

ANALIZA WŁASNOŚCI WIBROIZOLACYJNYCH ODKSZTAŁCALNYCH OŚRODKÓW PERFOROWANYCH WYPEŁNIONYCH CIECZĄ(*)

STEFAN JAN K O W A L S K I, ROMAN K U C I GRZEGORZ M U S I E L A K
(POZNAŃ)

Celem pracy jest analiza własności wibroizolacyjnych ośrodków perforowanych wypełnionych cieczą. Podstawę analizy stanowi perforowany elastyczny walec wypełniony cieczą. Rozważa się drgania swobodne i wymuszone z masą skupioną reprezentującą masę urządzenia technicznego spoczywającego na wibroizolatorze. Uwzględnia się wpływ ciśnienia cieczy i jej przemieszczeń na postać drgań i efekt wibroizolacji. Wynikiem końcowym są wykresy przedstawiające zależność współczynnika uwielokrotnienia amplitudy i współczynnika przenoszenia obciążenia od parametrów sterowalnych zewnętrznie, tj. ciśnienia cieczy w porach i wielkości jej przemieszczania się.

WĄŻNIEJSZE OZNACZENIA

- x współrzędna przestrzenna wzdłuż osi porowatego walca,
- t czas,
- $u_s(x, t)$ przemieszczenie szkieletu wzdłuż osi x ,
- $u_f(x, t)$ przemieszczenie cieczy wzdłuż osi x ,
- A_0 pole przekroju poprzecznego porowatego walca,
- h wysokość walca,
- N moduł odkształceń postaciowych szkieletu,
- A moduł zmian objętościowych szkieletu,
- Q współczynnik reprezentujący sprzężenie deformacji objętościowych szkieletu i cieczy,
- R moduł zmian objętościowych cieczy,
- ρ_s gęstość szkieletu,
- ρ_f gęstość cieczy,
- a_s prędkość niesprężonej fali w szkielecie,
- a_f prędkość niesprężonej fali w cieczy,
- c_w prędkość fali wolnej,
- c_s prędkość fali szybkiej.

(*) Praca została wykonana w ramach Problemu CPBP-02.03 „Problemy i metody akustyki w technice, medycynie i kulturze”.

- ω_n n -ta częstość drgań własnych,
 p częstość drgań wymuszonych,
 $P(t)$ siła wymuszająca drgania,
 $\sigma_s(x, t)$ naprężenie w szkielecie,
 $\sigma_f(x, t)$ naprężenie w cieczy,
 $U_{sn}(x)$ n -ta funkcja własna dla szkieletu,
 $U_{fn}(x)$ n -ta funkcja własna dla cieczy,
 $T_n(t)$ n -ta współrzędna uogólniona,
 M_s masa skupiona przyłożona do szkieletu,
 M_f masa skupiona przyłożona do cieczy,
 M masa skupiona spoczywająca na wibroizolatorze,
 k sztywność sprężyny,
 μ współczynnik uwielokrotnienia amplitudy,
 γ współczynnik przenoszenia siły.

1. WSTĘP

Celem pracy jest analiza własności wibroizolacyjnych ośrodków perforowanych wypełnionych cieczą i możliwości ich wykorzystania w zagadnieniach technicznych jako podkładek i osłon izolujących drgania.

W tej pracy położono akcent na zagadnienie „rozmywania” sił wymuszających drgania przy ich przenoszeniu ze źródła drgań na podłoże lub obiekt izolowany. Zjawisko „rozmywania” wynika ze struktury samego ośrodka tj. jego kompozycji z ciała stałego i cieczy. Opierając się na analizie fal w ośrodkach porowatych wypełnionych cieczą (por. np. [3]), z której wynika, że w takich ośrodkach generowane są zawsze dwie fale (szybka i wolna), należy przypuszczać, że rozmywanie impulsu wynika z jego rozdziału i transportu przez dwie poruszające się z różnymi prędkościami fale. W przypadku fal stojących rolę taką spełniają dwie grupy częstości drgań własnych, z których każda posiada pełen ich zestaw.

W pracy analizuje się zagadnienie jednowymiarowe bazując na odpowiednio zredukowanych równaniach teorii ośrodków porowatych wypełnionych cieczą. Rozważania odnoszą się więc do perforowanej warstwy lub, z pewnym przybliżeniem, do perforowanego walca. Zakłada się, że materiał porowaty (szkielet) jest elastyczny a wypełniająca perforowaną przestrzeń ciecz jest ściśliwa lecz nielepka. To ostatnie założenie sugeruje, że w naszych rozważaniach nie bierzemy pod uwagę własności tłumiących badanego ośrodka a jedynie wspomniany efekt rozmywania impulsów, który dla zagadnień wibroizolacji ma znaczenie pierwszorzędne.

W szczególności rozważa się drgania swobodne i wymuszone perforowanego walca z masą skupioną na brzegu. Uwzględnia się przy tym dodatkowo czynniki (takie jak np. zmianę ciśnienia cieczy i jej przemieszczanie się) mające wpływ na postać drgań i efekt wibroizolacji.

Jednym z ważniejszych parametrów analizowanych w pracy jest współczynnik przenoszenia obciążenia. Ponadto określa się pasmo częstości, w zakresie którego wibroizolator może być skuteczny.

Efektom końcowym pracy są wykresy ilustrujące wpływ różnych parametrów strukturalnych, takich jak własności mechaniczne składników, współczynnik sprzężenia, wartość ciśnienia cieczy i innych, na efekt wibroizolacji.

2. PODSTAWY MATEMATYCZNE ANALIZY

Rozważać będziemy jednowymiarowe zagadnienie początkowo-brzegowe. Współrzędną miejsca oznaczamy przez x , a współrzędną czasu przez t . Posługiwać się będziemy metodami teorii zawilżonych ośrodków porowatych, których charakterystyczną cechą jest korzystanie w nich z tzw. wielkości parcjalnych a nie rzeczywistych.

Niech $\sigma_s(x, t)$ i $\sigma_f(x, t)$ oznaczają osiowe siły w materiale perforowanym (szkielecie) i cieczy odniesione do jednostki powierzchni ośrodka jako całości a ρ_s i ρ_f masy wymienionych składników odniesione do jednostki objętości całkowitej oraz $u_s(x, t)$ i $u_f(x, t)$ osiowe przemieszczenia tych składników.

Równania równowagi mechanicznej można zapisać wtedy jako

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{s,x} &= \rho_s \ddot{u}_s, \\ \sigma_{f,x} &= \rho_f \ddot{u}_f, \end{aligned}$$

gdzie x po przecinku oznacza cząstkową pochodną przestrzenną a kropka nad symbolem oznacza pochodną cząstkową po czasie. W równaniach (2.1) pominięto tzw. efekt sprzężenia ruchu przez masę (por. np. [4]).

Związki fizyczne teorii ośrodków porowatych dla zagadnienia jednowymiarowego wyrażają się następująco

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_s &= (2N + A) u_{s,x} + Q u_{f,x}, \\ \sigma_f &= Q u_{s,x} + R u_{f,x}, \end{aligned}$$

gdzie N , A , Q , R są znanymi stałymi teorii ośrodków porowatych (por. np. [1]).

Przez podstawienie związków fizycznych (2.2) do równań równowagi (2.1) otrzymuje się układ dwóch równań ruchu wyrażonych w przemieszczeniach

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_{s,xx} + a_1 u_{f,xx} &= \ddot{u}_s / a_s^2, \\ a_2 u_{s,xx} + u_{f,xx} &= \ddot{u}_f / a_f^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.3') \quad a_1 = Q / (2N + A), \quad a_2 = Q / R, \quad a_s^2 = (2N + A) / \rho_s, \quad a_f^2 = R / \rho_f.$$

Układ równań (2.3) jest typu hiperbolicznego i opisuje bifalę, o czym łatwo się przekonać rozsprzęgając ten układ. Prędkości tych dwóch fal są następujące

$$(2.4) \quad \begin{aligned} c_s &= \sqrt{\frac{a_s^2 + a_f^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_s^2 - a_f^2}{2}\right)^2 + a_1 a_2 a_s^2 a_f^2}}, \\ c_w &= \sqrt{\frac{a_s^2 + a_f^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_s^2 - a_f^2}{2}\right)^2 + a_1 a_2 a_s^2 a_f^2}}. \end{aligned}$$

Dla celów analizy drgań wygodnie jest budować rozwiązania układu równań (2.3) za pomocą szeregu według funkcji własnych. Stosując metodę rozdzielania zmiennych, tj.

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= U_s(x) T(t), \\ u_f(x, t) &= U_f(x) T(t), \end{aligned}$$

otrzymujemy funkcje własne $U_s(x)$ i $U_f(x)$ oraz współzrzedną uogólnioną $T(t)$ w postaci (por. też [5, 6 i 7])

$$(2.6) \quad \begin{aligned} U_s(x) &= A_1 e^{i\frac{\omega}{c_s}x} + A_2 e^{-i\frac{\omega}{c_s}x} + A_3 e^{i\frac{\omega}{c_w}x} + A_4 e^{-i\frac{\omega}{c_w}x}, \\ U_f(x) &= \delta_1 (A_1 e^{i\frac{\omega}{c_s}x} + A_2 e^{-i\frac{\omega}{c_s}x}) + \delta_2 (A_3 e^{i\frac{\omega}{c_w}x} + A_4 e^{-i\frac{\omega}{c_w}x}), \\ T(t) &= C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \end{aligned}$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ oraz

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{c_s^2}{a_s^2}\right) = -a_2 \left(1 - \frac{c_s^2}{a_f^2}\right)^{-1}, \\ \delta_2 &= -\frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{c_w^2}{a_s^2}\right) = -a_2 \left(1 - \frac{c_w^2}{a_f^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Stałe A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) oraz C , D i ω określimy dla danych warunków brzegowych i początkowych.

Upredzając dalszy tok rozważań podajemy już tutaj, że dla analizowanych w tej pracy zagadnień początkowo-brzegowych otrzymywać będziemy dwie grupy częstości drgań własnych.

$$(2.8) \quad \{\omega_n^{(1)}\} \quad \text{i} \quad \{\omega_n^{(2)}\}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

W ślad za tym otrzymywać będziemy też dwie grupy funkcji własnych i współzrzednych uogólnionych. Ogólne rozwiązania będą więc miały następującą budowę

$$(2.9) \quad u_s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [U_{sn}^{(1)}(x) \cdot T_n^{(1)}(t) + U_{sn}^{(2)}(x) \cdot T_n^{(2)}(t)],$$

$$u_f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [U_{fn}^{(1)}(x) \cdot T_n^{(1)}(t) + U_{fn}^{(2)}(x) \cdot T_n^{(2)}(t)].$$

Warunek ortogonalności dla powyższych funkcji własnych będzie miał postać

$$(2.10) \quad [\omega_n^{(i)2} - \omega_m^{(k)2}] \int_0^h [\varrho_s U_{sn}^{(i)}(x) \cdot U_{sm}^{(k)}(x) + \varrho_f U_{fn}^{(i)}(x) \cdot U_{fm}^{(k)}(x)] dx + \\ + \{[(2N + A) U_{sn}^{(i)'}(x) + QU_{fn}^{(i)'}(x)] U_{sm}^{(k)}(x) + [QU_{sn}^{(i)'}(x) + RU_{fn}^{(i)'}(x)] U_{fm}^{(k)}(x) - \\ - [(2N + A) U_{sm}^{(k)'}(x) + QU_{fm}^{(k)'}(x)] U_{sn}^{(i)}(x) - \\ - [QU_{sm}^{(k)'}(x) + RU_{fm}^{(k)'}(x)] U_{fn}^{(i)}(x)\} \Big|_0^h = 0.$$

gdzie $i, k = 1, 2$; $n, m = 1, 2, 3, \dots$, a prim nad symbolem oznacza pochodną: zwyczajną względem miejsca.

Niekiedy wygodnie jest znormalizować funkcje własne według następującego warunku

$$(2.11) \quad \int_0^h [U_{sn}^{(1)}(x)]^2 dx = h, \quad \int_0^h [U_{sn}^{(2)}(x)]^2 dx = h.$$

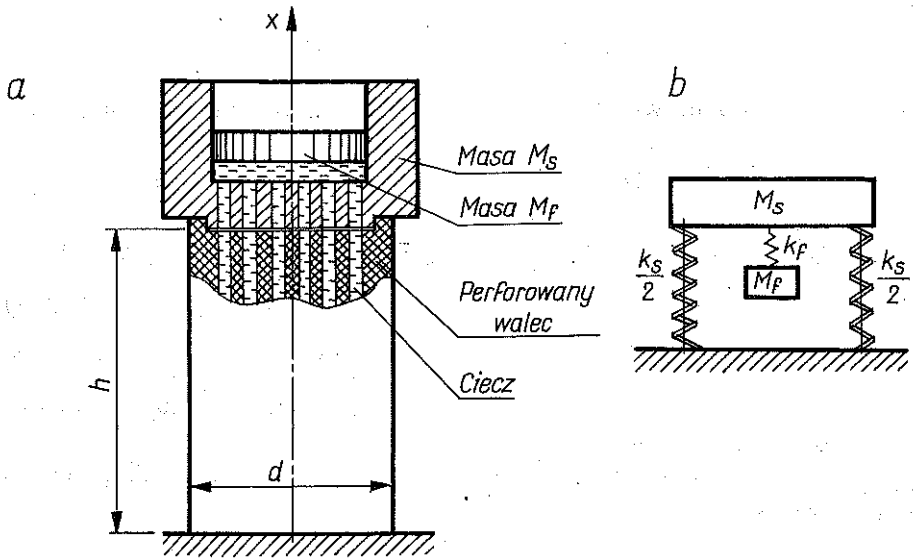
Warunek ortogonalności (2.10), warunek normalizacji (2.11) oraz cztery warunki brzegowe i cztery warunki początkowe pozwalają wyznaczyć wszystkie stałe występujące w rozwiązaniach ogólnych (2.9).

3. DRGAŃIA PERFOROWANEGO WALCA WYPEŁNIONEGO CIECZĄ Z DWIEMA MASAMI SKUPIONYMI

Analizować będziemy drgania swobodne i wymuszone perforowanego walca wypełnionego cieczą z jedną masą skupioną związaną ze szkieletem, a drugą z cieczą (rys. 1a). Masa M_s reprezentuje tu masę urządzenia technicznego spoczywającego na wibroizolatorze, a M_f reprezentuje pewną masę dodatkową, która stymuluje efekt wibroizolacji. Jest to analogia do znanego w teorii drgań tak zwanego eliminatora drgań (por. np. [8]). Tłumik taki składa się z dodatkowej, niewielkiej masy zawieszonyj sprężyscie na urządzeniu technicznym (rys. 1b). Sprężyna k_s jest tu analogiem elastyczności perforowanego walca, a sprężyna k_f reprezentuje ściśliwą ciecz, przy czym w naszym przypadku występuje dodatkowo współczynnik sprężenia dylatacyjnego Q , poprzez który następuje sprężenie ruchu szkieletu i cieczy.

Drgania swobodne

Drgania swobodne perforowanego walca wypełnionego cieczą z dwiema



Rys. 1. Schemat wibroizolatora z dwiema masami skupionymi

masami skupionymi opisują całki (2.9), w których stałe określamy na podstawie następujących warunków brzegowych:

$$\begin{aligned}
 A_0 \sigma_s(h, t) &= -M_s \ddot{u}_s(h, t), \\
 A_0 \sigma_f(h, t) &= -M_f \ddot{u}_f(h, t), \\
 u_s(0, t) &= 0, \\
 u_f(0, t) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

oraz warunków początkowych

$$\begin{aligned}
 u_s(x, 0) &= u_{0s}(x), & \dot{u}_s(x, 0) &= v_{0s}(x), \\
 u_f(x, 0) &= u_{0f}(x), & \dot{u}_f(x, 0) &= v_{0f}(x).
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

gdzie $A_0 = \pi d^2/4$ oznacza pole przekroju poprzecznego walca.

Na podstawie warunków brzegowych (3.1) otrzymujemy następujące równanie charakterystyczne na wyznaczenie częstości drgań własnych

$$\begin{aligned}
 (\delta_2 - \delta_1) (\cos \alpha \cos \beta + m_s m_f \alpha \beta \sin \alpha \sin \beta) = \\
 = (\delta_2 m_s - \delta_1 m_f) \alpha \sin \alpha \cos \beta + (\delta_2 m_f - \delta_1 m_s) \beta \sin \beta \cos \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

przy czym oznaczono:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \omega h / c_s, & m_s &= M_s / \rho_s h A_0, \\
 \beta &= \omega h / c_w, & m_f &= M_f / \rho_f h A_0.
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Współczynniki m_s i m_f oznaczają odpowiednio stosunek masy M_s do masy perforowanego walca $\rho_s hA_0$ oraz masy M_f do masy cieczy $\rho_f hA_0$.

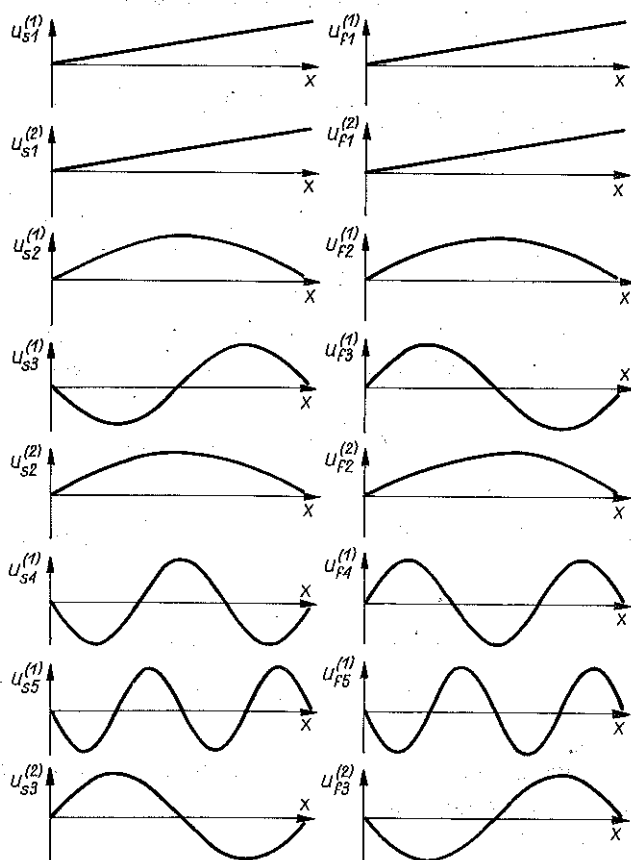
Rozwiązując równanie (3.3) względem ω otrzymujemy ciąg ich wartości, który następnie rozdzielamy na dwie grupy

$$(3.5) \quad \{\omega_n\} = \{\omega_n^{(1)}\} + \{\omega_n^{(2)}\}.$$

Identyfikacji przynależności danej częstotliwości do grupy pierwszej lub drugiej dokonujemy na podstawie liczby węzłów funkcji własnej odpowiadającej danej częstotliwości.

Dla przykładu ciąg wartości własnych otrzymanych z równania charakterystycznego (3.3) wynosi

$$\begin{aligned} \{\omega_n\} = \{ & \omega_1 = 15,04, \omega_2 = 22,93, \omega_3 = 229,03, \omega_4 = 454,67, \\ & \omega_5 = 483,71, \omega_6 = 681,06, \omega_7 = 907,63, \omega_8 = 966,67, \dots \}. \end{aligned}$$



Rys. 2. Funkcje własne perforowanego walca wypełnionego cieczą obciążonego dwiema masami skupionymi

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy funkcji własnych odpowiadających tym wartościom. Kolejność narysowanych funkcji odpowiada kolejności wyżej wypisanego ciągu wartości.

Widzimy, że otrzymany ciąg wartości możemy uporządkować następująco

$$\begin{aligned}\{\omega_n^{(1)}\} &= \{\omega_1^{(1)} = \omega_1, \omega_2^{(1)} = \omega_3, \omega_3^{(1)} = \omega_4, \omega_4^{(1)} = \omega_6, \omega_5^{(1)} = \omega_7, \dots\}, \\ \{\omega_n^{(2)}\} &= \{\omega_1^{(2)} = \omega_2, \omega_2^{(2)} = \omega_5, \omega_3^{(2)} = \omega_8, \dots\}.\end{aligned}$$

W szczególnym przypadku, gdy $m_s = m_f$, równanie charakterystyczne daje się zapisać w postaci

$$(3.3') \quad (\cos \alpha - m_s \alpha \sin \alpha) (\cos \beta - m_s \beta \sin \beta) = 0,$$

co oznacza, że równanie charakterystyczne spełniają dwie grupy częstości, jedna proporcjonalna do prędkości fali szybkiej c_s , a druga proporcjonalna do prędkości fali wolnej c_w . Jeszcze wyraźniej jest to widoczne dla $m_s = m_f = 0$. Wtedy równanie charakterystyczne redukuje się do postaci

$$(3.3'') \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0.$$

Stąd otrzymujemy natychmiast dwie grupy częstości, a mianowicie

$$(3.6) \quad \omega_n^{(1)} = \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c_w}{h}, \quad \omega_n^{(2)} = \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c_s}{h}.$$

dla $n = 1, 2, \dots$

Funkcje własne (2.6) odpowiadające danemu numerowi częstości dla przyjętych warunków brzegowych wyrażają się następująco:

$$(3.7) \quad \begin{aligned}U_{sn}^{(i)} &= \varrho_s \left[c_w \Omega_{1n}^{(i)} \sin \left(\alpha_n^{(i)} \frac{x}{h} \right) - c_s \Omega_{2n}^{(i)} \sin \left(\beta_n^{(i)} \frac{x}{h} \right) \right], \\ U_{fn}^{(i)} &= \varrho_s \left[\delta_1 c_w \Omega_{1n}^{(i)} \sin \left(\alpha_n^{(i)} \frac{x}{h} \right) - \delta_2 c_s \Omega_{2n}^{(i)} \sin \left(\beta_n^{(i)} \frac{x}{h} \right) \right],\end{aligned}$$

gdzie

$$(3.7') \quad \begin{aligned}\Omega_{1n}^{(i)} &= \cos \beta_n^{(i)} - m_s \beta_n^{(i)} \sin \beta_n^{(i)}, \\ \Omega_{2n}^{(i)} &= \cos \alpha_n^{(i)} - m_s \alpha_n^{(i)} \sin \alpha_n^{(i)},\end{aligned}$$

dla $i = 1, 2$ oraz $n = 1, 2, \dots$

Warunek ortogonalności dla powyższych funkcji własnych i warunków brzegowych (3.1) przyjmuje postać

$$(3.8) \quad \int_0^h [\varrho_s U_{sn}^{(i)}(x) U_{sm}^{(k)}(x) + \varrho_f U_{fn}^{(i)}(x) U_{fm}^{(k)}(x)] dx + \\ + h [\varrho_s m_s U_{sn}^{(i)}(h) U_{sm}^{(k)}(h) + \varrho_f m_f U_{fn}^{(i)}(h) U_{fm}^{(k)}(h)] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \text{ lub } i \neq k, \\ M_n^{(i)} & \text{dla } n = m \text{ oraz } i = k. \end{cases}$$

gdzie

$$(3.8') \quad M_n^{(i)} = \int_0^h [\varrho_s (U_{sn}^{(i)}(x))^2 + \varrho_f (U_{fn}^{(i)}(x))^2] dx + \\ + h [\varrho_s m_s (U_{sn}^{(i)}(h))^2 + \varrho_f m_f (U_{fn}^{(i)}(h))^2].$$

Stałe występujące we współrzędnej uogólnionej (2.6) wyznaczamy na podstawie warunków początkowych (3.2) przy pomocy warunku ortogonalności (3.8). Otrzymujemy:

$$(3.9) \quad D_n^{(i)} = \dot{T}_n^{(i)}(0) = \frac{1}{M_n^{(i)}} \left\{ \int_0^h [\varrho_s u_{os}(x) U_{sn}^{(i)}(x) + \varrho_f u_{of}(x) U_{fn}^{(i)}(x)] dx + \right. \\ \left. + h [\varrho_s m_s u_{os}(h) U_{sn}^{(i)}(h) + \varrho_f m_f u_{of}(h) U_{fn}^{(i)}(h)] \right\}$$

$$\omega_n^{(i)} C_n^{(i)} = \dot{T}_n^{(i)}(0) = \frac{1}{M_n^{(i)}} \left\{ \int_0^h [\varrho_s v_{os}(x) U_{sn}^{(i)}(x) + \varrho_f v_{of}(x) U_{fn}^{(i)}(x)] dx + \right. \\ \left. + h [\varrho_s m_s v_{os}(h) U_{sn}^{(i)}(h) + \varrho_f m_f v_{of}(h) U_{fn}^{(i)}(h)] \right\},$$

dla $i = 1$ oraz $2, n = 1, 2, \dots$

Tak więc drgania swobodne określają równania (2.9) z funkcjami własnymi (3.7) oraz współrzędnymi uogólnionymi postaci

$$(3.10) \quad T_n^{(i)} = C_n^{(i)} \sin \omega_n^{(i)} t + D_n^{(i)} \cos \omega_n^{(i)} t,$$

w których stałe $C_n^{(i)}$ i $D_n^{(i)}$ określone są wzorami (3.9).

Drgania spowodowane wymuszeniem kinematycznym

Analizować będziemy drgania masy M_s (rys. 1a) spowodowane wymuszeniem kinematycznym podstawy (np. ramy pojazdu mechanicznego). Masa M_f będzie w naszych rozważaniach parametrem stymulującym ciśnienie cieczy. Drgania te określają następujące warunki brzegowe:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} A_0 \sigma_s(h, t) &= -M_s \ddot{u}_s(h, t), \\ A_0 \sigma_f(h, t) &= -M_f \ddot{u}_f(h, t), \\ u_s(0, t) &= u_f(0, t) = f(t). \end{aligned}$$

gdzie $f(t)$ jest funkcją wyrażającą wymuszenie kinematyczne. W dalszym

toku rozważań przyjmujemy, że jest ona funkcją harmoniczną. Dla ułatwienia analizy przyjmujemy zerowe warunki początkowe:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} u_s(x, 0) &= 0, & \dot{u}_s(x, 0) &= 0, \\ u_f(x, 0) &= 0, & \dot{u}_f(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązania zagadnienia będziemy poszukiwać w postaci sumy

$$(3.13) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= u_{1s}(x, t) + u_{2s}(x) \cdot f(t), \\ u_f(x, t) &= u_{1f}(x, t) + u_{2f}(x) \cdot f(t). \end{aligned}$$

Funkcje $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$ są tak dobrane, że $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ spełniają następujące warunki brzegowe

$$(3.14) \quad \begin{aligned} A_0 [(2N+A)u_{1s}(h, t)_{,x} + Qu_{1f}(h, t)_{,x}] &= -M_s \ddot{u}_{1s}(h, t), \\ A_0 [Qu_{1s}(h, t)_{,x} + Ru_{1f}(h, t)_{,x}] &= -M_f \ddot{u}_{1f}(h, t), \\ u_{1s}(0, t) &= 0, \\ u_{1f}(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

Warunek ten spełniają np. funkcje

$$(3.15) \quad \begin{aligned} u_{2s}(x) &= 1 + \alpha_s(x), & \alpha_s &= \frac{p^2 h}{W} [\varrho_s m_s (R - p^2 h^2 \varrho_f m_f) - \varrho_f m_f Q], \\ u_{2f}(x) &= 1 + \alpha_f x, & \alpha_f &= \frac{p^2 h}{W} [\varrho_f m_f (2N + A - p^2 h^2 \varrho_s m_s) - \varrho_s m_s Q] \end{aligned}$$

przy czym

$$W = [(2N+A) - p^2 h^2 \varrho_s m_s] [R - p^2 h^2 \varrho_f m_f] - Q^2.$$

Celem określenia funkcji $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ należy rozwiązać niejednorodny układ równań postaci

$$(3.16) \quad \begin{aligned} (2N+A)u_{1s}(x, t)_{,xx} + Qu_{1f}(x, t)_{,xx} - \varrho_s \ddot{u}_{1s}(x, t) &= g_s(x, t), \\ Qu_{1s}(x, t)_{,xx} + Ru_{1f}(x, t)_{,xx} - \varrho_f \ddot{u}_{1f}(x, t) &= g_f(x, t). \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.16) \quad \begin{aligned} g_s(x, t) &= \varrho_s u_{2s}(x) \dot{f}(t) - [(2N+A)u''_{2s}(x) + Qu''_{2f}(x)] f(t), \\ g_f(x, t) &= \varrho_f u_{2f}(x) \dot{f}(t) - [Qu''_{2s}(x) + Ru''_{2f}(x)] f(t). \end{aligned}$$

Funkcje $g_s(x, t)$ i $g_f(x, t)$ są zdeterminowane, gdyż $f(t)$ oraz $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$ są funkcjami znanymi. Funkcje $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ muszą spełniać więc równania (3.14), a ponadto następujące warunki początkowe:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} u_{1s}(x, 0) &= -u_{2s}(x) f(0), \\ u_{1f}(x, 0) &= -u_{2f}(x) f(0), \end{aligned}$$

$$\dot{u}_{1s}(x, 0) = -u_{2s}(x) f'(0),$$

$$\dot{u}_{1f}(x, 0) = -u_{2f}(x) f'(0).$$

Całki $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ są sumą całki ogólnej równań jednorodnych (równania (3.16) przy $g_s(x, t) = 0$ i $g_f(x, t) = 0$) spełniającej warunki brzegowe (3.14) i warunki początkowe (3.17) oraz całki szczególnej równań niejednorodnych (3.16) spełniającej warunki brzegowe (3.14) i zerowe warunki początkowe.

Jak można zauważyć, zagadnienie własne jest tu analogiczne do tego jakie rozważaliśmy w poprzednim akapicie dla drgań swobodnych. Całki $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ będziemy konstruować więc za pomocą funkcji własnych postaci (3.7). Jeśli przyjąć

$$(3.18) \quad f(t) = a \cdot \sin(pt),$$

gdzie a oznacza amplitudę drgań podstawy walca, p częstość drgań wymuszonych, to rozwiązanie ostateczne dla zagadnienia drgań wymuszonych kinematycznie wyraża się jak następuje

$$(3.19) \quad u_s(x, t) = u_s^{sw}(x, t) + u_s^{wym}(x, t),$$

$$u_f(x, t) = u_f^{sw}(x, t) + u_f^{wym}(x, t),$$

przy czym

$$(3.20) \quad u_s^{sw}(x, t) = ap \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_n^{(1)} H_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{sn}^{(1)}(x) \sin(\omega_n^{(1)} t) + \frac{\omega_n^{(2)} H_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{sn}^{(2)}(x) \sin(\omega_n^{(2)} t) \right],$$

$$u_f^{sw}(x, t) = ap \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_n^{(1)} H_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{fn}^{(1)}(x) \sin(\omega_n^{(1)} t) + \frac{\omega_n^{(2)} H_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{fn}^{(2)}(x) \sin(\omega_n^{(2)} t) \right],$$

$$u_s^{wym}(x, t) = \left\{ (1 + \alpha_s x) - p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{sn}^{(1)}(x) + \frac{H_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{sn}^{(2)}(x) \right] \right\} a \sin(pt),$$

$$u_f^{wym}(x, t) = \left\{ (1 + \alpha_f x) - p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{fn}^{(1)}(x) + \frac{H_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{fn}^{(2)}(x) \right] \right\} a \sin(pt).$$

W powyższych wzorach $H_n^{(i)}$ oznacza:

$$(3.21) \quad H_n^{(i)} = -\frac{1}{M_n^{(i)}} \left\{ \int_0^h [\varrho_s u_{2s}(x) U_{sn}^{(i)}(x) + \varrho_f u_{2f}(x) U_{fn}^{(i)}(x)] dx + \right. \\ \left. + h [\varrho_s m_s u_{2s}(h) U_{sn}^{(i)}(h) + \varrho_f m_f u_{2f}(h) U_{fn}^{(i)}(h)] \right\}$$

dla $i = 1$ i 2 .

Funkcje $u_s^{sw}(x, t)$ i $u_f^{sw}(x, t)$ określają drgania swobodne spowodowane nagłym przyłożeniem wymuszenia. W rzeczywistych układach fizycznych drgania te wygasają w krótkim czasie i nie mają większego znaczenia przy analizie drgań wymuszonych [8]. W dalszym ciągu będziemy uwzględniać tylko funkcje $u_s^{wym}(x, t)$ i $u_f^{wym}(x, t)$ określające drgania wymuszone.

Drgania spowodowane wymuszeniem siłowym

Interesują nas drgania wymuszone obciążeniem zmiennym w czasie przyłożonym do masy M_s . Zmierzać będziemy do określenia współczynnika przenoszenia tego obciążenia na podłoże. Niniejsze zagadnienie ilustrować może na przykład przenoszenie drgań pracującej maszyny na podłoże poprzez podkładkę izolacyjną wykonaną z perforowanego materiału elastycznego i wypełnionego cieczą.

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} A_0 \sigma_s(h, t) &= -M_s \ddot{u}_s(h, t) - P(t), & u_s(0, t) &= 0, \\ A_0 \sigma_f(h, t) &= -M_f \ddot{u}_f(h, t), & \dot{u}_f(0, t) &= 0. \end{aligned}$$

gdzie $P(t)$ oznacza obciążenie wymuszające. Przyjmiemy, że jest ono harmoniczne,

$$(3.23) \quad P(t) = P_0 \sin(pt).$$

Podobnie jak w poprzednim akapicie przyjmujemy zerowe warunki początkowe.

Stosujemy podobny sposób rozwiązywania równań jak poprzednio, tzn. rozwiązań poszukiwać będziemy w postaci następującej sumy

$$(3.24) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= u_{1s}(x, t) + u_{2s}(x) P(t), \\ u_f(x, t) &= u_{1f}(x, t) + u_{2f}(x) P(t). \end{aligned}$$

Najprostszymi funkcjami $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$ spełniającymi żądane warunki są funkcje liniowe

$$(3.25) \quad \begin{aligned} u_{2s}(x) &= -\kappa_s x, \\ u_{2f}(x) &= \kappa_f x, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.25') \quad \begin{aligned} \kappa_s &= \frac{R - p^2 hM_f/A_0}{(2N + A - p^2 hM_s/A_0)(R - p^2 hM_f/A_0) - Q^2}, \\ \kappa_f &= \frac{Q}{(2N + A - p^2 hM_s/A_0)(R - p^2 hM_f/A_0) - Q^2}. \end{aligned}$$

Ostateczne rozwiązania dla drgań wymuszonych siłą harmoniczną są następujące

$$(3.26) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= u_s^{sw}(x, t) + u_s^{wym}(x, t), \\ u_f(x, t) &= u_f^{sw}(x, t) + u_f^{wym}(x, t), \end{aligned}$$

gdzie

$$u_s^{sw}(x, t) = pP_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_n^{(1)} Q_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{sn}^{(1)}(x) \sin(\omega_n^{(1)} t) + \frac{\omega_n^{(2)} Q_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{sn}^{(2)}(x) \sin(\omega_n^{(2)} t) \right]$$

$$u_f^{sw}(x, t) = pP_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_n^{(1)} Q_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{fn}^{(1)}(x) \sin(\omega_n^{(1)} t) + \frac{\omega_n^{(2)} Q_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{fn}^{(2)}(x) \sin(\omega_n^{(2)} t) \right]$$

(3.27)

$$u_s^{wym}(x, t) = P_0 \sin(pt) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{Q_n^{(1)} p^2}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{sn}^{(1)}(x) + \frac{Q_n^{(2)} p^2}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{sn}^{(2)}(x) \right] - \kappa_s x \right\},$$

$$u_f^{wym}(x, t) = P_0 \sin(pt) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{Q_n^{(1)} p^2}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{fn}^{(1)}(x) + \frac{Q_n^{(2)} p^2}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{fn}^{(2)}(x) \right] + \kappa_f x \right\}.$$

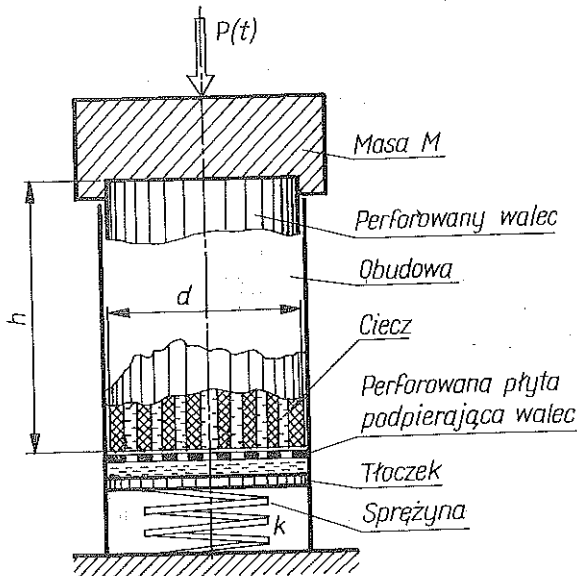
Współczynnik amplitudy wyraża się:

$$(3.28) \quad Q_n^{(i)} = \frac{1}{M_n^{(i)}} \left\{ \int_0^h [-\varrho_s \kappa_s x U_{sn}^{(i)}(x) + \varrho_f \kappa_f x U_{fn}^{(i)}(x)] dx + \right. \\ \left. + h^2 [\varrho_s m_s \kappa_s U_{sn}^{(i)}(h) + \varrho_f m_f \kappa_f U_{fn}^{(i)}(h)] \right\}.$$

dla $i = 1$ i 2 .

4. DRGANIA PERFOROWANEGO WALCA WYPELNIONEGO CIECZĄ ZE STEROWANYM CIŚNIENIEM I PRZEMIESZCZENIEM CIECZY

Analizowany w tej pracy kompozyt (elastyczne ciało stałe-ciecz) stwarza możliwość sterowania parametrem wibroizolacji. Poza doбором odpowiedniej struktury kompozytu tak fizycznej (rodzaj materiału składników) jak i geometrycznej (rozmiar i kształt perforacji) istnieje jeszcze możliwość zewnętrznej interwencji na parametr wibroizolacji. W niniejszym punkcie chcemy przedstawić jedną z możliwości. Polega ona na umożliwieniu cieczy dodatkowego przemieszczania się poza kontur perforowanego cylindra (rys. 3). Ciecz pod wpływem obciążenia przyłożonego do masy M wypływa poniżej podstawy



Rys. 3. Schemat wibroizolatora umożliwiającego przemieszczanie się cieczy poza perforowany cylinder

cyindra na tłoczek podparty sprężyną o zadanej sztywności k . Ciśnienie cieczy zmienia się proporcjonalnie do ugięcia sprężyny. Przeanalizujemy drgania swobodne i wymuszone takiego układu.

Drgania swobodne

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe

$$(4.1) \quad \begin{aligned} A_0 [\sigma_s(h, t) + \sigma_f(h, t)] &= -M\ddot{u}_s(h, t), \\ u_s(h, t) &= u_f(h, t), \\ u_s(0, t) &= 0, \\ A_0 \sigma_f(0, t) &= -ku_f(0, t), \end{aligned}$$

oraz warunki początkowe (3.2). Rozwiązując zagadnienie własne otrzymujemy następujące równanie charakterystyczne na wyznaczenie częstości drgań własnych

$$(4.2) \quad \begin{aligned} &2(1-\delta_1)(1-\delta_2) \varrho_s \varrho_f c_s c_w \omega - \sin \alpha \sin \beta \omega \times \\ &\times \left[(\delta_1 - \delta_2)^2 \bar{M}\bar{k} + \varrho_s \varrho_f \frac{(1-\delta_2)^2 \delta_1^2 c_s^2 + (1-\delta_1)^2 \delta_2^2 c_w^2}{\delta_1 \delta_2} \right] - \\ &- \cos \alpha \cos \beta \omega \varrho_s \varrho_f c_s c_w [(1-\delta_1)^2 + (1-\delta_2)^2] - \\ &- \sin \alpha \cos \beta \varrho_f \delta_2 c_w [\bar{M}\omega^2 + \bar{k}(1-\delta_1)^2] (\delta_1 - \delta_2) + \\ &+ \sin \beta \cos \alpha \varrho_f \delta_1 c_s [\bar{M}\omega^2 + \bar{k}(1-\delta_2)^2] (\delta_1 - \delta_2) = 0, \end{aligned}$$

gdzie α i β określają wzory (3.4) natomiast $\bar{M} = M/A_0$, $\bar{k} = k/A_0$, $A_0 = \pi d^2/4$.

Postawionym wyżej warunkom brzegowym odpowiadają poniższe funkcje własne:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{U}_{sn}^{(i)}(x) &= \bar{Q}_{1n}^{(i)} \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) + \bar{Q}_{2n}^{(i)} \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) + \bar{Q}_{3n}^{(i)} \sin\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x + \\ &+ \bar{Q}_{4n}^{(i)} \cos\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x, \\ \bar{U}_{fn}^{(i)}(x) &= \delta_1 \left[\bar{Q}_{1n}^{(i)} \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) + \bar{Q}_{2n}^{(i)} \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) \right] + \\ &+ \delta_2 \left[\bar{Q}_{3n}^{(i)} \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x\right) + \bar{Q}_{4n}^{(i)} \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x\right) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{1n}^{(i)} = & (1 - \delta_2) (\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s \sin \alpha_n^{(i)} \sin \beta_n^{(i)} + \\ & + (\delta_1 - \delta_2) \bar{M} \omega_n^{(i)} \sin \beta_n^{(i)} \cos \alpha_n^{(i)} + (1 - \delta_1) (\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w \cos \alpha_n^{(i)} \cos \beta_n^{(i)} - \\ & - (1 - \delta_2) (\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{2n}^{(i)} = & (1 - \delta_2) (\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s \sin \beta_n^{(i)} \cos \alpha_n^{(i)} - \\ & - (\delta_1 - \delta_2) \bar{M} \omega_n^{(i)} \sin \alpha_n^{(i)} \sin \beta_n^{(i)} + \\ & + (1 - \delta_1) (\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w \sin \alpha_n^{(i)} \cos \beta_n^{(i)}. \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \bar{\Omega}_{3n}^{(i)} = & (1 - \delta_1) (\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w \sin \alpha_n^{(i)} \sin \beta_n^{(i)} - \\ & - (\delta_1 - \delta_2) \bar{M} \omega_n^{(i)} \sin \alpha_n^{(i)} \cos \beta_n^{(i)} + (1 - \delta_2) (\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s \cos \alpha_n^{(i)} \cos \beta_n^{(i)} - \\ & - (1 - \delta_1) (\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s. \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega}_{4n}^{(i)} = -\bar{\Omega}_{2n}^{(i)},$$

dla $i = 1$ i 2 oraz $n = 1, 2, 3, \dots$. Funkcje własne (4.3) spełniają warunek ortogonalności (2.10), który dla warunków brzegowych (4.1) przyjmuje postać

$$(4.5) \quad \int_0^h [\varrho_s \bar{U}_{sn}^{(i)}(x) \bar{U}_{sm}^{(k)}(x) + \varrho_f \bar{U}_{fn}^{(i)}(x) \bar{U}_{fm}^{(k)}(x)] dx + \\ + \bar{M} \bar{U}_{sn}^{(i)}(h) \bar{U}_{sm}^{(k)}(h) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \text{ lub } i \neq k, \\ m_n^{(i)} & \text{dla } n = m \text{ oraz } i = k. \end{cases}$$

gdzie

$$(4.5') \quad m_n^{(i)} = \int_0^h \{ \varrho_s [\bar{U}_{sn}^{(i)}(x)]^2 + \varrho_f [\bar{U}_{fn}^{(i)}(x)]^2 \} dx + M [\bar{U}_{sn}^{(i)}(h)]^2,$$

dla $i = 1$ i 2 oraz $n = 1, 2, \dots$.

Drgania swobodne dla sformułowanego w tym punkcie zagadnienia początkowo-brzegowego opisują wzory (2.9) z funkcjami własnymi (4.3) i współzrędnymi uogólnionymi postaci (3.10), w których stałe $C_n^{(i)}$ i $D_n^{(i)}$ określone są poniżej

$$\begin{aligned} C_n^{(i)} = & \frac{1}{m_n^{(i)} \omega_n^{(i)}} \left\{ \varrho_s \int_0^h v_{0s}(x) \bar{U}_{sn}^{(i)}(x) dx + \right. \\ & \left. + \varrho_f \int_0^h v_{0f}(x) \bar{U}_{fn}^{(i)}(x) dx + \bar{M} v_{s0}(h) \bar{U}_{sn}^{(i)}(h) \right\}, \end{aligned}$$

(4.6)

$$D_n^{(i)} = \frac{1}{m_n^{(i)}} \left\{ Q_s \int_0^h u_{0s}(x) \bar{U}_{sn}^{(i)}(x) dx + \right. \\ \left. + Q_f \int_0^h u_{0f}(x) \bar{U}_{fn}^{(i)}(x) dx + \bar{M} u_{s0}(h) \bar{U}_{sn}^{(i)}(h) \right\}.$$

gdzie $m_n^{(i)}$ określa wzór (4.5').

Drgania wymuszone

Rozważać będziemy drgania wymuszone siłą harmonicznie zmienną w czasie

$$(4.7) \quad P(t) = P_0 \sin(pt),$$

przyłożoną do masy M (rys. 2). Przyjmiemy więc następujące warunki brzegowe

$$(4.8) \quad \begin{aligned} A_0 [\sigma_s(h, t) + \sigma_f(h, t)] &= -M\ddot{u}_s(h, t) - P(t), \\ u_s(h, t) &= u_f(h, t), \\ u_s(0, t) &= 0, \\ A_0 \sigma_f(0, t) &= -ku_f(0, t), \end{aligned}$$

oraz zerowe wartości przemieszczeń i prędkości w chwili początkowej (warunki (3.12)). Wykorzystamy procedurę rozwiązywania stosowaną w punkcie 3 (wzór (3.24)). Funkcje $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$ dla tego zagadnienia przyjmujemy w postaci

$$(4.9) \quad \begin{aligned} u_{2s}(x) &= \bar{\alpha}_s \cdot x, \\ u_{2f}(x) &= \bar{\alpha}_f \cdot x + (\bar{\alpha}_s - \bar{\alpha}_f) h, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.9a) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha}_s &= -(R - \bar{k}h)/W, \\ \bar{\alpha}_f &= (Q + \bar{k}h)/W, \\ W &= [(2N + A)R - Q^2] - [2N + A + 2Q + R] \bar{k}h - p^2 \bar{M}h(R - \bar{k}h). \end{aligned}$$

Ostateczne rozwiązanie postawionego w tym punkcie zagadnienia wyraża się jak następuje:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= u_s^{sw}(x, t) + u_s^{sym}(x, t), \\ u_f(x, t) &= u_f^{sw}(x, t) + u_f^{sym}(x, t), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 u_s^{sw}(x, t) = & -\frac{P_0}{A_0} p \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_n^{(1)} R_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} \bar{U}_{sn}^{(1)}(x) \sin(\omega_n^{(1)} t) + \right. \\
 & \left. + \frac{\omega_n^{(2)} R_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} \bar{U}_{sn}^{(2)}(x) \sin(\omega_n^{(2)} t) \right], \\
 (4.11) \quad u_f^{sw}(x, t) = & -\frac{P_0}{A_0} p \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_n^{(1)} R_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} \bar{U}_{fn}^{(1)}(x) \sin(\omega_n^{(1)} t) + \right. \\
 & \left. + \frac{\omega_n^{(2)} R_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} \bar{U}_{fn}^{(2)}(x) \sin(\omega_n^{(2)} t) \right],
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 u_s^{wym}(x, t) = & \frac{P(t)}{A_0} \left\{ \bar{\alpha}_s x + p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{R_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} \bar{U}_{sn}^{(1)}(x) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} \bar{U}_{sn}^{(2)}(x) \right] \right\}, \\
 (4.12) \quad u_f^{wym}(x, t) = & \frac{P(t)}{A_0} \left\{ \bar{\alpha}_f x + (\bar{\alpha}_s - \bar{\alpha}_f) h + p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{R_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} \bar{U}_{fn}^{(1)}(x) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} \bar{U}_{fn}^{(2)}(x) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

W powyższych wzorach

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad R_n^{(i)} = & \frac{1}{m_n^{(i)}} \left\{ \varrho_s \int_0^h u_{2s}(x) \bar{U}_{sn}^{(i)}(x) dx + \varrho_f \int_0^h u_{2f}(x) \bar{U}_{fn}^{(i)}(x) dx + \right. \\
 & \left. + \bar{M} u_{2s}(h) \bar{U}_{sn}^{(i)}(h) \right\},
 \end{aligned}$$

dla $i = 1$ i 2 .

5. ANALIZA ZJAWISKA WIBROIZOLACJI

Uwagę skupimy na dwóch parametrach określających zjawisko wibroizolacji. Pierwszy z nich nazywać będziemy współczynnikiem uwielokrotnienia amplitudy i oznaczać przez μ , drugi natomiast współczynnikiem przenoszenia obciążenia i oznaczać przez γ .

Współczynnik uwielokrotnienia amplitudy μ wyraża stosunek amplitudy drgań wymuszonych porowatego walca do amplitudy drgań wymuszających.

Dla zagadnienia rozważanego w punkcie 3 "Drgania spowodowane wymuszeniem kinematycznym", współczynnik ten określamy jak następuje (por. wzór (3.20)₃):

$$(5.1) \quad \mu = \frac{u_s^{\text{wym}}(h, t)}{u_s(0, t)} = 1 + \alpha_s h - p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} U_{sn}^{(1)}(h) + \frac{H_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} U_{sn}^{(2)}(h) \right].$$

Współczynnik μ wyraża stosunek amplitudy drgań masy M_s do amplitudy drgań podstawy walca, której ruch jest wymuszony kinematycznie. Masa M_s reprezentuje tu urządzenie techniczne, które ma być izolowane od drgań podłoża. Izolacja będzie miała miejsce gdy w żądanym zakresie częstości drgań wymuszonych p współczynnik μ będzie mniejszy od jedności.

Na rys. 4 przedstawiono wykres zależności tego współczynnika od częstości drgań wymuszonych odniesionych do pierwszej częstości drgań własnych z pierwszej grupy $p/\omega_1^{(1)}$ dla następujących danych:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} (2N + A) &= 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2, & R &= 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, & Q &= 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, \\ \rho_s &= 2126 \text{ kg/m}^3, & \rho_f &= 187 \text{ kg/m}^3, \\ m_s &= 100, & m_f &= 10; 7,5; 5; 2,5; & h &= 0,1 \text{ m}. \end{aligned}$$

Na podstawie rys. 4 stwierdzić możemy: po pierwsze, że zakres skutecznej izolacji znajduje się pomiędzy pierwszą częstością z pierwszej grupy i pierwszą częstością z drugiej grupy, po drugie, że skuteczność izolacji zależy wyraźnie od parametru m_f . Parametr m_f możemy nazwać parametrem stymulującym ciśnienie cieczy a pośrednio wartość współczynnika izolacji i zakresu częstości skutecznej izolacji. Zakres skutecznej izolacji zależy, jak widać, od różnicy pomiędzy częstościami $\omega_1^{(1)}$ i $\omega_1^{(2)}$. Tablica 1 ilustruje, jak wpływa na tę różnicę parametr m_f .

Współczynnik przenoszenia obciążenia γ wyraża stosunek siły przenoszanej na podłoże do siły wymuszającej drgania.

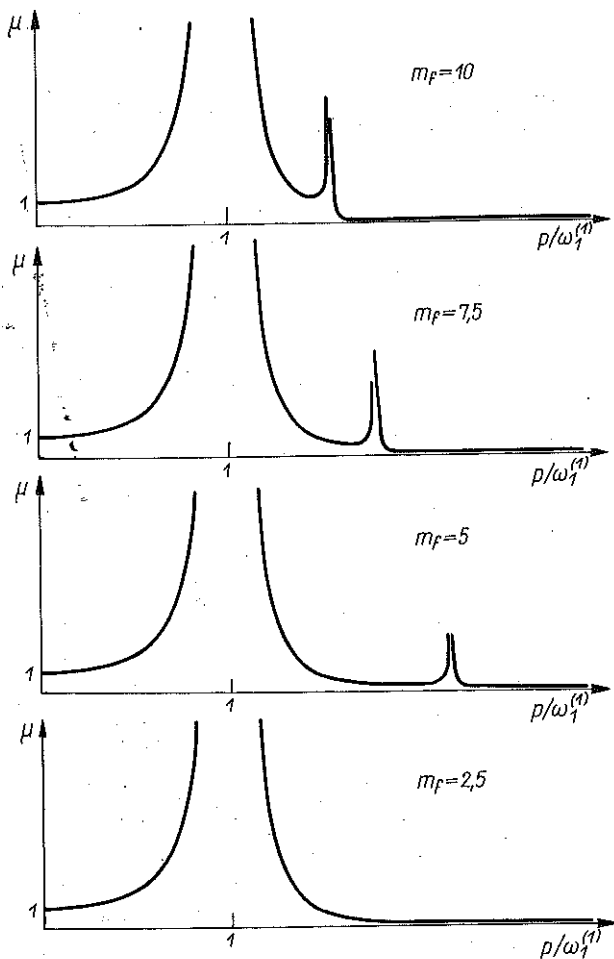
Osiową siłę w porowatym walcu $P_x(x, t)$ określamy jak następuje

$$(5.3) \quad P_x(x, t) = A_0 [\sigma_s(x, t) + \sigma_f(x, t)].$$

Zatem współczynnik przenoszenia obciążenia γ określamy jako

$$(5.4) \quad \gamma = \frac{P_x(0, t)}{P(t)}.$$

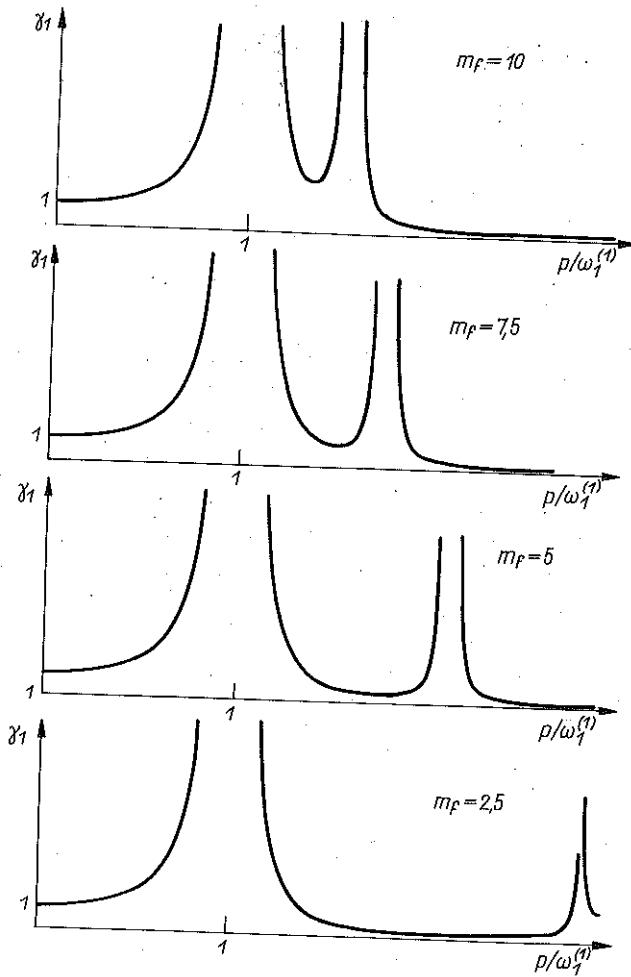
Dla zagadnienia drgań wymuszonych rozpatrywanych w punkcie 3. współczynnik ten przyjmuje postać



Rys. 4. Współczynnik uwielokrotnienia amplitudy w zależności od częstości wymuszenia

Tablica 1

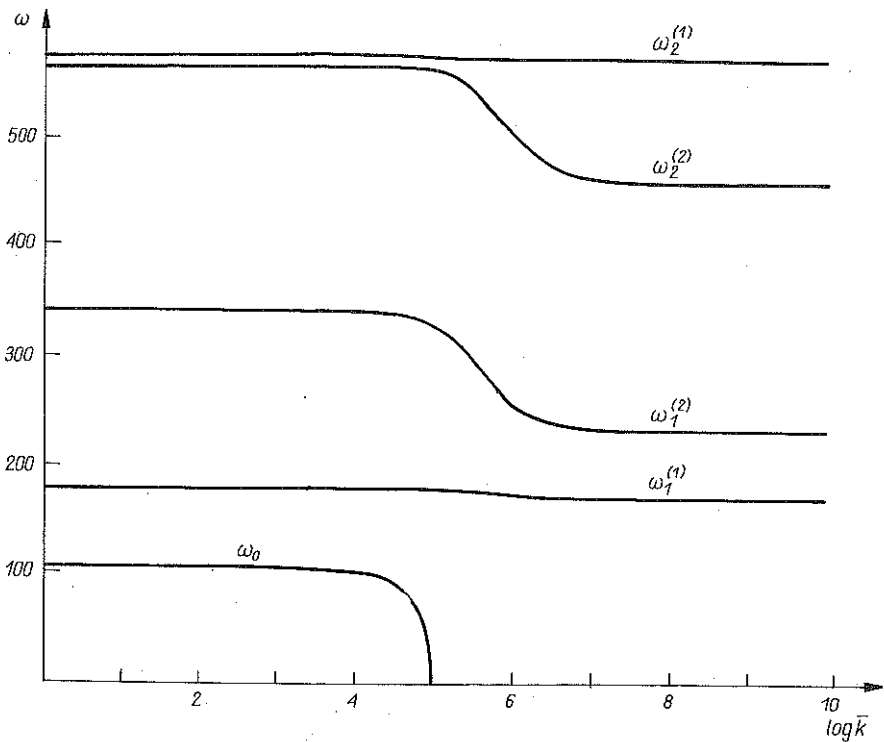
m_f	$\omega_1^{(1)}$	$\omega_1^{(2)}$
10	15,03	20,5
9	15,06	21,6
7,6	15,09	23,5
5	15,13	28,4
2,5	15,16	38,8



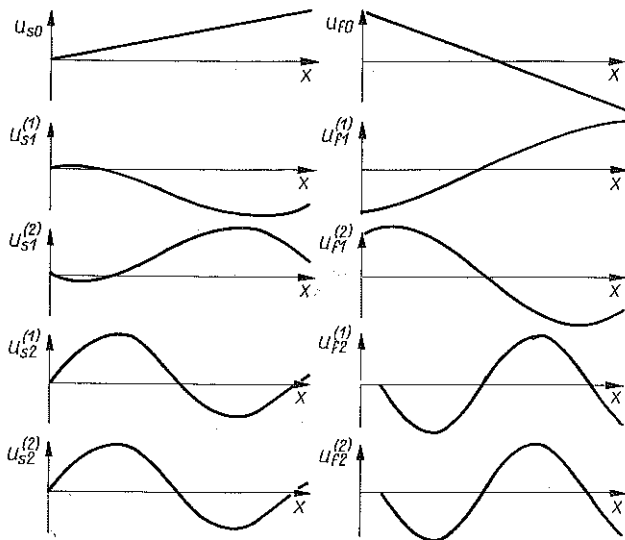
Rys. 5. Współczynnik przenoszenia obciążenia w zależności od częstości wymuszenia dla punktu 3

$$(5.5) \quad \gamma_1 = -(2N + A + Q) \kappa_s + (Q + R) \kappa_f + \\ + e_s c_w c_s \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{Q_n^{(1)} \omega_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} [(e_s + e_f \delta_1) \Omega_{1n}^{(1)} - (e_s + e_f \delta_2) \Omega_{2n}^{(1)}] + \right. \\ \left. + \frac{Q_n^{(2)} \omega_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} [(e_s + e_f \delta_1) \Omega_{1n}^{(2)} - (e_s + e_f \delta_2) \Omega_{2n}^{(2)}] \right\}.$$

Natomiast dla zagadnienia drgań wymuszonych rozważanych w punkcie 4 jego postać jest:



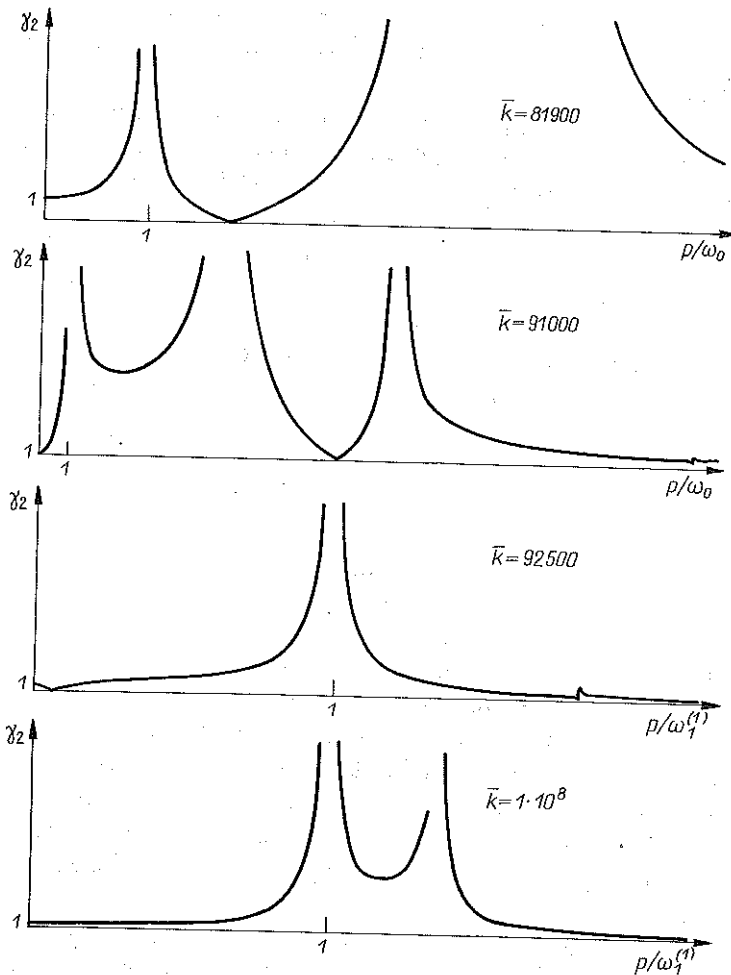
Rys. 6. Zależność pierwszych częstości drgań własnych od sztywności sprężyny dla punktu 4



Rys. 7. Funkcje własne perforowanego walca wypełnionego cieczą dla małej sztywności sprężyny

$$(5.6) \quad \gamma_2 = (2N + A + Q) \bar{\alpha}_s + (Q + R) \bar{\alpha}_f + \\ + p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{R_n^{(1)} \omega_n^{(1)}}{(\omega_n^{(1)})^2 - p^2} [(q_s + q_f \delta_1) c_s \bar{\Omega}_{1n}^{(1)} + (q_s + q_f \delta_2) c_w \bar{\Omega}_{3n}^{(1)}] + \right. \\ \left. + \frac{R_n^{(2)} \omega_n^{(2)}}{(\omega_n^{(2)})^2 - p^2} [(q_s + q_f \delta_1) c_s \bar{\Omega}_{1n}^{(2)} + (q_s + q_f \delta_2) c_w \bar{\Omega}_{3n}^{(2)}] \right\}.$$

Na rys. 5 przedstawiono wykres zależności współczynnika γ_1 od stosunku częstości $p/\omega_1^{(1)}$. Komentarz dotyczący przebiegu tej zależności jest analogiczny do komentarza odnośnie zależności μ od $p/\omega_1^{(1)}$ zamieszczonej na rys. 4.



Rys. 8. Współczynnik przenoszenia obciążenia w zależności od częstości wymuszenia dla punktu 4

Wprowadzenie elementu sprężystego stymulującego ciśnienie i przemieszczanie się cieczy (por. rys. 3) komplikuje znacznie rozwiązanie, jednakże daje dodatkowe możliwości sterowania efektem wibroizolacji. Komplikacja rozwiązania polega przede wszystkim na tym, że w pewnym zakresie sztywności sprężyny pojawia się w rozwiązaniach dodatkowa (poza dwiema grupami) częstość drgań własnych układu. Na rys. 6, ilustrującym zależność pierwszych częstości od sztywności sprężyny, częstość tę oznaczono przez ω_0 . Z rys. 7 wynika, że częstość ta nie ma pary. Znaczy to, że występuje dodatkowa postać drgań układu spowodowana drganiami sprężyny. Charakterystycznym jest to, że częstość ω_0 znika dla dużych sztywności sprężyny.

Rysunek 8 ilustruje zależność współczynnika przenoszenia obciążenia γ_2 od częstości drgań wymuszonych, odniesionych do zerowej (lub pierwszej) częstości drgań własnych. Generalnie można stwierdzić, że wprowadzenie sprężyny umożliwia uzyskanie efektu wibroizolacji dla niskich częstości drgań wymuszonych.

W poprzednim przykładzie (rys. 5) efekt wibroizolacji uzyskano pomiędzy pierwszą częstością drgań własnych z pierwszej grupy $\omega_1^{(1)}$ i pierwszą częstością drgań własnych z drugiej grupy $\omega_1^{(2)}$. Tutaj efekt wibroizolacji ma miejsce już przed pierwszą częstością drgań własnych $\omega_1^{(1)}$ co jest niezwykle ważne przy izolowaniu układów wolnodrgających. Spotykane elementy sprężyste (np. gumowe klocki) dają pewien efekt wibroizolacji dla wysokich częstości, tj. poza pierwszą częstością rezonansową.

Z rys. 8 wynika również, że wraz ze zwiększaniem sztywności sprężyny k efekt wibroizolacji uzyskuje się również dla wyższych częstości drgań wymuszonych.

6. UWAGI KOŃCOWE

W niniejszej pracy przedstawiono tendencje i możliwości sterowania współczynnikami określającymi jakość wibroizolacji. Zbadano dość szczegółowo wpływ zmian ciśnienia cieczy i jej przemieszczania się na parametry izolacji drgań. Nie poszukiwano jednak optymalnych parametrów wibroizolacji, co należałoby uczynić w konkretnych przypadkach. Nie analizowano też wpływu wszystkich możliwych parametrów (własności fizyczne materiału, struktura perforacji) na efekt wibroizolacji. Taki wpływ nie zawsze jest istotny. Ilustruje to np. Tablica 2 wyrażająca wpływ współczynnika sprzężenia Q na częstości drgań własnych.

Szczegółowa analiza wszystkich parametrów miałaby sens, gdyby dostępne były konkretne dane odnośnie tworzywa konstrukcyjnego. Takimi danymi na obecnym etapie nie dysponujemy. Zakres niniejszej pracy zamyka się więc na opracowaniu metody analizy efektu wibroizolacji dla takiego tworzywa

Tablica 2

$Q \left[\frac{N}{m^2} \right]$	$\omega_1^{(1)}$	$\omega_1^{(2)}$
$1 \cdot 10^3$	15,31	22,75
$4 \cdot 10^3$	15,27	22,78
$1 \cdot 10^4$	15,04	22,93
$2 \cdot 10^4$	14,27	23,42
$3 \cdot 10^4$	13,09	24,09

jakim jest perforowane elastyczne ciało stałe wypełnione cieczą. Na podstawie zamieszczonych tu przykładów można jednakże stwierdzić, że materiał taki daje duże możliwości aplikacyjne w zagadnieniach wibroizolacji.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. A. BIOT, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, I. Low-frequency range*, J. Acoust. Soc. Amer., **28**, 2, 1956.
2. R. H. CANON, *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973.
3. R. DZIĘCIELAK, *Propagacja fal nieciągłości w ośrodku porowatym nasyconym cieczą*, Praca habilitacyjna, Zeszyty Nauk. Pol. Poznańskiej, 118, 1980.
4. S. J. KOWALSKI, *Identification of the coefficients in the equations of motion for a fluid-saturated porous medium*, Acta Mech., **47**, 1983.
5. S. J. KOWALSKI, *Drgania porowatego walca wypełnionego cieczą*, Arch. Budowy Maszyn, **26**, 4, 1979.
6. S. J. KOWALSKI, R. KUC, *Wpływ strukturalnego przesunięcia fazowego na postać drgań w porowatym walcu wypełnionym cieczą*, Arch. Budowy Maszyn, **27**, 3, 1980.
7. S. J. KOWALSKI, *Application of fluid-saturated porous solid to vibration-isolation problems*, J. Sound and Vibr., **66**, 2, 1979.
8. *Drgania i fale w ciałach stałych*, [red. S. Kaliski], PWN, Warszawa 1966.

Резюме

АНАЛИЗ ВИБРОИЗОЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПЕРФОРИРОВАННЫХ СРЕД ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Целью работы является анализ виброизоляционных свойств перфорированных сред, заполненных жидкостью. Основу анализа составляет перфорированный упругий цилиндр, заполненный жидкостью. Рассматриваются свободные и вынужденные колебания со сосредоточенной массой, представляющей массу технического устройства, находящегося на виброизоляторе. Учитывается влияние давления жидкости и ее перемещений на вид колебаний и эффект виброизоляции. Суммарным результатом являются диаграммы, представляющие зависимость коэффициента увеличения амплитуды и коэффициента переноса нагружения от параметров управляемых внешним образом, т.е. давления жидкости в порах и величины ее перемещения.

SUMMARY

ANALYSIS OF VIBRATION-ISOLATION PROPERTIES OF FLUID-FILLED PERFORATED MEDIA

Considerations are based on the analysis of an elastic perforated cylinder filled with liquid. Free and forced vibrations are considered with a concentrated mass representing the mass of the technical device resting on a vibro-isolator. Influences of the liquid pressure and displacement upon the vibration form and vibration-isolation effect are taken into account. Graphs are given which illustrate the dependence of the amplitude multiplication factor and load transmission coefficient on the externally controllable parameters, i.e. the liquid pressure and translation within the pores.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 11 listopada 1987 r.