

OBSZARY NIESTATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ UKŁADU PRĘTÓW(*)

ANNA F O R Y Ś i ANDRZEJ F O R Y Ś (KRAKÓW)

W pracy wyznaczono pierwszy obszar niestateczności płaskiego układu trzech prętów lepkosprężystych, połączonych przegubowo. Utratę stateczności wywołuje harmoniczne obciążenie pręta poziomego. W obliczeniach uwzględniono jedynie oddziaływanie pręta poziomego na pręty pionowe oraz rozważono symetryczne drgania układu. Układ jest najbardziej podatny na utratę stateczności, gdy jest dostrojony na rezonans wewnętrzny.

1. WSTĘP

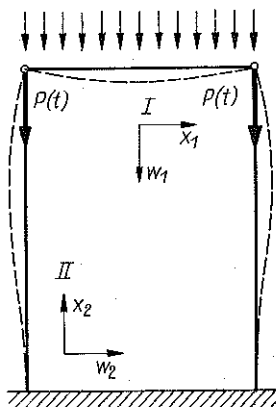
Praca niniejsza nawiązuje do zagadnień omawianych w pracach [1, 2], dotyczących zjawisk rezonansowych w układach prętów połączonych za pomocą przegubów. Interesujący jest przypadek rezonansu wewnętrznego ze względu na jego charakter autoparametryczny.

Celem pracy jest próba wyznaczenia obszarów niestateczności dynamicznej płaskiego układu trzech prętów przyrównanych, połączonych przegubowo. Podobnie jak w poprzednich pracach uwzględniono sprzężenie elementów układu poprzez siły podłużne, wewnętrzne, które są siłami poprzecznymi na końcach sąsiednich prętów. Jeżeli obciążenie zewnętrzne zmienia się okresowo w czasie, to także siły sprzęgające okresowo zmieniają się w czasie. Rozważono drgania poprzeczne, symetryczne, odbywające się w jednej płaszczyźnie. Badano wpływ parametrów charakteryzujących pręty (długość, wartość współczynników tłumienia wewnętrznego) na uzyskane obszary stateczności. Szczegółowo rozważono sytuację, w której układ jest dostrojony na rezonans wewnętrzny, tzn. gdy zachodzą związki: $\omega_{01} = 2\omega_{02}$ oraz $\omega = \omega_{01}$, gdzie ω_{01} , ω_{02} są najniższymi częstościami kołowymi drgań własnych prętów, a ω jest częstością kołową wymuszenia zewnętrznego.

(*) Praca wykonana częściowo w ramach CPBP 02.01/6.3.

2. RÓWNANIA RUCHU

Rozpatrywany w pracy układ prętów jest przedstawiony na rys. 1. Poziomy pręt I jest połączony przegubowo w punktach A i B z dwoma



Rys. 1. Układ drgający

jednakowymi prętami II, których dolne końce C i D są sztywno zamocowane. Zakładamy, że pręty są pryzmatyczne, o przekroju kwadratowym oraz że są wykonane z materiałów lepkosprężystych typu Kelvina–Voigta. Na pręt poziomy działa, rozłożone w sposób ciągły obciążenie, harmonicznie zmienne w czasie:

$$(2.1) \quad q(x_1, t) = q_0 \cos \omega t,$$

gdzie $q(x_1, t)$ jest liniową gęstością siły wymuszającej, q_0 jest jej amplitudą, ω częstotliwością kątową wymuszenia, a t oznacza czas. Pręt I działa na pionowe pręty II siłami podłużnymi $S_2(t)$, które są siłami poprzecznymi na jego końcach. Z kolei pręty pionowe oddziałują na pręt poziomy siłami podłużnymi $S_1(t)$. Na podstawie wyników prac [1, 2], w których analizowano krzywe rezonansowe dla rozważanego układu prętów, uzasadnionym wydaje się pominięcie oddziaływań prętów poprzez siły $S_1(t)$ wobec oddziaływań poprzez siły $S_2(t)$. Ponadto zakładamy, że poprzeczne drgania prętów odbywają się w płaszczyźnie wyznaczonej przez początkowe położenie prętów oraz że drgania układu są symetryczne, czyli przeguby A i B nie przemieszczają się. Pomijamy także ciężar prętów.

Na pręt poziomy działa zatem wymuszenie harmoniczne, natomiast na każdy z prętów pionowych działa siła podłużna $S_2(t)$.

Wprowadzamy następujące oznaczenia (wskaźnik $i = 1, 2$ numeruje pręty): l_i oznacza długość pręta, E_i moduł Younga, I_i moment bezwładności pola przekroju, A_i pole przekroju pręta, ρ_i gęstość materiału, η_i współczynnik

lepkości materiału pręta, $\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}$. Równanie ruchu dla pręta poziomego ma postać [3]:

$$(2.2) \quad E_1 I_1 \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + \tau_1 \frac{\partial^5 w_1}{\partial x_1^4 \partial t} \right) + \varrho_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = q_0 \cos \omega t,$$

a warunki brzegowe są następujące:

$$(2.3) \quad w_1(0, t) = w_1(l_1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(0, t) + \tau_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^2 \partial t}(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(l_1, t) + \tau_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^2 \partial t}(l_1, t) = 0.$$

Przybliżonego rozwiązania zagadnienia (2.2) i (2.3) poszukujemy w postaci rozwinięcia na szereg funkcji własnych zagadnienia drgań swobodnych, nietłumionych:

$$(2.4) \quad w_1(x_1, t) = \sum_{k=1}^r p_k(t) \sin \frac{k\pi x_1}{l_1}.$$

Dalsze postępowanie jest standardowe: wstawiamy rozwiązanie (2.4) do równania (2.2), mnożymy przez $\sin m\pi x_1/l_1$, całkujemy względem x_1 od 0 do l_1 i po wykorzystaniu warunków ortogonalności otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(2.5) \quad \varrho_1 A_1 \ddot{p}_n + \tau_1 E_1 I_1 \lambda_n^4 \dot{p}_n + E_1 I_1 \lambda_n^4 p_n = \frac{2q_0 [1 - (-1)^n]}{n\pi} \cos \omega t,$$

$$n = 1, 2, \dots, r,$$

gdzie $\lambda_n = n\pi/l_1$.

Ponieważ interesują nas jedynie drgania ustalone pręta poziomego, poszukujemy rozwiązań równań (2.5) w postaci:

$$(2.6) \quad p_n(t) = q_0 p'_n \cos \omega t + q_0 p''_n \sin \omega t,$$

gdzie p'_n, p''_n są stałymi. Na podstawie (2.5) otrzymujemy:

$$(2.7) \quad p'_n = \frac{2 [1 - (-1)^n] (E_1 I_1 \lambda_n^4 - \varrho_1 A_1 \omega^2)}{n\pi [(E_1 I_1 \lambda_n^4 - \varrho_1 A_1 \omega^2)^2 + \tau_1^2 E_1^2 I_1^2 \omega^2 \lambda_n^8]},$$

$$p''_n = \frac{2 [1 - (-1)^n] \tau_1 E_1 I_1 \omega \lambda_n^4}{n\pi [(E_1 I_1 \lambda_n^4 - \varrho_1 A_1 \omega^2)^2 + \tau_1^2 E_1^2 I_1^2 \omega^2 \lambda_n^8]}.$$

Zgodnie z (2.4) drgania ustalone pręta poziomego opisywane są wyrażeniem:

$$(2.8) \quad w_1(x_1, t) = q_0 \cos \omega t \cdot \sum_{n=1}^r p'_n \sin \lambda_n x_1 + q_0 \sin \omega t \cdot \sum_{n=1}^r p''_n \sin \lambda_n x_1,$$

a stąd siła poprzeczna na końcu $x_1 = 0$ pręta poziomego:

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad S_2(t) &= -E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^3}(0, t) - \tau_1 E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{x_1^3 \partial t}(0, t) \approx \\
 &\approx -E_1 I_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(0, t) = -q_0 E_1 I_1 \left(\cos \omega t \cdot \sum_n p'_n \lambda_n^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \omega t \cdot \sum_n p''_n \lambda_n^3 \right) = \\
 &= -q_0 E_1 I_1 \sqrt{\left(\sum_n p'_n \lambda_n^3 \right)^2 + \left(\sum_n p''_n \lambda_n^3 \right)^2} \cos(\omega t - \varphi),
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_n p''_n \lambda_n^3}{\sum_n p'_n \lambda_n^3}.$$

Na podstawie powyższego wzoru stwierdzamy, że na pręty pionowe działają siły harmoniczne o częstotliwości ω obciążenia pręta poziomego. Przy odpowiednim wyborze chwili początkowej siłę, która działa na pręty pionowe zapiszemy w postaci następującej:

$$(2.10) \quad P(t) = q_0 E_1 I_1 \sqrt{\left(\sum_n p'_n \lambda_n^3 \right)^2 + \left(\sum_n p''_n \lambda_n^3 \right)^2} \cos \omega t \equiv P_0 \cos \omega t.$$

Siła $P(t)$ może powodować utratę stateczności rozważanego układu prętów.

Przechodzimy obecnie do opisu ruchu prętów pionowych układu. Równanie ruchu pręta pionowego ma postać [3]:

$$(2.11) \quad E_2 I_2 \left(\frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} + \tau_2 \frac{\partial^5 w_2}{\partial x_2^4 \partial t} \right) + q_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + P(t) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} = 0,$$

a warunki brzegowe są następujące:

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad w_2(0, t) &= \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(0, t) = 0, \\
 w_2(l_2, t) &= \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(l_2, t) + \tau_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^2 \partial t}(l_2, t) = 0.
 \end{aligned}$$

Przybliżonego rozwiązania powyższego zagadnienia poszukujemy w postaci rozwinięcia na szereg funkcji własnych nietłumionych drgań swobodnych ($P(t) \equiv 0$):

$$(2.13) \quad w_2(x_2, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \varphi_i(x_2),$$

gdzie

$$(2.14) \quad \varphi_i(x_2) = \cos \kappa_i \left(\operatorname{sh} \frac{\kappa_i x_2}{l_2} - \sin \frac{\kappa_i x_2}{l_2} \right) - \sin \kappa_i \left(\operatorname{ch} \frac{\kappa_i x_2}{l_2} - \cos \frac{\kappa_i x_2}{l_2} \right),$$

$$(2.15) \quad \operatorname{tg} \kappa_i = \operatorname{th} \kappa_i.$$

Wstawiamy (2.13) do równania (2.11), mnożymy przez $\varphi_k(x_2)$, całkujemy względem x_2 w granicach od 0 do l_2 i otrzymujemy:

$$(2.16) \quad \sum_{i=1}^s \left[a_{ki} l_2^4 \frac{Q_2 A_2}{E_2 I_2} \ddot{q}_i + \tau_2 a_{ki} x_i^4 \dot{q}_i + a_{ki} \kappa_i^4 q_i + \frac{l_2^2}{E_2 I_2} b_{ki} P(t) q_i \right] = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, s,$$

gdzie

$$(2.17) \quad a_{ki} = \int_0^{l_2} \varphi_k(x_2) \varphi_i(x_2) dx_2, \quad b_{ki} = \int_0^{l_2} \varphi_k''(x_2) \varphi_i(x_2) dx_2,$$

natomiast przecinek oznacza różniczkowanie względem $\xi = x_2/l_2$. Jest to układ równań różniczkowych zwyczajnych na nieznanne funkcje $q_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, s$. Na podstawie powyższego układu równań wyznaczmy poszukiwane obszary niestateczności.

3. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA UKŁADU

Zakładamy, że utrata stateczności rozważanego układu prętów polega na dynamicznej niestateczności prętów pionowych wymuszanych siłami osiowymi $P(t)$, danymi wzorem (2.10). Pierwszy obszar niestateczności występuje w otoczeniu podwojonej najniższej częstości drgań własnych pręta pionowego, [4]. Zajmiemy się jedynie tym najważniejszym praktycznie obszarem niestateczności. Do dalszych obliczeń pozostawimy dwa pierwsze wyrazy sum (2.4) oraz (2.13), czyli przyjmiemy $r = 3$, $s = 2$; por. [5].

Częstości własne prętów pionowych obliczymy na podstawie układu równań (2.16), w którym przyjmiemy $\tau_2 = 0$ oraz $P(t) = 0$. Aby wyznaczyć granice pierwszego obszaru niestateczności poszukujemy rozwiązania układu równań (2.16) w postaci (por. [4]):

$$(3.1) \quad q_l(t) = B_l \sin \frac{\omega t}{2} + C_l \cos \frac{\omega t}{2}, \quad l = 1, 2,$$

gdzie B_l , C_l są stałymi. Po wstawieniu (3.1) do (2.16) otrzymujemy układ czterech liniowych, jednorodnych równań algebraicznych na stałe B_l , C_l . Niezerowe rozwiązanie tego układu równań istnieje, jeżeli wyznacznik główny równy jest zeru:

$$(3.2) \quad \left| \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_1^4 \right) + a_{11} + \frac{\beta P_0 b_{11}}{2}, \quad \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_2^4 \right) a_{12} + \frac{\beta P_0 b_{12}}{2}, \right|$$

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & \left[\begin{array}{l} \text{[ed.]} \\ \frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_1^4 a_{11}, \quad \frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_2^4 a_{12} \\ \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_1^4 \right) a_{21} + \frac{\beta P_0 b_{21}}{2}, \quad \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_2^4 \right) a_{22} + \frac{\beta P_0 b_{22}}{2}, \\ \frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_1^4 a_{21}, \quad \frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_2^4 a_{22} \\ -\frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_1^4 a_{11}, \quad -\frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_2^4 a_{12}, \\ \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_1^4 \right) a_{11} - \frac{\beta P_0 b_{11}}{2}, \quad \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_2^4 \right) a_{12} - \frac{\beta P_0 b_{12}}{2} \\ -\frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_1^4 a_{21}, \quad -\frac{\omega}{2} \tau_2 \kappa_2^4 a_{22}, \\ \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_1^4 \right) a_{21} - \frac{\beta P_0 b_{21}}{2}, \quad \left(-\frac{\alpha\omega^2}{4} + \kappa_2^4 \right) a_{22} - \frac{\beta P_0 b_{22}}{2} \end{array} \right] = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{q_2 A_2 l_2^4}{E_2 I_2}, \quad \beta = \frac{l_2^2}{E_2 I_2}.$$

Granice pierwszego obszaru niestateczności są wyznaczone na podstawie równania (3.2) poprzez zależność amplitudy q_0 siły wymuszającej od częstości ω . Jest to równanie czwartego stopnia ze względu na q_0 , a jego rozwiązania należy poszukiwać w otoczeniu podwojonej najniższej częstości własnej pręta pionowego.

4. PRZYKŁADY LICZBOWE

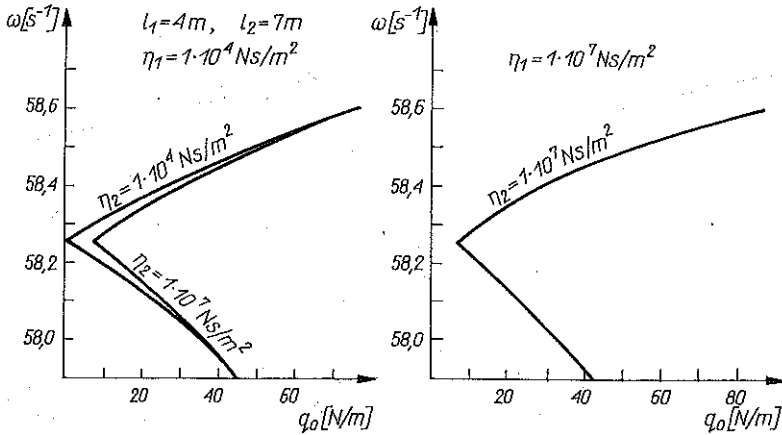
Do obliczeń przyjmujemy: $E_1 = E_2 = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$, $q_1 = q_2 = 7,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $I_1 = I_2 = 1,08 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, $A_1 = A_2 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Kołowe częstości własne pręta poziomego (ω_{k1}) oraz pionowego (ω_{k2}) obliczamy na podstawie wzorów (por. (2.5) oraz (2.16)):

$$(4.1) \quad \omega_{k1} = \lambda_{k+1}^2 \sqrt{\frac{E_1 I_1}{q_1 A_1}}, \quad \omega_{k2} = \frac{\kappa_{k+1}^2}{l_2^2} \sqrt{\frac{E_2 I_2}{q_2 A_2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Pierwsze dwa pierwiastki równania (2.15) wynoszą: $\kappa_1 = 3,9266$, $\kappa_2 = 7,0686$.

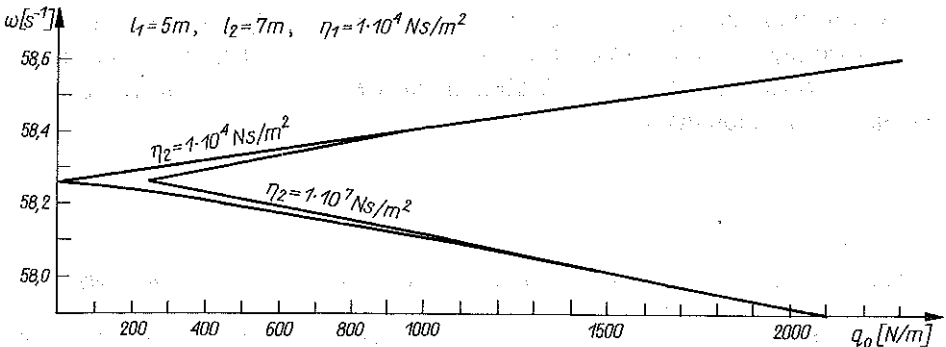
Ze względu na wartości najniższych częstości własnych: ω_{01} i ω_{02} rozpatrujemy trzy przypadki.

W pierwszym przypadku $l_1 = 4$ m, $l_2 = 7$ m, a więc zgodnie z (4.1): $\omega_{01} = 57,1$ s⁻¹, $\omega_{02} = 29,1$ s⁻¹. Układ jest zatem dość dobrze dostrojony na rezonans wewnętrzny. Obszary niestateczności układu są przedstawione na rys. 2, na którym podano wartości współczynników tłumienia wewnętrznego dla obu prętów. Wpływ tłumienia wewnętrznego na obszary niestateczności jest typowy.



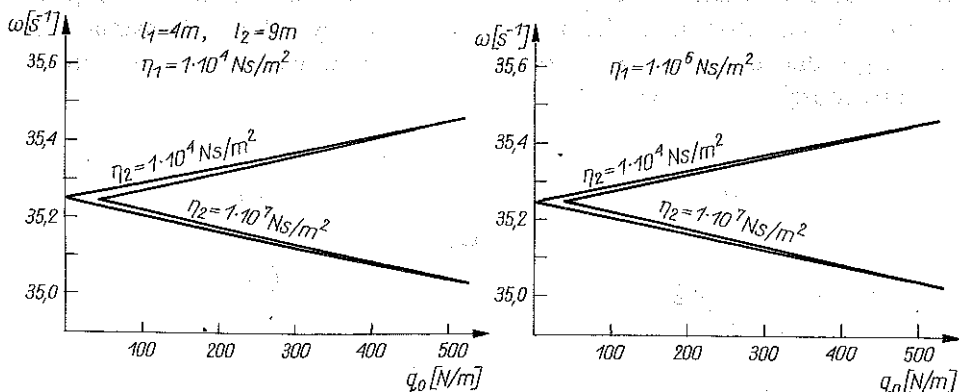
Rys. 2

W przypadku drugim układ jest rozstrojony poprzez przyjęcie: $l_1 = 5$ m, przy niezmiennionej długości l_2 . Obszary utraty stateczności przedstawia obecnie rys. 3. Obszary niestateczności są węższe niż w przypadku pierwszym — wartość q_0 , która powoduje utratę stateczności jest znacznie większa niż przy dostrojeniu układu na rezonans wewnętrzny. Tłumienie wewnętrzne również wpływa na obszary niestateczności.



Rys. 3

W trzecim przypadku układ jest także rozstrojony, ponieważ przyjmujemy: $l_1 = 4$ m, $l_2 = 9$ m. Uzyskane na podstawie (3.2) obszary niestateczności przedstawia rys. 4, na którym również podano wartości współczynników tłumienia wewnętrznego obu prętów.



Rys. 4

Przedstawione tutaj wyniki wskazują wyraźnie, że omawiany w pracy układ prętów jest najbardziej podatny na utratę stateczności wówczas, gdy jest dostrojony na rezonans wewnętrzny.

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy rozpatrywaliśmy utratę stateczności układu prętów na skutek działania harmonicznego obciążenia poziomego pręta układu. Przyjęliśmy uproszczony model układu — uwzględniliśmy jedynie wpływ drgań pręta poziomego na drgania prętów pionowych. Wyznaczyliśmy jedynie pierwszy, najważniejszy praktycznie, obszar niestateczności układu. Dostrojenie układu na rezonans wewnętrzny wyraźnie wpływa na wielkość siły wymuszającej (q_0), która powoduje utratę stateczności oraz na szerokość (częstość wymuszająca ω) obszaru niestateczności. Układ najłatwiej traci stateczność, gdy jest dostrojony na rezonans wewnętrzny.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. FORYŚ, *Vibrations and dynamical stability of some system of rods in nonlinear approach*, *Zagad. Drgań Nieliniowych*, **22**, 1984.
2. A. FORYŚ, J. NIZIOŁ, *Internal resonance in a plane system of rods*, *J. Sound Vibr.*, **95**, 3, 1984.
3. S. KALISKI i in., *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.

4. В. В. БОЛОТИН, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Изд. Теорет. Лит., Москва 1956.
5. A. FORYŚ, A. GAJEWSKI, *Parametryczna optymalizacja pręta lepko-sprężystego ze względu na stateczność dynamiczną*, Rozpr. Inżyn., 35, 2, 1987.

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji w dniu 5 października 1987 r.
