

ELEMENTY KOMPOZYTOWE O NAJMNIEJSZEJ ODKSZTAŁCALNOŚCI UZBROJONE DWIEMA RODZINAMI WŁÓKIEN

MARIA M A R K S (WARSZAWA)

W pracy rozpatrzono element kompozytowy utworzony z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych nachylonych pod kątami θ_1 i θ_2 do osi x_1 . Określono stan naprężenia i odkształcenia w elemencie poddanym obciążeniom normalnym i stycznym. Poszukiwane są optymalne kierunki włókien ze względu na minimum energii odkształcenia elementu.

1. WSTĘP

Kompozyty zbrojone włóknami są od szeregu lat przedmiotem badań doświadczalnych i rozważań teoretycznych. Kompozyty mogą być zbrojone włóknami ciągłymi tworzącymi jedną, dwie lub więcej rodzin lub też włóknami rozproszonymi. Właściwości mechaniczne kompozytu zależą nie tylko od rodzaju i ilości włókien, ale również od ich rozmieszczenia i ukierunkowania. Do wyznaczania stanu naprężenia i odkształcenia w kompozycie zbrojonym włóknami służą najczęściej teorie kontynuálne. Najczęściej kompozyt uzbrojony jedną rodziną włókien traktowany jest jako ośrodek poprzecznie izotropowych [4, 5 i 8]. W pracach [4 i 5] autorzy na podstawie stałych sprężystych matrycy i włókien, traktowanych jako materiały izotropowe, wyznaczają pięć stałych sprężystych charakteryzujących materiał poprzecznie izotropowy liniowo sprężysty. Na pewne stałe udało się autorom uzyskać ściśle wzory, określenie pozostałych możliwe było tylko przez uzyskanie ograniczenia górnego i dolnego.

Od szeregu lat prowadzone są prace dotyczące optymalizacji kompozytów uzbrojonych włóknami. Większość prac obejmuje zagadnienie kompozytów o wysokich wytrzymałościach, tzn. o matrycach metalicznych lub z tworzyw sztucznych uzbrojonych włóknami grafitowymi, szklanymi lub stalowymi.

W pracy [1] poszukiwany jest optymalny kierunek ułożenia rodziny włókien na podstawie kryterium maksymalnej wytrzymałości kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami grafitowymi. Wytrzymałość kompozytu traktowanego jako materiał poprzecznie izotropowy określona

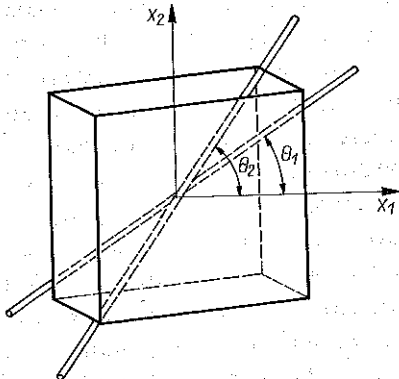
jest za pomocą hipotezy Hilla. W pracy [3] poszukiwane są optymalne kierunki włókien ze względu na ciężar konstrukcji. Zależność wytrzymałości kompozytów od kierunków włókien badali również KELLY i DAVIES [6].

W pracy [2] poszukiwany jest optymalny kierunek ułożenia włókien w materiałach kompozytowych utworzonych z kruchej matrycy i ciągliwych włókien. Funkcją celu jest energia zniszczenia akumulowana w elemencie rozciągającym. Energia ta jest zdefiniowana jako suma pracy niezbędnej do wytworzenia w elemencie rysy o szerokości v_0 . Kierunek usytuowania włókien jest optymalny, gdy funkcja celu osiąga maksimum.

Niniejsza praca dotyczy kompozytów utworzonych z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych. Określono stan naprężeń i odkształceń w elemencie kompozytowym przyjmując założenie, że zarówno matryca jak i cienkie włókna są materiałami liniowo sprężystymi i izotropowymi oraz że w kierunkach stycznych do rodzin występuje zgodność odkształceń między matrycą a włóknami [7]. Wyznaczono optymalny kierunek usytuowania dwóch rodzin włókien w elemencie kompozytowym poddanym obciążeniom normalnym i stycznym. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum energii odkształcenia elementu.

2. ODKSZTAŁCENIE TARCZOWEGO ELEMENTU KOMPOZYTOWEGO

Rozważmy element tarczowy składający się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien nachylonymi pod kątami θ_1 i θ_2 do osi x_1 (rys. 1). Element tarczowy znajduje się w płaskim stanie naprężenia, który możemy określić trzema składowymi uogólnionego płaskiego stanu naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}^{*(c)}$ $\alpha, \beta = 1, 2$ zdefiniowanymi następująco:



Rys. 1

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{*(c)} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}^{(c)} dx_3,$$

gdzie $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{*(c)}$ określa średnią wartość naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}^{(c)}$ wzdłuż grubości tarczy. Zakładając, że grubość wszystkich warstw matrycy wynosi h_m , sumaryczne grubości warstw włókien o wektorach kierunkowych \mathbf{a} i \mathbf{b} — h_a i h_b , oraz wykorzystując definicję uogólnionego płaskiego stanu naprężenia, otrzymujemy następujący związek pomiędzy średnim naprężeniem w całym kompozycie a średnim naprężeniem w matrycy i we włóknach:

$$(2.1) \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{*(c)} = \frac{h_m}{h} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{*(m)} + \frac{h_a}{h} \bar{\sigma}_a^{*(s)} a_\alpha a_\beta + \frac{h_b}{h} \bar{\sigma}_b^{*(s)} b_\alpha b_\beta,$$

gdzie $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{*(m)}$, $\bar{\sigma}_a^{*(s)}$, $\bar{\sigma}_b^{*(s)}$ określają odpowiednio średnie wartości składowych naprężenia w matrycy i we włóknach w kierunku wektorów \mathbf{a} i \mathbf{b} , stycznych odpowiednio do pierwszej i drugiej rodziny.

Przyjmując, że matryca i cienkie włókna są z materiałów sprężystych izotropowych i jednorodnych równania konstytutywne określimy następującymi wzorami¹⁾

$$(2.2) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{E^{(m)}}{1+\nu} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{\nu E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\delta\delta}^{(m)},$$

$$\sigma_a^{(s)} = E^{(s)} \varepsilon_a^{(s)}, \quad \sigma_b^{(s)} = E^{(s)} \varepsilon_b^{(s)},$$

gdzie $E^{(m)}$ oznacza moduł Younga matrycy, $E^{(s)}$ moduł Younga włókien i ν stałą Poissona matrycy. Zakładamy, że między matrycą a włóknami zachodzi zgodność odkształceń, tzn.

$$\varepsilon_a^{(s)} = \varepsilon_a^{(m)}, \quad \varepsilon_b^{(s)} = \varepsilon_b^{(m)}.$$

Wykorzystując wzory

$$\varepsilon_a^{(m)} = \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} a_\gamma a_\delta,$$

$$\varepsilon_b^{(m)} = \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} b_\gamma b_\delta,$$

i związku konstytutywne (2.2), równanie (2.1) określające składowe naprężenia w kompozycie przekształcamy do następującej postaci:

¹⁾ Występujące tu składowe naprężenia i odkształcenia są średnimi wielkościami w sensie uogólnionego płaskiego stanu naprężenia i powinny być oznaczane gwiazdką, którą dla uproszczenia pomijamy.

$$(2.3) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(c)} = \frac{E^{(m)}}{1+\nu} \left(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\delta\delta}^{(m)} \right) \frac{h_m}{h} + E \frac{h_a}{h} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} a_\gamma a_\delta a_\alpha a_\beta + \\ + E \frac{h_b}{h} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} b_\gamma b_\delta b_\alpha b_\beta.$$

Z równania (2.3) można wyznaczyć składowe odkształcenia:

$$\varepsilon_{11}^{(m)} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sigma_{11}^{(c)} & a_{12} & a_{13} \\ \sigma_{22}^{(c)} & a_{22} & a_{23} \\ \sigma_{12}^{(c)} & \frac{1}{2} a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon_{22}^{(m)} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & \sigma_{11}^{(c)} & a_{13} \\ a_{12} & \sigma_{22}^{(c)} & a_{23} \\ \frac{1}{2} a_{13} & \sigma_{12}^{(c)} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon_{12}^{(m)} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \sigma_{11}^{(c)} \\ a_{12} & a_{22} & \sigma_{22}^{(c)} \\ \frac{1}{2} a_{13} & \frac{1}{2} a_{23} & \sigma_{12}^{(c)} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{1}{2} a_{13} & \frac{1}{2} a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$a_{11} = \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E \left(\frac{h_a}{h} \cos^4 \theta_1 + \frac{h_b}{h} \cos^4 \theta_2 \right),$$

$$a_{12} = \frac{\nu E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E \left(\frac{h_a}{h} \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + \frac{h_b}{h} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 \right),$$

$$a_{13} = E \left(\frac{h_a}{h} \sin 2\theta_1 \cos^2 \theta_1 + \frac{h_b}{h} \sin 2\theta_2 \cos^2 \theta_2 \right),$$

$$a_{22} = \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E \left(\frac{h_a}{h} \sin^4 \theta_1 + \frac{h_b}{h} \sin^4 \theta_2 \right),$$

$$a_{23} = E \left(\frac{h_a}{h} \sin 2\theta_1 \sin^2 \theta_1 + \frac{h_b}{h} \sin 2\theta_2 \sin^2 \theta_2 \right),$$

$$a_{33} = \frac{E^{(m)}}{1+\nu} \frac{h_m}{h} + \frac{1}{2} E^{(s)} \left(\frac{h_a}{h} \sin^2 2\theta_1 + \frac{h_b}{h} \sin^2 2\theta_2 \right),$$

$$D = \frac{(E^{(m)})^3}{(1+\nu)^2 (1-\nu)} \left(\frac{h_m}{h} \right)^3 + \frac{(E^{(m)})^2 E^{(s)}}{(1+\nu)^2 (1-\nu)} \left(\frac{h_a}{h} + \frac{h_b}{h} \right) \left(\frac{h_m}{h} \right)^2 +$$

$$+ \frac{E^{(m)} E^{(s)2}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \frac{h_a h_b}{h^2} \left\{ [\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2] [\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} [\cos 2(\theta_1 + \theta_2) - \cos 2(\theta_2 - \theta_1)] \cos^2(\theta_2 - \theta_1) - \nu \sin^4(\theta_2 - \theta_1) \right\}.$$

Rozpatrzmy element tarczowy składający się z matrycy i z dwóch rodzin włókien poddany obciążeniom rozciągającym p w kierunku osi x_2 i q w kierunku osi x_1 oraz obciążeniom stycznym τ . Wtedy

$$\sigma_{22}^{(c)} = p, \quad \sigma_{11}^{(c)} = q, \quad \sigma_{12}^{(c)} = \tau,$$

a składowe odkształcenia określone są następującymi wzorami

$$\varepsilon_{11}^{(m)} = \frac{1}{D} \left\{ q \left[a_{22} a_{33} - \frac{1}{2} (a_{23})^2 \right] - p \left[a_{12} a_{33} - \frac{1}{2} a_{13} a_{23} \right] + \right.$$

$$\left. + \tau [a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}] \right\},$$

$$\varepsilon_{22}^{(m)} = \frac{1}{D} \left\{ -q \left[a_{12} a_{33} - \frac{1}{2} a_{13} a_{23} \right] + p \left[a_{11} a_{33} - \frac{1}{2} (a_{13})^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \tau [a_{11} a_{23} - a_{13} a_{12}] \right\},$$

$$\varepsilon_{12}^{(m)} = \frac{1}{D} \left\{ q \left[\frac{1}{2} a_{12} a_{23} - \frac{1}{2} a_{13} a_{22} \right] - p \left[\frac{1}{2} a_{11} a_{23} - \frac{1}{2} a_{12} a_{13} \right] + \right.$$

$$\left. + \tau [a_{11} a_{22} - (a_{12})^2] \right\}.$$

Przyjmując jednakowe rozmieszczenie włókien w obu kierunkach, czyli przyjmując $h_a = h_b$, znajdziemy $\frac{h_a}{h} = \frac{h_b}{h} = \frac{1}{2} \frac{h-h_m}{h}$. Oznaczając kąt pomiędzy rodzinami włókien przez α , co daje $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$, oraz wprowadzając oznaczenia $\gamma = E^{(m)} (h_m/h)$, $\beta = E^{(s)} (h-h_m/h)$, otrzymujemy następujące wzory na składowe odkształcenia:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(m)} = & \frac{1}{D} \left\{ q \left[\frac{\gamma^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + \frac{\gamma\beta}{4(1+\nu)(1-\nu)} (1 - \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma\beta}{2(1+\nu)} \left(\frac{3}{4} - \cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8} \beta^2 (\cos \alpha - \cos(2\theta_1 + \alpha))^2 \sin^2 \alpha \right] + p \left[- \frac{\nu\gamma^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} - \frac{\gamma\beta}{8(1-\nu)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (1 - \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) + \frac{\beta^2}{16} (\cos 2\alpha - \cos 2(2\theta_1 + \alpha)) \sin^2 \alpha \right] + \right. \\ & \left. + \tau \left[- \frac{\gamma\beta}{2(1+\nu)} \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - \frac{\gamma\beta}{4(1-\nu)} \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\beta^2}{4} (\cos \alpha - \cos(2\theta_1 + \alpha)) \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.4) \quad \varepsilon_{22}^{(m)} = & \frac{1}{D} \left\{ q \left[- \frac{\nu\gamma^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} - \frac{\gamma\beta}{8(1-\nu)} (1 - \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta^2}{16} (\cos 2\alpha - \cos 2(2\theta_1 + \alpha)) \sin^2 \alpha \right] + p \left[\frac{\gamma^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma\beta}{4(1+\nu)(1-\nu)} (1 - \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma\beta}{8(1+\nu)} (\cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha + 4 \cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha + 3) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta^2}{8} (\cos(2\theta_1 + \alpha) + \cos \alpha)^2 \sin^2 \alpha \right] + \tau \left[- \frac{\gamma\beta}{2(1+\nu)} \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma\beta}{4(1-\nu)} \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\beta^2}{4} (\cos(2\theta_1 + \alpha) + \cos \alpha) \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^{(m)} = & \frac{1}{D} \left\{ q \left[- \frac{\gamma\beta}{4(1+\nu)} \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - \frac{\gamma\beta}{8(1-\nu)} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \frac{\beta^2}{8} (\cos \alpha - \cos(2\theta_1 + \alpha)) \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ p \left[-\frac{\gamma\beta}{4(1+\nu)} \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha + \frac{\gamma\beta}{8(1-\nu)} \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \right. \\
 &\quad \left. -\frac{\beta^2}{8} (\cos(2\theta_1 + \alpha) + \cos \alpha) \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right] + \\
 &\quad + \tau \left[\frac{\gamma^2}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{\gamma\beta}{(1+\nu)(1-\nu)} - \frac{\gamma\beta}{4(1-\nu)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) + \frac{\beta^2}{4} \sin^2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right] \Big\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$D = \frac{\gamma}{(1+\nu)(1-\nu)} \left[\frac{\gamma^2}{1+\nu} + \frac{\gamma\beta}{1+\nu} + \frac{\beta^2}{4} (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) \right].$$

3. OPTIMALIZACJA KIERUNKU USYTUOWANIA DWÓCH RODZIN WŁÓKIEN

3.1. Sformułowanie zadania

Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum energii odkształcenia elementu kompozytowego. Energię tę można wyrazić w sposób następujący:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \int \int \sigma_{ij}^{(c)} \varepsilon_{ij}^{(c)} dV = h \int_\Omega \int \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{(c)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} d\Omega.$$

Zmiennymi decyzyjnymi są: kąt pochylenia jednej rodziny włókien do osi $x_1 - \theta_1$ oraz kąt pomiędzy dwiema rodzinami włókien α .

Ponieważ funkcjonal U nie zależy od pochodnych θ_1 i α , przeto warunki konieczne jego minimum mają postać

$$(3.1) \quad \frac{\partial W}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0,$$

gdzie

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{(c)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)}.$$

Warunki dostateczne minimum są w tym przypadku następujące:

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_1 \partial \alpha} < \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} \right)^{1/2} > 0.$$

Funkcja W po podstawieniu składowych odkształcenia (2.4) przyjmuje następującą postać

$$W = \frac{1}{2D} \left\{ K_1 - ((p-q)^2 - 2\tau^2) \left(\frac{\gamma\beta}{8(1-\nu)} \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\beta^2}{8} \cos^2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha - 3\tau(p-q) \left[\left(\frac{\gamma\beta}{4(1-\nu)} + \frac{\beta^2}{16} \right) \sin^2 \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\gamma\beta}{8(1-\nu)} \right] \sin 2(2\theta_1 + \alpha) + (p^2 - q^2) \left[\frac{\gamma\beta}{2(1+\nu)} + \frac{\beta^2}{4} \sin^2 \alpha \right] \times \right. \\ \left. \times \cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - 3\tau(p+q) \left[\frac{\gamma\beta}{4(1+\nu)} + \frac{\beta^2}{8} \sin^2 \alpha \right] \times \right. \\ \left. \times \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha + (p+q)^2 \frac{\beta^2}{8} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \tau^2 \frac{\beta^2}{4} \sin^2 \alpha \right\},$$

gdzie

$$K_1 = (q^2 - 2\nu pq + p^2 + (1+\nu)\tau^2) \frac{\gamma^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + (q^2 - (1+\nu)pq + \\ + p^2 + 4\tau^2 - (1+\nu)\tau^2) \frac{\gamma\beta}{4(1+\nu)(1-\nu)} + (p^2 + q^2) \frac{3\gamma\beta}{8(1+\nu)}.$$

Zatem warunek (3.1)₁ ma postać

$$(3.3) \quad \frac{\partial W}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2D} \left\{ [(p-q)^2 - 2\tau^2] \left(\frac{\gamma\beta}{2(1-\nu)} \cos 2\alpha - \frac{\beta^2}{4} \sin^2 \alpha \right) \times \right. \\ \left. \times \sin 2(2\theta_1 + \alpha) - 3\tau(p-q) \left[\left(\frac{\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{4} \right) \sin^2 \alpha - \frac{\gamma\beta}{2(1-\nu)} \right] \times \right. \\ \left. \times \cos 2(2\theta_1 + \alpha) - (p^2 - q^2) \left[\frac{\gamma\beta}{1+\nu} + \frac{\beta^2}{2} \sin^2 \alpha \right] \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - \right. \\ \left. - 3\tau(p+q) \left[\frac{\gamma\beta}{2(1+\nu)} + \frac{\beta^2}{4} \sin^2 \alpha \right] \cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha \right\} = 0.$$

Natomiast warunek (3.1)₂ przyjmuje postać

$$(3.4) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{1}{2D^2} \left\{ [(p-q)^2 - 2\tau^2] \left[L_1 (\cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) - L_2 \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{L_2}{1+\nu} (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - (L_3 + L_4) \times \right. \right.$$

(3.4)
[cd]

$$\begin{aligned}
& \times (\sin 2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha - \cos^2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha) - \frac{L_5}{1+\nu} (1 - \cos^4 \alpha - \\
& - \nu \sin^4 \alpha) \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha + L_5 \cos^2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^4 \alpha \Big] - \\
& - \frac{\gamma \beta^2}{2(1+\nu)(1-\nu)} K_1 (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha + 3\tau(p-q) \times \\
& \times \Big[-L_1 (\sin 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha - \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) - \\
& - (L_3 + L_4) \left(\cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \right) + \\
& + L_2 \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \frac{L_2}{1+\nu} (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \times \\
& \times \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \frac{2L_5}{1+\nu} \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin^4 \alpha - \\
& - L_5 (\sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin \alpha) \sin^5 \alpha \Big] + \\
& + (p^2 - q^2) \Big[-2(L_3 + 2L_4) \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha - \\
& - 2(L_3 - 2\nu L_4) \cos(2\theta_1 + \alpha) \sin^3 \alpha - L_6 (\sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha + \\
& + \cos(2\theta_1 + \alpha) \sin \alpha) + (1+\nu) \left(L_4 - \frac{4}{(1+\nu)^2} L_5 \right) \sin(2\theta_1 + \alpha) \times \\
& \times \sin^4 \alpha \cos \alpha + 2L_3 \cos(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \cos \alpha - \\
& - (1+\nu) \left(3L_4 - \frac{4\nu L_5}{(1+\nu)^2} \right) \cos(2\theta_1 + \alpha) \sin^5 \alpha + \\
& + 2L_5 \sin^6 \alpha (\sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - \cos(2\theta_1 + \alpha) \sin \alpha) \Big] + \\
& + 3\tau(p+q) \Big[- \left(L_3 + L_4 + \frac{L_5}{1+\nu} \right) \cos(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\
& + \frac{L_5}{1+\nu} (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \cos(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \cos \alpha - \\
& - \frac{1}{2} L_6 (\cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin \alpha) -
\end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2} L_4 \cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) - \\ & - L_3 \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \cos \alpha - L_5 \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^4 \alpha \cos \alpha - \\ & - \frac{(1+\nu)L_4}{2} \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin^3 \alpha (1 + 3\cos^2 \alpha) + \\ & + L_4 \sin(2\theta_1 + \alpha) \sin^3 \alpha \left. \right\} + (p+q)^2 \left[(L_3 + L_4) \cos 2\alpha - \right. \\ & \left. - \frac{1-\nu}{1+\nu} L_5 \sin^4 \alpha \right] \sin 2\alpha + 2\tau^2 (L_3 + L_4 + L_5 \sin^4 \alpha) \sin 2\alpha \left. \right\} = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\gamma^4 \beta}{4(1+\nu)^2(1-\nu)^2} + \frac{\gamma^3 \beta^2}{4(1+\nu)^2(1-\nu)^2} + \frac{\gamma^2 \beta^3}{16(1+\nu)(1-\nu)^2}, \\ L_2 &= \frac{\gamma^2 \beta^3}{16(1-\nu)^2}, \quad L_3 = \frac{\gamma^3 \beta^2}{8(1+\nu)^2(1-\nu)}, \quad L_4 = \frac{2(1-\nu)}{(1+\nu)^2} L_2, \\ L_5 &= \frac{\gamma \beta^4}{32(1-\nu)}, \quad L_6 = \frac{\gamma^4 \beta}{2(1+\nu)^3(1-\nu)} + \frac{\gamma^3 \beta^2}{2(1+\nu)^3(1-\nu)}. \end{aligned}$$

Równania (3.3) i (3.4) określają warunki konieczne minimum energii odkształcenia przy dowolnych obciążeniach normalnych i stycznych.

3.2. Badanie zależności energii odkształcenia od usytuowania włókien

Warunki konieczne minimum energii odkształcenia (3.3) i (3.4) są równaniami silnie nieliniowymi i mogą mieć wiele rozwiązań, dlatego znaleziono przybliżone minimum funkcji W metodą przeszukiwania, obliczając jej wartość przy $\theta_1 = 0,10^\circ, \dots, 90^\circ$ i przy kątach $\alpha = 0,10^\circ, \dots, 90^\circ$. Obliczono wartości funkcji przy różnych stosunkach q/p i τ/p przyjmując dane odpowiadające kompozytom o matrycy betonowej uzbrojonej włóknami stalowymi o zawartości objętościowej wynoszącej 2%, czyli przy $E = 30000 \text{ MPa}$, $\nu = 1/6$, $E^{(s)} = 210000 \text{ MPa}$, $h_m/h = 0,98$.

Wyznaczono wartości funkcji W_1 , która jest związana z funkcją W w następujący sposób:

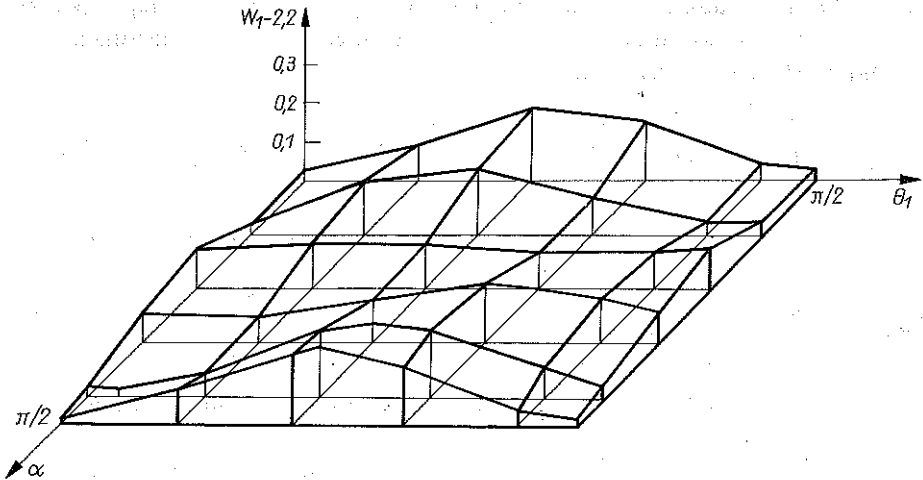
$$W = \frac{(1+\nu)(1-\nu)p^2}{2\gamma} W_1,$$

przy $\tau/p = 0$ i $q/p = 0, 0,5; 1, -0,5; -1$ oraz $\tau/p = 0,5$ i $q/p = 0, 0,5, 1, -0,5, -1$.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że w rozpatrywanych przypadkach energia odkształcenia osiąga minimum przy kątach θ_1 i α , zestawionych w tablicy 1.

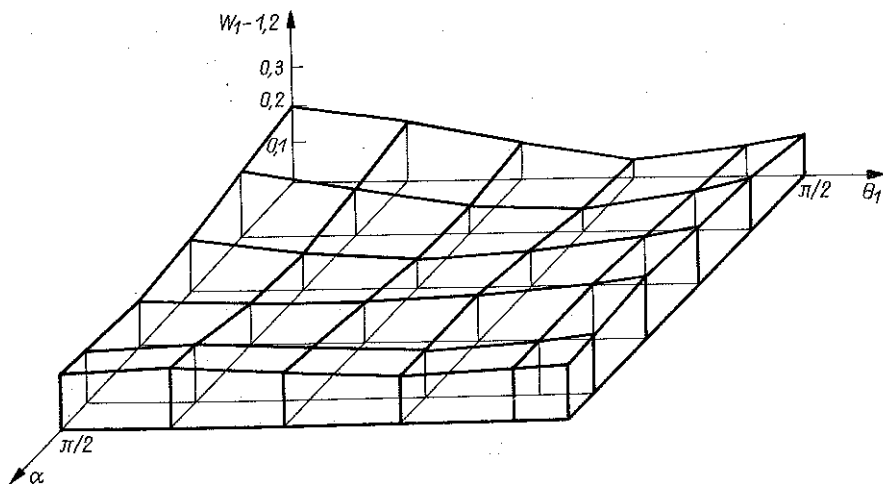
Tablica 1

$k = \frac{q}{p}$	$l = \frac{\tau}{p}$	θ_1	α
0	0	90	0
0.5	0	90	0
1	0	$\hat{\theta}_1$	90
-0.5	0	90	0
-1	0	0	90
0	0.5	72	0
0.5	0.5	62	0
1	0.5	45	0
-0.5	0.5	77	0
-1	0.5	80	90



Rys. 2

Z obliczeń tych wynika, że optymalny kąt pomiędzy obiema rodzinami włókien jest równy 0 albo 90° , czyli wtedy, gdy występuje jedna rodzina włókien lub dwie rodziny ortogonalne. Jako ilustrację zmienności energii odkształcenia przedstawiono na rys. 2 i 3 wykresy funkcji $W_1 - \text{const}$ przy $q/p = -1$ i $\tau/p = 0$ oraz przy $q/p = 0,5$ i $\tau/p = 0,5$.



Rys. 3

3.3. Szczególne przypadki obciążenia elementu kompozytowego.

Rozważmy pewne szczególne przypadki obciążenia elementu kompozytowego. W przypadku gdy na element kompozytowy działają obciążenia normalne: p w kierunku x_2 i $q = kp$ w kierunku x_1 natomiast $\tau = 0$, równania (3.3), (3.4) przyjmują postać

$$(3.5) \quad \frac{\partial W}{\partial \theta_1} = \frac{(1-k)}{2D} p^2 \left\{ (1-k) \left[\frac{\gamma\beta}{2(1-\nu)} \cos 2\alpha - \frac{\beta^2}{4} \sin^2 \alpha \right] \sin 2(2\theta_1 + \alpha) - (1+k) \left[\frac{\gamma\beta}{1+\nu} + \frac{\beta^2}{2} \sin^2 \alpha \right] \sin (2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha \right\} = 0,$$

$$(3.6) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{p^2}{2D^2} \left\{ (1-k)^2 \left[L_1 (\cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) - L_2 \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{L_2}{1+\nu} (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - (L_3 + L_4) (\sin 2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha - \cos^2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{L_5}{1+\nu} (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + L_5 \cos^2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^4 \alpha \right] - K_2 (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \sin 2\alpha + \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-k^2) \left[-2(L_3+2L_4) \sin(2\theta_1+\alpha) \cos \alpha \sin^2 \alpha - \right. \\
& - 2(L_3-2\nu L_4) \cos(2\theta_1+\alpha) \sin^3 \alpha - L_6 (\sin(2\theta_1+\alpha) \cos \alpha + \\
& + \cos(2\theta_1+\alpha) \sin \alpha) + (1+\nu) \left(L_4 - \frac{4L_5}{(1+\nu)^2} \right) \sin(2\theta_1+\alpha) \sin^4 \alpha \cos \alpha + \\
& + 2L_3 \cos(2\theta_1+\alpha) \sin 2\alpha \cos \alpha - (1+\nu) \left(3L_4 - \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} L_5 \right) \cos(2\theta_1+\alpha) \cdot \\
& \cdot \sin^5 \alpha + 2L_5 \sin^6 \alpha (\sin(2\theta_1+\alpha) \cos \alpha - \cos(2\theta_1+\alpha) \sin \alpha) \left. \right] + \\
& + (1+k)^2 \left[(L_3+L_4) \cos 2\alpha - \frac{1-\nu}{1+\nu} L_5 \sin^4 \alpha \right] \sin 2\alpha \Big\} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
K_2 = \frac{\gamma^2 \beta^2}{2(1+\nu)^2(1-\nu)} \left[(k^2 - 2k\nu + 1) \frac{\gamma}{(1+\nu)(1-\nu)} + \right. \\
\left. + (k^2 - (1+\nu)k + 1) \frac{\beta}{4(1-\nu)} + (k^2 + 1) \frac{3\beta}{8} \right].
\end{aligned}$$

Równania te są spełnione, jeżeli

$$\sin(2\theta_1+\alpha) = 0, \quad \cos(2\theta_1+\alpha) = 0,$$

lub

$$\sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = 0,$$

a więc gdy $\alpha = 0$ i $\theta_1 = 90^\circ$ lub $\alpha = 90^\circ$ i $\theta_1 = 0$.

Równania te są również spełnione, gdy

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad & \sin(2\theta_1+\alpha) = 0, \\
& (1-k)^2 [2L_1 \cos \alpha - L_2 \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \alpha + L_5 \sin 2\alpha \sin^3 \alpha + \\
& + 2(L_3+L_4) \cos \alpha] - 2K_2 (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \cos \alpha + (1-k^2) \times \\
& \times [2(L_3-2\nu L_4) \sin^2 \alpha - 4L_3 \cos^2 \alpha + (1+\nu) \times \\
& \times \left(3L_4 - \frac{4\nu}{(1+\nu)^2} L_5 \right) \sin^4 \alpha + 2L_5 \sin^6 \alpha + L_6] + \\
& + (1+k)^2 \left[-\frac{1-\nu}{1+\nu} L_5 \sin 2\alpha \sin^3 \alpha + 2(L_3+L_4) \cos 2\alpha \cos \alpha \right] = 0.
\end{aligned}$$

Są one również spełnione przez rozwiązania równania (3.6) po dokonaniu następującego podstawienia

$$\cos(2\theta_1 + \alpha) = \frac{(1+k) \left[\frac{\beta^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\gamma\beta}{1+\nu} \right] \cos \alpha}{(1-k) \left[\frac{\gamma\beta}{1-\nu} - \left(\frac{2\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{2} \right) \sin^2 \alpha \right]}$$

Podstawienie to pozwala równanie (3.6) sprowadzić do równania z jedną niewiadomą α . Równanie jest równaniem 12-ego stopnia i można rozwiązać je numerycznie. Podobnie równanie (3.7)₂ można względem zmiennej $t = \cos \alpha$ przedstawić jako równanie 6-ego stopnia i rozwiązać numerycznie. W przypadku kompozytów betonopodobnych rozwiązaniami równań (3.5) i (3.6) są kąty $\alpha = 0^\circ$ i $\theta_1 = 90^\circ$ lub $\alpha = 90^\circ$ i $\theta_1 = 0^\circ$.

W przypadku gdy $p = q$ ($k = 1$) i $\tau = 0$ warunek konieczny minimum energii odkształcenia (3.5) spełniony jest tożsamościowo, natomiast równanie (3.6) przybiera postać

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 4p^2 \left\{ - \left(\frac{2}{1+\nu} L_3 + L_4 \right) (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) + (L_3 + L_4) \cos 2\alpha - \frac{1-\nu}{1+\nu} L_5 \sin^4 \alpha \right\} \sin 2\alpha = 0.$$

Równanie to jest spełnione gdy spełnione są równania $\sin 2\alpha = 0$ (czyli gdy $\alpha = 90^\circ$) lub równanie

$$\left(\frac{2}{1+\nu} L_3 + L_4 \right) ((1+\nu) \cos^2 \alpha - \nu) - (L_3 + L_4) (2 \cos^2 \alpha - 1) + \frac{1-\nu}{1+\nu} L_5 (1 - \cos^2 \alpha)^2 = 0.$$

Jest to równanie dwukwadratowe ze względu na zmienną $t = \cos \alpha$ a jego rozwiązanie wynosi

$$t = \pm \sqrt{1 + \frac{2}{1+\nu} \frac{\gamma}{\beta}}$$

Wyrażenie podpierwiastkowe jest większe od 1, zatem jedynym rozwiązaniem spełniającym warunek konieczny minimum energii odkształcenia jest $\alpha = 90^\circ$. Warunek dostateczny minimum energii odkształcenia (3.2) ma postać nierówności:

$$\frac{p^2}{1+\nu} \left[\frac{\gamma^3 \beta^2}{(1+\nu)^2} + \frac{\gamma^2 \beta^3}{1+\nu} + \frac{\gamma \beta^4}{4} \right] > 0;$$

jest on również spełniony.

W przypadku gdy na element kompozytowy działają tylko obciążenia normalne równe co do wielkości, to energia odkształcenia osiąga minimum przy dwóch rodzinach włókien ortogonalnych nachylonych pod dowolnym kątem θ_1 .

Rozpatrzmy jeszcze następujący przypadek obciążenia elementu kompozytowego: $p = q = 0$, τ — dowolne. Wtedy warunki konieczne minimum energii odkształcenia (3.3), (3.4) mają postać następującą:

$$(3.8) \quad \frac{\partial W}{\partial \theta_1} = \frac{\tau^2}{2D} \left\{ \left(\frac{2\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{2} \right) \sin^2 \alpha - \frac{\gamma\beta}{1-\nu} \right\} \sin 2(2\theta_1 + \alpha) = 0,$$

$$(3.9) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\frac{\tau^2}{2D} \left\{ \left[2L_1 (\cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha + \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2L_2 \cos 2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1+\nu}{1-\nu} L_4 \sin 2(2\theta_1 + \alpha) \cos 2\alpha (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(L_3 + L_4) (\sin 2(2\theta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha - \cos^2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{1+\nu} L_5 \sin 2(2\theta_1 + \alpha) (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha - 1) \sin^2 \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + 2L_5 \cos^2(2\theta_1 + \alpha) \sin 2\alpha \sin^4 \alpha \right] - 2L_5 \sin 2\alpha \sin^4 \alpha + \right. \\ \left. + \frac{1}{1-\nu} [4L_3 + (3-\nu)L_4] \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) - \right. \\ \left. - 2(L_3 + L_4) \sin 2\alpha \right\} = 0.$$

Równanie (3.8) jest spełnione gdy $\sin 2(2\theta_1 + \alpha) = 0$, czyli gdy $2(2\theta_1 + \alpha) = 180^\circ$ lub $2(2\theta_1 + \alpha) = 360^\circ$, lub gdy

$$(3.10) \quad \sin^2 \alpha = \frac{\frac{\gamma\beta}{1-\nu}}{\frac{2\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{2}}.$$

Podstawiając do równania (3.9) $2(2\theta_1 + \alpha) = 180^\circ$ otrzymujemy następujące równanie

$$\frac{\tau^2}{2(1-\nu)} \left\{ \left[\frac{\gamma^2 \beta^3}{4(1-\nu)} + \frac{\gamma\beta^4}{8} \right] \sin^4 \alpha + \left[\frac{\gamma^3 \beta^2}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{\gamma^2 \beta^3}{2(1+\nu)} \right] \times \right.$$

$$\times \sin^2 \alpha + \frac{\gamma^4 \beta}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + \frac{\gamma^3 \beta^2}{2(1+\nu)^2} \left. \right\} \sin 2\alpha = 0,$$

które spełnione jest wtedy, gdy wyrażenie w nawiasie klamrowym jest równe zeru lub gdy $\sin 2\alpha = 0$. Równanie dwukwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych, gdyż jego delta jest równa zeru, a rozwiązanie $t = \sin^2 \alpha$ przyjmuje wartość ujemną. Podobnie w przypadku $2(2\theta_1 + \alpha) = 360^\circ$ równanie dwukwadratowe sprowadza się do równania

$$\frac{\gamma^2 \beta^3}{8} \sin^4 \alpha - \frac{\gamma^2 \beta^2}{2(1+\nu)} [\gamma + \beta] \sin^2 \alpha + \frac{\gamma^2 \beta}{(1+\nu)^2} \left[\frac{\gamma^2}{2} + \gamma\beta + \frac{\beta^2}{3} \right] = 0,$$

i również posiada deltę zerową, a pierwiastek $z = \sin^2 \alpha$ określony wzorem

$$z = \frac{2}{1+\nu} \left(\frac{\gamma}{\beta} + 1 \right).$$

jest większy od jedynki. Zatem równanie również nie posiada pierwiastków. Z powyższych rozważań wynika, że równania (3.8) i (3.9) będą spełnione gdy

$$\sin 2(2\theta_1 + \alpha) = 0 \quad \text{i} \quad \sin 2\alpha = 0.$$

Rozpatrzmy rozwiązanie równania (3.8) postać (3.10). Po podstawieniu tej wielkości do równania (3.9) otrzymujemy następujące wyrażenie

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau^2 \{ & M_1 \cos 2(2\theta_1 + \alpha) + M_2 \sin 2(2\theta_1 + \alpha) + M_3 \cos 2(2\theta_1 + \alpha) + \\ & + M_4 \sin 2(2\theta_1 + \alpha) + M_5 \sin 2(2\theta_1 + \alpha) + M_6 \cos^2(2\theta_1 + \alpha) + \\ & + M_7 \sin 2(2\theta_1 + \alpha) + M_8 \cos^2(2\theta_1 + \alpha) + M_9 \} = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$M_1 = -4L_1 \frac{P_2}{P_1}, \quad M_2 = -L_1 \frac{\beta^2}{P_1}, \quad M_3 = 4L_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^3,$$

$$M_4 = \frac{L_2}{(1+\nu)(P_1)^3} \beta^2 \left[\left(\frac{\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{2} \right)^2 + \nu \frac{\gamma^2 \beta^2}{(1-\nu)^2} \right],$$

$$M_5 = 2(L_3 + L_4) \frac{\gamma\beta}{(1-\nu)P_1}, \quad M_6 = -4(L_3 + L_4) \frac{P_2}{P_1},$$

$$M_7 = \frac{\gamma^2 \beta^5}{16(1+\nu)(1-\nu)^3(P_1)^3} \left[\frac{3-\nu}{1-\nu} \gamma^2 \beta^2 + \gamma\beta^3 \right],$$

$$M_8 = -\frac{\gamma^3 \beta^6}{8(1-\nu)^3} \frac{P_2}{(P_1)^3},$$

$$M_9 = \left[\frac{\gamma^3 \beta^6}{8(1-\nu)^3(P_1)^3} + \frac{2(2\gamma\beta + \beta^2)}{(P_1)^2} \left(-\frac{2(L_3 + L_4)}{1-\nu} + \frac{L_2}{1+\nu} \right) + \frac{4(L_3 + L_4)}{P_1} \right] P_2,$$

oraz

$$P_1 = \frac{2\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{2},$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{\gamma\beta}{1-\nu} \left(\frac{\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{2} \right)},$$

którego rozwiązanie ma następującą postać:

$$(3.11) \quad \cos^2(2\theta_1 + \alpha) = 1 - \left[\frac{4\gamma^4}{(1-\nu)^2} + \frac{6(3-\nu)\gamma^3\beta}{(1-\nu)^2} + \frac{(11-12\nu+2(\nu)^2)\gamma^2\beta^2}{(1-\nu)^2} + \frac{(21-14\nu+\nu^2)\gamma\beta^3}{8(1-\nu)} + \frac{\beta^4}{4} \right] //$$

$$\left[\frac{8\gamma^4}{(1-\nu)^2} + \frac{8(3-\nu)\gamma^3\beta}{(1-\nu)^2} + \frac{2(7-7\nu+\nu^2)\gamma^2\beta^2}{(1-\nu)^2} + \frac{(25-14\nu+\nu^2)\gamma\beta^3}{8(1-\nu)} + \frac{\beta^4}{4} \right].$$

Rozwiązania (3.10) i (3.11) nie spełniają jednakże warunku dostatecznego dla minimum funkcji. Warunek dostateczny minimum spełniony jest natomiast przez rozwiązania $\sin(2\theta_1 + \alpha) = 0$ i $\sin 2\alpha = 0$, a zatem przy $\theta_1 = 45^\circ$ i $\alpha = 0$ oraz przy $\theta_1 = 45^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$. Energia odkształcenia osiąga w tych punktach jednakowe wartości. Energia odkształcenia osiąga zatem minimum w przypadku jednej rodziny włókien nachylonej do osi x_1 pod kątem 45° oraz w przypadku dwóch rodzin ortogonalnych nachylonych również pod tym samym kątem.

3.4. Optymalne usytuowanie włókien przy ustalonym kącie pomiędzy rodzinami

Na element kompozytowy działają obciążenia normalne p i $q = kp$ oraz styczne $\tau = lp$. Optymalny kierunek usytuowania włókien będzie poszukiwany z warunku minimum energii odkształcenia po wprowadzeniu następujących założeń a) określa go jedna rodzina włókien, b) jest on określony przez dwie rodziny włókien ortogonalnych.

Wprowadzone założenia są zgodne z wynikami przedstawionymi w punkcie 3.2. Przy ustalonym α warunek konieczny minimum energii odkształcenia ma postać następującą:

$$(3.12) \quad \frac{\partial W}{\partial \theta_1} = -\frac{p}{2D} \left\{ [2l^2 - (1-k)^2] \left(\frac{\gamma\beta}{2(1-\nu)} \cos 2\alpha - \frac{\beta^2}{4} \sin^2 \alpha \right) \times \right. \\ \times \sin 2(2\theta_1 + \alpha) + 3l(1-k) \left[\left(\frac{\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{4} \right) \sin^2 \alpha - \frac{\gamma\beta}{2(1-\nu)} \right] \times \\ \times \cos 2(2\theta_1 + \alpha) + (1-k^2) \left(\frac{\beta^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\gamma\beta}{1+\nu} \right) \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha + \\ \left. + 3l(1+k) \left(\frac{\beta^2}{4} \sin^2 \alpha + \frac{\gamma\beta}{2(1+\nu)} \right) \cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha \right\} = 0,$$

gdzie

$$D = \frac{\gamma}{(1+\nu)(1-\nu)} \left[\frac{\gamma^2}{1+\nu} + \frac{\gamma\beta}{1+\nu} + \frac{\beta^2}{4} (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) \right].$$

Natomiast warunek dostateczny określony jest następującą nierównością:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta_1^2} = -\frac{p^2}{D} \left\{ [2l^2 - (1-k)^2] \left(\frac{\gamma\beta}{1-\nu} \cos 2\alpha - \frac{\beta^2}{2} \sin^2 \alpha \right) \times \right. \\ \times \cos 2(2\theta_1 + \alpha) - 3l(1-k) \left[\left(\frac{2\gamma\beta}{1-\nu} + \frac{\beta^2}{2} \right) \sin^2 \alpha - \frac{\gamma\beta}{1-\nu} \right] \sin 2(2\theta_1 + \alpha) + \\ + (1-k^2) \left(\frac{\beta^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\gamma\beta}{1+\nu} \right) \cos(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha - \\ \left. - \frac{3}{2} l(1+k) \left(\frac{\beta^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\gamma\beta}{1+\nu} \right) \sin(2\theta_1 + \alpha) \cos \alpha \right\} > 0.$$

W przypadku gdy występuje jedna rodzina włókien ($\alpha = 0$) równanie (3.12) jest spełnione przez $\theta_1 = \hat{\theta}_1$; tę wartość wyznaczamy z następującego równania:

$$(3.13) \quad [2l^2 - (1-k)^2] \sin 4\theta_1 - 3l(1-k) \cos 4\theta_1 + 2(1-k^2) \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin 2\theta_1 + \\ + 3l(1+k) \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos 2\theta_1 = 0.$$

Jeżeli $\theta_1 = \hat{\theta}_1$ spełnia nierówność

$$(3.14) \quad -2[2l^2 - (1-k)^2] \cos 4\theta_1 - 6l(1-k) \sin 4\theta_1 - 2(1-k^2) \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos 2\theta_1 +$$

$$+ 3l(1+k) \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin 2\theta_1 > 0,$$

to energia odkształcenia osiąga minimum.

Warunek konieczny minimum energii odkształcenia (3.12) przy założeniu ortogonalności rodzin włókien sprowadza się do następującego równania:

$$(3.15) \quad \operatorname{tg} 4\theta_1 = \frac{3l(1-k)}{2l^2 - (1-k)^2}.$$

Jeśli przez $\theta_1 = \theta_1^*$ spełnione jest równanie (3.15) oraz nierówność

$$(3.16) \quad [2l^2 - (1-k)^2] \cos 4\theta_1 + 3l(1-k) \sin 4\theta_1 < 0,$$

to w przypadku rodzin ortogonalnych energia odkształcenia osiąga minimum.

Wyznaczone kąty θ_1^* i θ_1^* spełniające odpowiednio zależności (3.13) i (3.14) oraz (3.15) i (3.16) określają minimum energii odkształcenia w przypadku uzbrojenia jedną rodziną włókien oraz w przypadku uzbrojenia ortogonalnymi rodzinami. Aby określić optymalny kierunek ułożenia włókien, należy porównać energię odkształcenia odpowiednio przy $\alpha = 0$ i $\theta_1 = \theta_1^*$ oraz przy $\alpha = 90^\circ$ i $\theta_1 = \theta_1^*$. Optymalne usytuowanie dwóch rodzin włókien odpowiada mniejszej wartości energii.

Jako ilustrację przeprowadzonych rozważań rozpatrzmy szczególne przypadki obciążeń. Niech $k = -1$, $l = 0,5$; wtedy równania (3.13) i (3.15) są identyczne i mają postać

$$\operatorname{tg} 4\theta_1 = -\frac{6}{7},$$

z której wynikają rozwiązania $\theta_1 = 79^\circ 51'$ i $\theta_1 = 34^\circ 51'$. Nierówność (3.14) i (3.16) przyjmuje postać

$$-3,5 \cos 4\theta_1 + 3 \sin 4\theta_1 < 0,$$

która spełniona jest przez pierwsze rozwiązanie, tzn. $\theta_1 = 79^\circ 51'$. Z porównania wartości energii przy $\theta_1 = 79^\circ 51'$ i $\alpha = 0$ oraz $\theta_1 = 79^\circ 51'$ i $\alpha = 90^\circ$ wynika, że

$$\begin{aligned} W(\theta_1 = 79^\circ 51', \alpha = 0) - W(\theta_1 = 79^\circ 51', \alpha = 90^\circ) = \\ = \frac{(1+\nu) p^2 \beta^2}{64\gamma(\gamma+\beta) \left(\frac{\gamma^2}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{\gamma\beta}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{\beta^2}{4} \right)} \times \\ \times \{ 2\gamma(1+7 \cos^2 20^\circ 18' + 3 \sin 40^\circ 36') + \beta(7(1+\nu) \sin^2 20^\circ 18' + \\ + 14 \cos^2 20^\circ 18' - 2(3+4\nu) + 3(1-\nu) \sin 40^\circ 36') \}. \end{aligned}$$

Różnica ta jest zawsze dodatnia, zatem w rozważanym przypadku obciążeń optymalnemu usytuowaniu włókien odpowiadają rodziny ortogonalne nachylone pod kątem $79^{\circ}51'$.

Rozpatrzmy jeszcze następujący przypadek obciążenia $k = 1$, $l = 0,5$. Wtedy równanie (3.13) przyjmuje postać

$$\left(\sin 2\theta_1 + \frac{3(1-\nu)}{1+\nu} \right) \cos 2\theta_1 = 0,$$

i jest spełnione, gdy $\cos 2\theta_1 = 0$ lub $\sin 2\theta_1 = (-3(1-\nu))/(1+\nu)$.

Ponieważ przy $0 < \nu < 0,5$ mamy $[(3(1-\nu))/(1+\nu)] > 1$, zatem jedynymi rozwiązaniami równania jest $\theta_1 = 45^{\circ}$ lub $\theta_1 = 135^{\circ}$. Nierówność (3.14) przyjmuje postać następującą:

$$-\cos 4\theta_1 + 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin 2\theta_1 > 0,$$

która spełniona jest, jeśli $\theta_1 = 45^{\circ}$.

Natomiast równanie (3.15) sprowadzone jest do następującej postaci:

$$\operatorname{tg} 4\theta_1 = 0,$$

która spełniona jest przez $\theta_1 = 0^{\circ}$ i $\theta_1 = 45^{\circ}$. Nierówność (3.16) sprowadza się do postaci

$$\frac{1}{2} \cos 4\theta_1 < 0,$$

i spełniona jest również przy $\theta_1 = 45^{\circ}$.

Porównując energię przy $\theta_1 = 45^{\circ}$ i $\alpha = 0$ oraz przy $\theta_1 = 45^{\circ}$ i $\alpha = 90^{\circ}$ otrzymano różnicę

$$W(\theta_1 = 45^{\circ}, \alpha = 0) - W(\theta_1 = 45^{\circ}, \alpha = 90^{\circ}) =$$

$$\frac{(1+\nu)(1-\nu)p^2\beta^3 \left\{ \frac{3}{4(1+\nu)(1-\nu)} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu}{4(1+\nu)(1-\nu)} \frac{\gamma}{\beta} + \frac{3}{16(1-\nu)} \frac{\gamma}{\beta} - \frac{3}{32} \right\}}{2(\gamma+\beta) \left(\frac{\gamma^3}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{\gamma^2\beta}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{\gamma\beta^2}{4} \right)},$$

z której wynika, że w przypadku kompozytów betonopodobnych przy $\gamma/\beta = 7$ ($E^{(m)} = 30000$ MPa, $E^{(s)} = 210000$ MPa i $h-h_m/h = 0,02$) optymalne usytuowanie włókien odpowiada jednej rodzinie włókien nachylonej pod kątem 45° .

4. WNIOSKI

Warunki konieczne dla osiągnięcia minimum energii odkształceń przy dowolnych obciążeniach normalnych i stycznych są równaniami silnie nieliniowymi. Z przybliżonego rozwiązania wynika, że w przypadku kompozytów

betonopodobnych $\left(\begin{matrix} (m) \\ v \end{matrix} = \frac{1}{6}, \frac{E}{E} = \frac{1}{7}, \frac{h_m}{h} = 0,98 \right)$ optymalny kąt pomiędzy

oboma rodzinami włókien jest równy 0° lub 90° , czyli wtedy gdy występuje jedna rodzina włókien lub dwie rodziny ortogonalne. Kąt nachylenia włókien do osi x_1 zależy od stosunku obciążeń normalnych i stycznych $\frac{q}{p}$ i $\frac{\tau}{p}$.

W przypadku gdy na element kompozytowy działają tylko obciążenia normalne równe co do wielkości ($p = q, \tau = 0$) energia odkształcenia osiąga minimum przy dwóch rodzinach włókien ortogonalnych nachylonych pod dowolnym kątem θ_1 .

Natomiast gdy na element kompozytowy działają tylko obciążenia styczne ($p = q = 0, \tau$ — dowolne) energia odkształcenia osiąga minimum w przypadku jednej rodziny włókien nachylonej do osi x_1 pod kątem 45° oraz w przypadku dwóch rodzin ortogonalnych również nachylonych pod kątem 45° .

Energia jest w obydwu przypadkach taka sama.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. E. BRANDMAIER, *Optimum filament orientation criteria*, J. Comp. Mater., 4, 422–425, 1970.
2. A. M. BRANDT, *On the optimization of the internal structure of fibre reinforced composite materials*, in: Optimization Methods in Structural Design, ed. H. ESCHENAUER, N. OLSHOFF, Proc. Euromech Coll., 164, 295–300, Siegen 1982.
3. H. L. COX, *The general principles governing the stress analysis of composites*, Proc. Conf., in: Fibre Reinforced Materials: Design and Engineering Applications, Instn. of Civil Engineers, paper 2, 9–13 and disc., 23–24 March, London 1977.
4. Z. HASHIN, B. W. ROSEN, *The elastic moduli of fibre-reinforced materials*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 31, 2, 225–232, 1964.
5. R. HILL, *Elastic properties of reinforced solids. Some theoretical principles*, J. Mech. Phys. Solids, 12, 199–212, 1964.
6. A. KELLY, G. J. DAVIES, *The principles of the fibre reinforcement metals*, Metallurgical Rev., 10, 37, 1–77, 1965.
7. M. MARKS, *Odkształcalność elementu kompozytowego uzbrojonego dwiema rodzinami włókien*, XXV Jubileuszowa Konferencja Naukowa KILiW PAN i Komitetu Nauki PZITB Wrocław 1979, Krynica, 1, 155–161.
8. A. J. M. SPENCER, *Deformations of fibre reinforced materials*, Clarendon Press, Oxford 1972.

Резюме

КОМПОЗИТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С НАИМЕНЬШЕЙ ДЕФОРМИРУЕМОСТЬЮ
АРМИРОВАННЫЕ ДВУМЯ СЕМЕЙСТВАМИ ВОЛОКОН

В настоящей работе рассмотрен композитный элемент, образованный из матрицы, армированной двумя семействами непрерывных волокон, наклоненных под углами θ_1 и θ_2 к оси x_1 . Определены напряженные и деформационные состояния в элементе, подвергнутом нормальным и касательным нагрузениям. Ищутся оптимальные направления волокон из-за минимума энергии деформирования элемента.

SUMMARY

COMPOSITE ELEMENTS OF MINIMUM DEFORMABILITY REINFORCED
BY TWO FAMILIES OF FIBRES

A composite element is considered consisting of a matrix reinforced by two families of continuous fibres making angles θ_1 and θ_2 with the x_1 -axis. The states of stress and strain in the element subject to normal and tangential loads are determined. Optimal fibres directions are sought for leading to minimal strain energy of the element.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 21 października 1987 r.