejściu do obszaru intensywnych odkształceń plastycznych. W rejonie tym mogą wystąpić pęknięcia w przypadku, gdy deformowany materiał ma niską wytrzymałość na ścinanie.

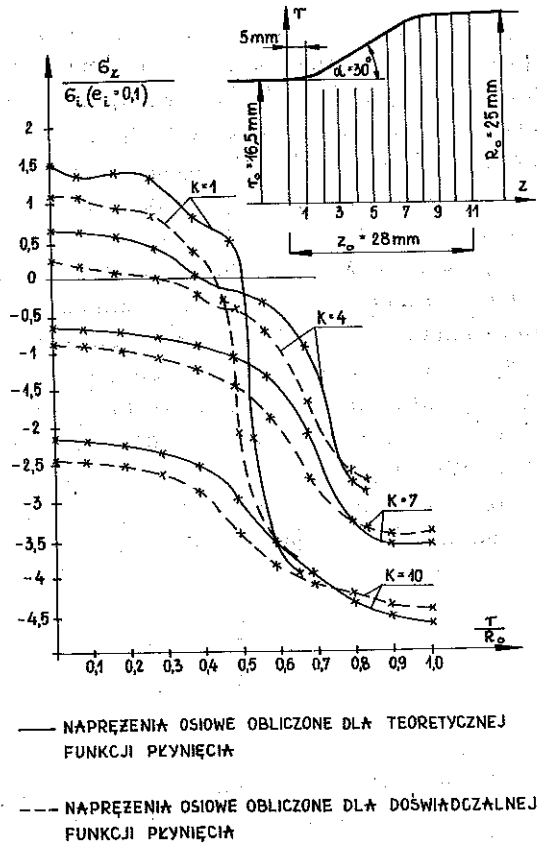
Składowe tensora naprężeń  $\sigma_r(r, z)$  i  $\sigma_\theta(r, z)$  obliczono ze wzorów (2.5)<sub>2,3</sub>. Były one ujemne, czyli ściskające w całym polu uplastycznienia. Charakter ich wykresów był zbliżony do siebie. Największe bezwzględne wartości naprężeń promieniowych i obwodowych otrzymano na wejściu do obszaru uplastycznienia i w warstwie materiału bezpośrednio przylegającej do powierzchni styku z matrycą.

Obliczone rozkłady składowych tensora naprężenia wskazują, że większość zdeformowanego plastycznie materiału rozpatrywanej próbki znajduje się w warunkach trójwymiarowego nierównomiernego ściskania. Maksymalne wartości ściskającego naprężenia hydrostatycznego osiągały blisko czterokrotną wartość granicy plastyczności. Ogólny schemat stanu naprężenia w zakresowanym polu z rys. 19 charakteryzuje się dwuosiowym ściskaniem i jednoosiowym rozciąganiem.

Znajomość rozkładów pól naprężeń umożliwia sprawdzenie hipotezy Haara-Kármána wprowadzanej w obliczeniach zagadnień osiowo-symetrycznych metodą charakterystyk [6, 7 i 8]. Jak wiadomo zakłada się w niej równość dwóch spośród trzech naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  w obszarze uplastycznienia. Wobec założeń o braku płynięcia w kierunku obwodowym, tj.  $V_\theta = 0$ , jednym z naprężeń głównych jest naprężenie obwodowe  $\sigma_\theta$ . Na rys. 20 pokazano charakter wykresów stosunków  $\sigma_1/\sigma_\theta$  i  $\sigma_3/\sigma_\theta$  jako funkcji promienia  $r$  w  $k=9$  przekroju współrzędnej  $z$ , którego lokalizację zaznaczono na płaszczyźnie fizycznej  $r=z$  próbki. Jednocześnie na rys. 20 zaznaczono linię odpowiadającą warunkowi Haara-Kármána. Warunek ten oznacza, że stosunek  $\sigma_1/\sigma_\theta$  lub  $\sigma_3/\sigma_\theta$  wzdłuż promienia w dowolnym przekroju współrzędnej  $z$  jest równy jedności. Odpowiada to linii prostej na wykresach z rys. 20. Przekrój  $k=9$  z rys. 20 leży w obszarze nierównomiernego, trójosiowego ściskania. Widzimy, że nawet w tych warunkach odstępstwa wykresów  $\sigma_1/\sigma_\theta$  i  $\sigma_2/\sigma_\theta$  w stosunku do wykresu odpowiadającego założeniu Haara-Kármána są znaczące i osiągają kilkadziesiąt procent.



Rys. 20



Rys. 21

Analizując pokazaną powyżej metodę wyznaczania pól naprężeń nie trudno zauważyć, że może ona być użyta do ujednoznaczniania obliczeń pól naprężeń w przypadku, gdy pola prędkości odkształceń są wzięte z doświadczenia. Mamy wtedy pięć równań niezależnych z układu (2.1) i (2.5), a niewiadomych  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  i  $\tau_{rz}$  — cztery. Stąd otrzymujemy pięć różnych rozwiązań dla naprężeń w zależności od wybranych dróg całkowania podstawowego układu równań. Problem ten omawiają szczegółowo prace [15, 20 i 26]. Występująca w proponowanym rozwiązaniu funkcja  $\phi(r, z)$  w postaci (4.7) zawiera nieznaną funkcję  $a(z)$ , która w danym przypadku może być traktowana jako piąta niewiadoma układu równań (2.12). Zatem wyznaczenie funkcji  $a(z)$  może być traktowane jako znalezienie brakującej piątej niewiadomej i przez to ujednoznacznienie rozwiązania dla naprężeń. Funkcja  $a(z)$  nie wpływa przy tym na warunki brzegowe odnośnie do tarcia.

Celem zilustrowania różnic naprężeń otrzymanych z teoretycznych i doświadczalnych wykresów funkcji płynięcia pokazano na rys. 21 wykresy

bezwymiarowych naprężeń osiowych  $\sigma_z/\sigma_i$  ( $e_i = 0,1$ ) wzdłuż promienia  $r/R_0$  w czterech przekrojach współrzędnej  $z$  zlokalizowanych w różnych miejscach płaszczyzny fizycznej  $r = z$  próbki. Otrzymane z doświadczalnego rozkładu funkcji płynięcia  $\phi_B(r, z)$  pole naprężeń  $\sigma_z(r, z)$  jest jednym z pięciu możliwych rozwiązań dla tej wielkości. Wykres tych naprężeń w postaci bezwymiarowej  $\sigma_z/\sigma_i$  ( $e_i = 0,1$ ) zaznaczono na rys. 21 liniami przerywanymi. Liniami ciągłymi poprowadzono w tych samych przekrojach współrzędnej  $z$  wykresy  $\sigma_z/\sigma_i$  ( $e_i = 0,1$ ) obliczone z uwzględnieniem  $\phi(r, z)$  w postaci (4.7), tj. z uwzględnieniem piątej niewiadomej  $a(z)$ . Z porównania pokazanych wykresów widzimy, że największe różnice dochodzące nawet do 50% lokalizują się w warstwach przylegających do osi symetrii i w rejonie przyległym do oczka matrycy.

## 7. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Aktualnie nie posiadamy ścisłego rozwiązania równań teorii plastycznego płynięcia umożliwiającego obliczenia pól prędkości, odkształceń i naprężeń w obszarze uplastycznienia wyciskanego, cylindrycznego pręta. Trudności wynikają z niehiperboliczności podstawowego układu równań stanu plastycznego w osiowej symetrii, jak też z braku danych brzegowych odnośnie do tarcia.

Proponowane w tej pracy rozwiązanie rozpatrywanego problemu osiowo-symetrycznego polega na rozwiązaniu równań stanu plastycznego sprawdzonych do jednego, wyrażonego nieznaną funkcją płynięcia  $\phi(r, z)$ . Postać tej nieznannej funkcji przewidujemy, kierując się ogólnymi wymogami związanymi z nieliniową formą równania wyjściowego i warunkami brzegowymi. Opieramy się też na doświadczalnych przebiegach tej wielkości i intuicji. Proponowana konstrukcja  $\phi(r, z)$  ma analityczną postać i zbudowana jest z dwóch separowalnych względem zmiennej  $z$  podwójnych szeregów trygonometrycznych. Jeden z nich wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi względem zmiennych  $r$  i  $z$  opisuje warunki brzegowe odnośnie do tarcia na powierzchni styku materiału z matrycą. Ten szereg uważamy na dany i możemy go określić jakąś funkcją określającą naprężenia tarcia. Jednak lepiej jest szereg ten utożsamić z doświadczalnym rozkładem funkcji płynięcia w polu uplastycznionym wyciskanej próbki.

Nieznanne funkcje w drugim szeregu ze względu na ich separowalność względem zmiennej  $z$  można wyznaczyć rozwiązując nieliniowe równanie wyjściowe stanu plastycznego w ustalonych wartościach zmiennej  $r$ . Przybliżoną postać nieznannej funkcji  $\phi(r, z)$  otrzymano metodą iteracji. Okazało się, że teoria plastycznego płynięcia z izotropowym wzmocnieniem materiału dokładnie określa wykresy pól kinematycznych, jeżeli rozporządzamy rzeczywistymi danymi brzegowymi.

Otrzymane rozwiązania odnośnie do pól naprężeń uwzględniają izotropowe wzmocnienie materiału i mogą posłużyć do przewidywania zjawisk związanych z utratą spójności materiału w obszarze uplastycznienia.

Proponowane rozwiązanie problemu osiowo-symetrycznego może być przydatne do ujednoznaczniania obliczeń pól naprężeń w metodzie „wizjo-plastyczności”.

Weryfikacja założenia Haara-Kármána wykazała, że uproszczenie to jest grubym przybliżeniem wprowadzanym przy przewidywaniu pól naprężeń w procesie wyciskania osiowo-symetrycznego.

Przedstawiony sposób podejścia do rozwiązania osiowo-symetrycznego procesu wyciskania umożliwia efektywne obliczenia pól naprężeń i odkształceń w deformowanym materiale. Pola prędkości przemieszczeń i odkształceń są ciągle i różniczkowalne w całym obszarze uplastycznienia. Pokazane przykłady obliczeń dotyczą zadania z doświadczalnie danymi warunkami brzegowymi, ale proponowana metoda umożliwia też wyznaczenie pól naprężeń i odkształceń z innymi warunkami brzegowymi odnośnie do tarcia. Wydaje się, że proponowane rozwiązanie zadania osiowo-symetrycznego może posłużyć do dokładnej analizy procesów wyciskania metali na zimno.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford at the Clarendon Press 1956.
2. W. SZCZEPIŃSKI, *Introduction to the mechanics of plastic forming of metals*, PWN, Warszawa 1979.
3. В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, Москва 1969.
4. Е. П. Унсков, У. Джонсон, В. Л. Колмогоров, *Теория пластических деформаций металлов*, Машиностроение, Москва 1983.
5. E. G. THOMSEN, C. T. YANG, S. KOBAYASHI, *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, McMillan, New York 1965.
6. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc., ser. A, 233, 267-287, 1955.
7. Z. MRÓZ, *Graphical solution axially problems of plastic flow*, J. Appl. Math. Phys., (ZAMP), 18, 219-236, 1967.
8. G. EASON, R. T. SHIELD, *The plastic indentation of a semi infinite solid by a perfectly rough circular punch*, ZAMP, 11, 1, 1960.
9. Г. А. Друянов, *Метод решения статически неопределенных задач плоского течения идеально-пластических тел*, Докл. А. Н. СССР, 4, 1962.
10. M. J. HILLER, *Slip line fields for extrusion through looped or curved dies*, I. J. Mech. Sci., 4, 6, 1962.
11. А. Д. Томленов, *Граничные условия в задачах плоского пластического течения*, Пластическое течение металлов, Наука, Москва 1968.
12. J. M. ALEXANDER, *On complete solutions for frictionless extrusion in plane strain*, Q. Appl. Math., 19, 31-37, 1961.
13. Р. И. Непершин, *Осесимметричное прессование с малыми и большими обжатиями*, Расчеты процессов пластического течения металлов, Наука, 71-83, Москва 1973.



14. J. PIWNIK, *Doświadczalna weryfikacja teorii obliczeń sil w procesie wyciskania*, Rozpr. Inż., **29**, 2, 343-349, 1981.
15. J. PIWNIK, *Geometria obszaru uplastycznienia w procesie wyciskania*, Rozpr. Inżyn., **30**, 1, 121-128, 1982.
16. J. PIWNIK, *Experimental analysis of the kinematics of the extrusion process*, Arch. Hutnictwa, **30**, 1, 105-110, 1985.
17. J. PIWNIK, *Metody obliczeń złożonych procesów obróbki plastycznej w świetle badań doświadczalnych*, Prace IPPT PAN, **14**, 1979.
18. P. S. SYMOND, *On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity*, Quart. J. Appl. Math., **6**, 1949.
19. A. H. SHABAİK, E. G. THOMSEN, *Computer aided viscoplasticity solution of some deformation problems*, Proc. Symp. on Foundation of Plasticity, Warsaw 1972.
20. J. PIWNIK, *Analiza osiowo-symetrycznych procesów obróbki plastycznej*, Prace IPPT PAN **44**, 1985.
21. А. Г. ОВЧИННИКОВ, *Основы теории штамповки выдавливанием на прессах*, Машиностроение, Москва 1983.
22. Р. И. НЕПЕРШИН, *О решении задач плоского пластического течения жесткопластического тела с кинематическими граничными условиями*, Расчеты пластического течения, Наука, Москва, 1975.
23. W. SZCZEPAŃSKI, *Axially symmetric plane stress problem of a plastic strain-hardening body*, Arch. Mech., **15**, 5, 1963.
24. Z. MARCINIAK, *Analysis of the process of forming axially symmetrical drawpieces with a hole at the bottom*, Arch. Mech., **15**, 6, 1963.
25. L. DIETRICH, *Uwzględnienie wzmocnienia materiału w analizie złożonych procesów plastycznego płynięcia*, Prace IPPT PAN, **53**, 1977.
26. В. М. СЕГАЛ, *Технологические задачи теории пластичности*, Наука, Минск 1977.

## РЕЗЮМЕ

## АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ВЫДАВЛИВАНИЯ

В работе представлено новое итерационное решение уравнений теории пластического течения для процесса осесимметричного выдавливания. Оно дает возможность рассчитать поля напряжений и деформаций в деформируемом материале. Решение получено для условия пластичности Губера Мизеса с пренебрежением гипотезы Хаара Кармана. Учтено изотропное упрочнение материала. Граничные условия, касающиеся трения, определены из экспериментального распределения функции тока в области перехода в пластическое состояние. Знание экспериментальных функций тока дает возможность сравнить теоретические поля: скорости перемещений, скорости деформаций, интенсивности деформаций и линий тока с их действительными эквивалентами. Эти сравнения показали удовлетворительное совпадение обеих групп результатов. Представленное решение осесимметричной проблемы может послужить для рационального анализа процессов холодного выдавливания металлов.

## SUMMARY

## ANALYSIS OF THE AXI-SYMMETRIC EXTRUSION PROCESS

The paper presents a novel iterational solution of the plastic flow theory in the case of axi-symmetric extrusion: the solution is obtained for the Huber-Mises yield condition, the Haar-Kármán hypothesis being disregarded. Isotropic hardening hypothesis is assumed. The boundary conditions corresponding to friction are determined from the experimental measurement of the flow function in the plastic zone. Knowledge of the flow functions enables us to compare the theoretical velocity, strain-rate and stress intensity fields with their actual values. The presented method may be used for rational analysis of the plastic extrusion processes of metals.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA  
INSTYTUT MECHANIKI, BIAŁYSTOK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 listopada 1985 r.*

---