

PROBLEM STEPLA O PODSTAWIE PŁASKIEJ Z WIĘZAMI JEDNOSTRONNYMI

GRZEGORZ CYROK (ZIELONA GÓRA) i ROMUALD ŚWITKA (POZNAŃ)

W pracy rozważa się problem stempla o dowolnym kształcie płaskiej podstawy, wciskanego w półprzestrzeń sprężystą przez obciążenie, którego mimośrodowe działanie może powodować odrywanie się części obszaru podstawy stempla od podłoża. Przyjęto iteracyjną metodę rozwiązania. W tym celu rozwiązuje się najpierw problem stempla z więzami dwustronnymi, wykorzystując metodę elementów brzegowych. Obszar podstawy stempla dzieli się na trójkątne elementy powierzchniowe z liniowymi funkcjami kształtu aproksymującymi funkcję oporu podłoża. Dla zadania z więzami jednostronnymi, opracowano algorytm postępowania iteracyjnego. Za pomocą zrealizowanego programu komputerowego wykonano obliczenia licznych przykładów (stemple o podstawie kolistej, kwadratowej, trójkątnej, teowej i kątowej).

1. WSTĘP

Zadanie dotyczące statyki stempla o podstawie płaskiej wciskanego w podłoże sprężyste pojawia się głównie w związku z potrzebami inżynierii lądowej w zakresie fundamentowania. Klasycznymi już obecnie są rozwiązania BOUSSINESQA [1 i 2] i SADOWSKYEGO [3 i 4]. Pierwsze z nich dotyczy stempla kołowego o podstawie płaskiej wciskanego osiowo w półprzestrzeń sprężystą, drugie — stempla płaskiego działającego na półpłaszczyznę sprężystą. Wraz z rozwojem nowych metod analitycznych i numerycznych poszerzał się krąg rozwiązywanych efektywnie zadań kontaktowych. Przegląd klasycznych problemów zawierają monografie GALINA [5] i GLADWELLA [6]. Metodę przekształceń całkowitych oraz całkowitych równań dualnych z powodzeniem stosowali m. in. SNEDDON [2] i UFLAND [7]. Metody te okazały się bardzo przydatne w rozwiązywaniu licznych zadań dotyczących m. in. stempli z uwzględnieniem adhezji, stempli z niepłaską powierzchnią przylegania, stempli wciskanych w warstwę sprężystą itp. Nieklasyczne problemy stempli o dowolnym kształcie podstawy rozwiązywane metodami analitycznymi na podstawie metody R -funkcji znajdujemy w monografii RWACZEWA i PROCENKI [8]. Mimo uzyskania wielu ważnych wyników możliwości metod analitycznych są ograniczone do szczególnych przypadków i dotyczą z reguły zadań z więzami dwustronnymi na styku z podłożem.

Nowe impulsy szeroko i ogólnie rozumianym problemom kontaktowym ciał sprężystych dał rozwój metod numerycznych i techniki komputerowej. Rozważa się kontakt ciał o kształcie dowolnym. W takim wypadku obszar

kontakty jest nieznaną. Na ogół przyjmuje się, że w obszarze kontaktu mogą być przenoszone tylko naprężenia normalne ściskające. Więzy jednostronne są czynnikiem utrudniającym znacznie tok rozwiązania. Możliwe są, ogólnie rzecz ujmując, dwa sposoby rozwiązywania zadań kontaktowych z więzami jednostronnymi: 1) obszar kontaktu traktuje się jako niewiadomą i uzupełnia się stosownie układ równań problemu warunkami ograniczającymi mającymi postać nierówności; 2) obszar kontaktu przyjmuje się *a priori* i następnie poprawia w kolejnych obliczeniach w ten sposób, aby spełnione były warunki wynikające z jednostronności więzów. Pierwszy sposób prowadzi na ogół do metod programowania nieliniowego, sposób drugi jest typowy dla metod iteracyjnych. W większości prac stosuje się pierwszy sposób wykorzystując w tym celu zasady ekstremalne i sformułowania wariacyjne.

Pierwsze próby sformułowania problemu kontaktowego dwóch ciał jako zadania programowania kwadratowego podjęli CONRY i SEIREG [9], którzy wykorzystali w tym celu zasadę minimum energii potencjalnej wyrażoną dyskretnym zbiorem współczynników wpływu dla przemieszczeń powierzchni w obszarze kontaktu.

Istotne znaczenie dla omawianego tematu miały prace KALKERA i VAN RANDENA, z których wymienimy [10]. Dla zadania kontaktowego ciał sprężystych bez tarcia autorzy pracy [10] wyprowadzają zasadę minimum entalpii. Stosując dyskretyzację metodą elementów skończonych (elementy trójkątne z liniowymi funkcjami aproksymującymi ciśnienie kontaktowe) sprowadzają zadanie do programowania nieliniowego. Przy parokrotnym powtarzaniu obliczeń podział na elementy skończone jest za każdym razem zagęszczany na granicy obszaru kontaktu.

W dalszych kolejnych pracach wykorzystujących programowanie nieliniowe stosowane są różne sposoby dyskretyzacji zadania (JOHNS i LEISSA [11], PÁCZELT [12 i 13], PANAGIOTOPOULOS [14], KRAWCZUK [15], BOGOMOLNII, ESKIN i ZUCHOWIZKII [16], HASLINGER i HLAVAČEK [17 i 18] BUFLER, LIEB i MEIER [19], oraz RABINOWICZ i SPEKTOR [20]). Praca [19] zawiera wyprowadzenie zasady minimum funkcjonału typu Hellingera-Reissnera. Procedura dyskretyzacyjna polega na dzieleniu obszaru spodziewanego kontaktu na kwadratowe elementy powierzchniowe ze stałym ciśnieniem. Kwadraty zamienia się na równoważne im pod względem pola koła, co ułatwia obliczenie elementów macierzy podatności podłoża. Podobne postępowanie stosowali JOHNS i LEISSA [11] dla ciał wielowarstwowych. W tym miejscu należy jednak zauważyć, że koncepcja dyskretyzacji związków między osiadaniem podłoża a jego obciążeniem przez podział na kwadraty i zastąpienie ich równoważnymi pod względem pola kołami ze stałym ciśnieniem była przedstawiona już w 1960 roku przez PIECHNIKA [21]. Praca [21] dotyczyła płyty na półprzeźrzeni sprężystej z więzami dwustronnymi.

Koncepcję nierówności wariacyjnych rozwinęli DUVAUT i LIONS [22]. Zastosowania do zagadnień kontaktowych przedstawiali DUVAUT [23] i KIKUCHI

[24 i 25]. Kikuchi rozważał stemple o różnym kształcie powierzchni wciskanej w podłoże dwuparametrowe i półpłaszczyznę sprężystą. Interesująca alternatywa oparta na metodzie kary w połączeniu z MES była proponowana przez ODENA [26] oraz KIKUCHI i SONGA [27].

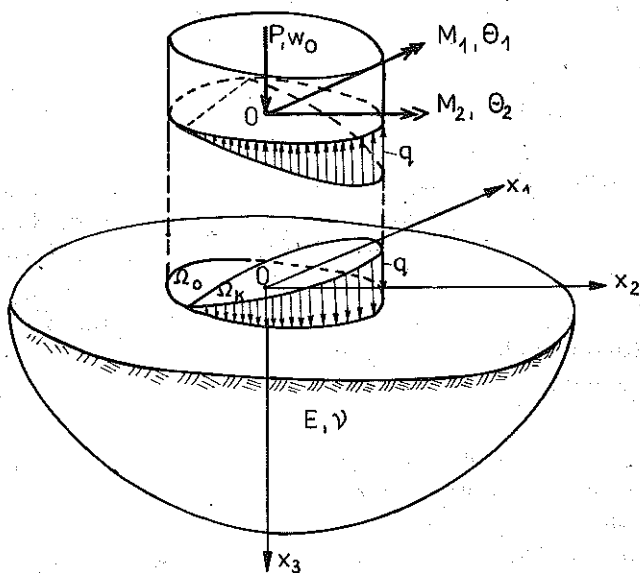
Oddzielną grupę stanowią prace rozwiązujące zadanie kontaktowe z wykorzystaniem MES oraz postępowania iteracyjnego dla określenia obszaru kontaktu (CHAN i TUBA [28], KRATOCHVIL [29], RYŻOW, SAKAŁO i PODLESNOW [30], MAHMOUD, SALAMON i MARKS [31] oraz TORSTENFELT [32]). W większości obydwu ciała kontaktujące się mają skończone wymiary i dzielone są na skończoną liczbę elementów, co różni je od prac poprzednio omawianych, w których budowane były w różny sposób związki między osiadaniami a obciążeniami półpłaszczyzny lub warstwy z wykorzystaniem funkcji Greena.

W niniejszej pracy problem kontaktowy analizuje się w takiej postaci, jaka występuje w inżynierii lądowej. Rozważa się stempel z płaską podstawą o dowolnym kształcie rzutu poziomego, leżący na półprzestrzeni sprężystej. Źródłem manifestowania się jednostronnego działania więzów na styku stempła z podłożem jest więc nie kształt powierzchni ciał stykających się, lecz mimosrodowisko obciążenia, powodująca obrót stempła.

Dla podłoża zastosowano metodę elementów brzegowych (tutaj będziemy je nazywać elementami powierzchniowymi) z wykorzystaniem funkcji Greena dla półprzestrzeni sprężystej, tożsamej ze znanym rozwiązaniem Boussinesqa. Obszar kontaktu wyznacza się iteracyjnie. Zgodnie z przekonaniem autorów metoda iteracyjna jest najbardziej prosta i efektywna.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech ciało idealnie sztywne w postaci stempła z płaską podstawą opiera się na półprzestrzeni sprężystej $[x_1, x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \geq 0]$, dla której E jest modułem sprężystości podłużnej, ν współczynnikiem Poissona. Obciążenia działające na stempel (wraz z jego ciężarem własnym) można sprowadzić do składowej pionowej siły $\mathbf{P} = (0, 0, P)$ i dwóch składowych poziomych momentu statycznego $\mathbf{M} = (M_1, M_2, 0)$, przyłożonych do środka geometrycznego podstawy stempła (rys. 1). Pomija się siły tarcia między stemplem a podłożem, wobec czego wzajemne oddziaływanie jest wyłącznie pionowe i oznacza się je przez $q = q(x_1, x_2)$. Pod wpływem obciążenia stempel przemieści się pionowo, tzn. wektor przemieszczenia w początku układu współrzędnych będzie $\mathbf{w}_0 = (0, 0, w_0)$ oraz obrotu $\theta = (\theta_1, \theta_2, 0)$. Jeśli więzy na styku stempła z podłożem są jednostronne, to w ogólnym przypadku kontakt wystąpi tylko w części podstawy stempła. Można napisać, że $\Omega_0 \cup \Omega_k = \Omega$ i $\Omega_0 \cap \Omega_k = 0$, przy czym Ω_0 jest obszarem braku kontaktu (odrywania), Ω_k obszarem kontaktu i Ω obszarem zajmowanym przez całą podstawę stempła. W obszarze Ω_k oddziaływanie podłoża $q \geq 0$, a przemieszczenia pionowe podstawy stempła $w = w(x_1, x_2)$



Rys. 1

i osiadania podłoża $v = v(x_1, x_2)$ są sobie równe ($v = w$). W obszarze Ω_0 jest natomiast $q = 0$ i $v > w$.

Przemieszczenia $v(\mathbf{x})$ wyznacza się ze wzoru

$$(2.1) \quad v(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega_k} G(\mathbf{x}, \underline{\xi}) q(\underline{\xi}) d\Omega(\underline{\xi}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad \underline{\xi} \in \Omega_k,$$

w którym $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$, $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, 0)$, S jest płaszczyzną $x_3 = 0$, $G(\mathbf{x}, \underline{\xi})$ funkcją Greena będącą w danym zadaniu określoną wzorem Boussinesqa

$$(2.2) \quad G(\mathbf{x}, \underline{\xi}) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E |\mathbf{x} - \underline{\xi}|} = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}}.$$

Przemieszczenia płaskiej podstawy stępła określa wzór

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= w_0 + x_2 \theta_1 - x_1 \theta_2 = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= [1 \ x_2 - x_1], \quad \mathbf{U} = \text{col}(w_0, \theta_1, \theta_2), \\ \mathbf{x} &\in \Omega. \end{aligned}$$

Jeśli utworzymy wektor $\mathbf{T} = \text{col}(P, M_1, M_2)$, to równania równowagi można napisać w zwartej formie

$$(2.4) \quad \mathbf{T} = \iint_{\Omega_k} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}).$$

W celu przedstawienia warunków kontaktu dla więzów jednostronnych wygodnie będzie, idąc za [10, 17 i 20], wprowadzić funkcję $\eta(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x})$. Dla więzów jednostronnych poprawne są relacje następujące:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Omega_k &\Leftrightarrow \eta(\mathbf{x}) = 0 \wedge q(\mathbf{x}) \geq 0, \\ \mathbf{x} \in \Omega_0 &\Leftrightarrow \eta(\mathbf{x}) \geq 0 \wedge q(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned}$$

co można napisać krótko

$$(2.5) \quad \eta(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) = 0, \quad \eta(\mathbf{x}) \geq 0, \quad q(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

przy czym, uwzględniając (2.1) i (2.3) znajdziemy

$$(2.6) \quad \eta(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega_k} G(\mathbf{x}, \xi) q(\xi) d\Omega(\xi) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

W celu rozwiązania zadania należy wyznaczyć wektor \mathbf{U} i funkcję $q(\mathbf{x})$ w ten sposób, aby były spełnione równania (2.4) i (2.5) z uwzględnieniem (2.6).

3. ZADANIE Z WIĘZAMI DWUSTRONNYMI

Metoda iteracyjna rozwiązania problemu sformułowanego w p. 2 wymaga wielokrotnego rozwiązywania zadania z więzami dwustronnymi. Zatem należy najpierw podać efektywny algorytm rozwiązania problemu stępła z więzami dwustronnymi. W przypadku więzów dwustronnych $\eta(\mathbf{x}) = 0$ dla $\mathbf{x} \in \Omega$, czyli

$$(3.1) \quad \iint_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) q(\xi) d\Omega(\xi) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Zadanie rozwiązuje się metodą elementów brzegowych. W tym celu obszar Ω dzieli się na trójkątne podobszary $\Omega^e \subset \Omega$, $e = 1, 2, \dots, E$, gdzie e jest numerem elementu powierzchniowego, E liczbą elementów. Oddziaływanie podłoża w elemencie powierzchniowym aproksymuje się za pomocą wzoru

$$(3.2) \quad q^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{q}^e, \quad \mathbf{x} \in \Omega^e,$$

w którym

$$\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) = [N_l^e(\mathbf{x}) \quad N_m^e(\mathbf{x}) \quad N_n^e(\mathbf{x})]$$

jest macierzą liniowych funkcji kształtu,

$$\mathbf{q}^e = \text{col}(q_l, q_m, q_n)$$

wektorem rzędnych oddziaływania podłoża w węzłach l, m, n , będących wierzchołkami trójkąta Ω^e . Ponieważ

$$(3.3) \quad q(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^E q^e(\mathbf{x}),$$

więc podstawiając (3.3) do (2.4) i (3.1) otrzymuje się

$$(3.4) \quad \mathbf{T} = \sum_{e=1}^E \left[\iint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \right] \mathbf{q}^e,$$

$$(3.5) \quad \sum_{e=1}^E \left[\iint_{\Omega^e} G(\mathbf{x}^{(i)}, \xi) \mathbf{N}^e(\xi) d\Omega(\xi) \right] \mathbf{q}^e = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(i)})\mathbf{U},$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, W$; W oznacza liczbę węzłów przy danym podziale na elementy powierzchniowe oraz $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ wektor wodzący węzła i .

Równanie (3.4) można napisać w postaci macierzowej:

$$(3.6) \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}_{Tq} \mathbf{q},$$

gdzie $\mathbf{q} = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_W)$ oznacza wektor rzędnych reakcji podłoża w węzłach oraz $\mathbf{A}_{Tq} = [a_{ij}]_{(3 \times W)}$ macierz transformacji \mathbf{q} na \mathbf{T} . Kolumny macierzy \mathbf{A}_{Tq} oblicza się wzorem

$$(3.7) \quad \text{col}(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}) = \sum_{e \in E_j} \iint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) N_j^e(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}),$$

w którym E_j jest zbiorem liczb będących numerami tych elementów powierzchniowych Ω^e , które zawierają węzeł j , natomiast $N_j^e(\mathbf{x})$ jest funkcją kształtu określoną na $\Omega^e (e \in E_j)$ i odpowiadającą węzłowi j (tzn. $N_j^e(\mathbf{x}^{(k)}) = \delta_{jk}$).

Idąc za przykładem [33] wprowadzimy macierz podatności podłoża $\mathbf{D} = [d_{ij}]_{(W \times W)}$ transformującą \mathbf{q} na \mathbf{v} , $\mathbf{v} = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_W)$:

$$(3.8) \quad \mathbf{v} = \mathbf{D} \mathbf{q}.$$

Elementy d_{ij} macierzy \mathbf{D} oblicza się za pomocą wzoru

$$(3.9) \quad d_{ij} = \sum_{e \in E_j} \iint_{\Omega^e} G(\mathbf{x}^{(i)}, \xi) N_j^e(\xi) d\Omega(\xi).$$

Wektor przemieszczeń węzłów płaskiej podstawy stępła $\mathbf{w} = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_W)$ można wyrazić przez wektor \mathbf{U} :

$$(3.10) \quad \mathbf{w} = \mathbf{A}_{wU} \mathbf{U}.$$

Macierz \mathbf{A}_{wU} ma postać

$$(3.11) \quad \mathbf{A}_{wU} = \text{col}(\mathbf{B}(\mathbf{x}^{(1)}), \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(2)}), \dots, \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(W)})) = \begin{bmatrix} 1x_2^{(1)} - x_1^{(1)} \\ 1x_2^{(2)} - x_1^{(2)} \\ \dots \\ 1x_2^{(W)} - x_1^{(W)} \end{bmatrix}.$$

Biorąc pod uwagę (3.8) i (3.10) w warunku zgodności przemieszczeń $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, otrzymuje się

$$(3.12) \quad \mathbf{D} \mathbf{q} = \mathbf{A}_{wU} \mathbf{U}.$$

Wzór (3.12) jest macierzową formą zapisu układu równań (3.5).

Ze wzorów (3.12) i (3.6) otrzymuje się bezpośredni związek między wektorem uogólnionych przemieszczeń stępła i wektorem obciążeń:

$$(3.13) \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{T},$$

gdzie

$$(3.14) \quad \mathbf{K} = \mathbf{A}_{Tq} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_{wU}.$$

Równanie (3.13) daje rozwiązanie zadania z więzami dwustronnymi. Po wyznaczeniu wektora \mathbf{U} oblicza się

$$(3.15) \quad \mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_{wU} \mathbf{U}$$

oraz $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ (w obszarze Ω) ze wzoru (3.10) lub (3.8).

W powyższych równaniach wektor \mathbf{q} jest reprezentacją funkcji $q(\mathbf{x})$ w obszarze Ω . Możliwe jest przyjęcie innej reprezentacji, mianowicie wektora $\mathbf{Q} = \text{col}(Q_1, Q_2, \dots, Q_w)$, którego składowymi są siły węzłowe statycznie równoważne odporowi $q(\mathbf{x})$. Oba ujęcia prowadzą do tych samych wyników. Z zasady pracy wirtualnej sił działających na stempel otrzymuje się związek

$$(3.16) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{A}_{Qq} \mathbf{q}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}_{TQ} \mathbf{Q},$$

w których macierz $\mathbf{A}_{TQ} = \mathbf{A}_{wU}^T$, natomiast macierz \mathbf{A}_{Qq} otrzymuje się z agregacji równań

$$(3.17) \quad \mathbf{Q}^e = \left(\iint_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^T \mathbf{N}^e d\Omega \right) \mathbf{q}^e, \quad e = 1, 2, \dots, E,$$

w których $\mathbf{Q}^e = \text{col}(Q_b, Q_m, Q_n)$ jest wektorem sił węzłowych dla elementu e statycznie równoważnych oddziaływaniu $q(\mathbf{x})$

$$q^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{q}^e, \quad \mathbf{x} \in \Omega^e.$$

Równanie (3.17) uzyskano przyjmując wirtualne przemieszczenia $\bar{w}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{w}}^e$ dla $\mathbf{x} \in \Omega^e$, gdzie \mathbf{N}^e oznacza funkcję kształtu jak w (3.2) oraz $\bar{\mathbf{w}}^e$ wektor przemieszczeń węzłów elementu e .

Bardziej oszczędne w obliczeniach komputerowych jest sformułowanie wykorzystujące wektor \mathbf{q} .

4. ZADANIE Z WIĘZAMI JEDNOSTRONNYMI

Powracając do sformułowanego w p. 2 problemu, napiszemy równania macierzowe dla zadania z więzami jednostronnymi. Oznaczmy przez η_i wartość funkcji $\eta(\mathbf{x})$ w węźle i . Biorąc pod uwagę, że η było różnicą przemieszczenia podłoża v i podstawy stępła w , znajdziemy

$$\eta_i = v_i - w_i = \sum_j d_{ij} q_j - \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(i)}) \mathbf{U}, \quad i, j = 1, 2, \dots, W.$$

Jeśli z wielkości η_i utworzony zostanie wektor $\underline{\eta} = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_w)$, to równanie (4.1) można przedstawić w postaci

$$(4.2) \quad \underline{\eta} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{D} \mathbf{q} - \mathbf{A}_{wU} \mathbf{U}.$$

Problem stępła z więzami jednostronnymi opisany jest układem równań i nierówności:

$$(4.3) \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}_{Tq} \mathbf{q},$$

$$(4.4) \quad \mathbf{q}^T \underline{\eta} = 0, \quad \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \quad \underline{\eta} \geq \mathbf{0}$$

z wykorzystaniem (4.2).

Układ równań i nierówności (4.2)—(4.4) rozwiązuje się iteracyjnie. Obliczenia rozpoczyna się od rozwiązania zadania z więzami dwustronnymi, zakładając zgodność przemieszczeń w węzłach, których numery należą do pewnego podzbioru $L^{(1)}$ zbioru wszystkich numerów węzłów

$$L^{(1)} \subset \{1, 2, \dots, W\}.$$

Zbiór $L^{(1)}$ ustala się *a priori* mając na celu skrócenie czasu obliczeń. W szczególnym przypadku zbiór ten może pokrywać się ze zbiorem $\{1, 2, \dots, W\}$. Na ogół jednak zbiór $L^{(1)}$ nie będzie zawierał wszystkich elementów zbioru $\{1, 2, \dots, W\}$. Jeśli $L^{(1)} \subset \{1, 2, \dots, W\}$ i $\{1, 2, \dots, W\} \setminus L^{(1)} \neq \emptyset$, to należy odpowiednio zmodyfikować macierz podatności podłoża \mathbf{D} :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} d_{ii}^{(1)} &= \lambda & \text{dla } i \notin L^{(1)}, & \quad d_{ii}^{(1)} = d_{ii} & \text{dla } i \in L^{(1)}, \\ d_{ij}^{(1)} &= d_{ij} & \text{dla każdego } i \neq j, & \end{aligned}$$

gdzie λ oznacza bardzo dużą liczbę w porównaniu z d_{ij} (np. $10^{10} \|D\|$, w napisanym programie komputerowym przyjęto $\lambda = 10^{20}$), gdzie $d_{ij}^{(1)}$ oznaczają elementy zmodyfikowanej macierzy podatności podłoża $\mathbf{D}^{(1)}$. Opisana wyżej modyfikacja macierzy \mathbf{D} jest równoznaczna z odrzuceniem więzów w węzłach o numerach $i \notin L^{(1)}$.

Wykorzystując macierz $\mathbf{D}^{(1)}$ w (3.14) rozwiązujemy układ równań (3.13) i obliczamy $\mathbf{U}^{(1)}$, a następnie $\mathbf{q}^{(1)}$ z (3.15), wektor $\mathbf{v}^{(1)}$ z (3.8) i wektor $\mathbf{w}^{(1)}$ z (3.10). Wektory $\mathbf{v}^{(1)}$ i $\mathbf{w}^{(1)}$ nie są już w ogólnym przypadku równe, ich elementy są bowiem różne dla węzłów $i \notin L^{(1)}$.

W drugim i w następnych przybliżeniach zbiór $L^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) będzie się składał z numerów tych węzłów, dla których w poprzednim przybliżeniu zostały spełnione warunki jednostronnych więzów

$$(4.6) \quad i \in L^{(k)} \Leftrightarrow (\eta_i^{(k-1)} = 0 \wedge q_i^{(k-1)} > 0).$$

Macierz $\mathbf{D}^{(k)}$ występującą w k -tym przybliżeniu rozwiązania otrzymuje się z pierwotnej macierzy \mathbf{D} , wprowadzając następujące zmiany dla węzłów o numerach $i \notin L^{(k)}$:

$$(4.7) \quad (\eta_i^{(k-1)} = 0 \wedge q_i^{(k-1)} < 0) \Rightarrow d_{ii}^{(k)} = \lambda,$$

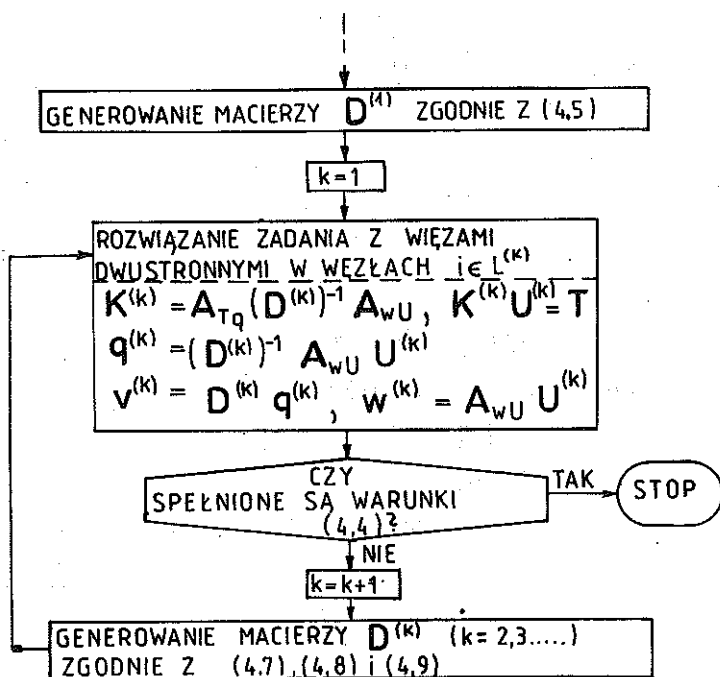
$$(4.8) \quad (\eta_i^{(k-1)} < 0 \wedge q_i^{(k-1)} = 0) \Rightarrow d_{ii}^{(k)} = d_{ii},$$

$$(4.9) \quad (i \neq j) \Rightarrow d_{ij}^{(k)} = d_{ij}.$$

Podstawienie (4.7) jest równoznaczne z odrzuceniem więzów w tych węzłach, w których występuje odrywanie stempla od podłoża, natomiast podstawienie (4.8) odpowiada ponownemu wprowadzeniu więzów do tych węzłów, w których zachodzi fizycznie niedopuszczalne wnikanie stempla w podłoże.

Opisany wyżej tok postępowania iteracyjnego ilustruje sieć działań przedstawiona na rys. 2.

Zgodnie z przedstawionym wyżej algorytmem opracowano program obliczeń w języku Fortran 1900 na maszynie cyfrowe serii ODRA 1300.



Rys. 2

5. JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZANIA

Zakładając istnienie rozwiązania wykażemy wpierrw, że

$$(5.1) \quad Q_i = 0 \Rightarrow q_i = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, W\}.$$

Istotnie, na podstawie wzoru (3.16)₁ można napisać

$$(5.2) \quad Q_i = \sum_{k=1}^W a_{ik} q_k,$$

gdzie a_{ik} są elementami macierzy A_{Qq} . Ze wzoru (3.17) natomiast wynika, że $a_{ik} \geq 0, a_{ii} > 0; i, k = 1, 2, \dots, W$. Zatem jeśli $Q_i = 0$, to wszystkie rzędne q_k przy dodatnich współczynnikach a_{ik} muszą być równe zeru; skąd mamy $q_i = 0$.

Zauważmy następnie, że wobec (5.1) z układu równań i nierówności

$$(5.3) \quad Q^T \underline{\eta} = 0, \quad Q \geq 0, \quad \underline{\eta} \geq 0,$$

wynika układ (4.4), wobec czego z jednoznaczności rozwiązania Q zadania

$$(5.4) \quad T = A_{TQ} Q$$

uzupełnionego układem (5.3), wynika jednoznaczność rozwiązania q zadania opisanego układem (4.3), (4.4). Wobec tego wystarczy dalej wykazać jednoznaczność rozwiązania Q zadania (5.3), (5.4).

Założmy, że istnieją dwa rozwiązania: \underline{Q}' i \underline{Q}'' oraz odpowiadające im wektory $\underline{\eta}'$, \underline{U}' , \underline{w}' i $\underline{\eta}''$, \underline{U}'' , \underline{w}'' . Oznaczmy

$$(5.5) \quad \hat{\underline{Q}} = \underline{Q}' - \underline{Q}'', \quad \hat{\underline{\eta}} = \underline{\eta}' - \underline{\eta}'' \quad \text{itd.}$$

Ponieważ

$$(5.6) \quad (\underline{Q}')^T \underline{\eta}' = 0, \quad \underline{Q}' \geq 0, \quad \underline{\eta}' \geq 0,$$

$$(5.7) \quad (\underline{Q}'')^T \underline{\eta}'' = 0, \quad \underline{Q}'' \geq 0, \quad \underline{\eta}'' \geq 0,$$

więc można też napisać

$$(5.8) \quad (\underline{Q}')^T \underline{\eta}'' \geq 0, \quad (\underline{Q}'')^T \underline{\eta}' \geq 0.$$

Odejmując stronami (5.6)₁ od (5.7)₁ otrzymuje się

$$(5.9) \quad -\hat{\underline{Q}}^T \underline{\eta}' - (\underline{Q}'')^T \hat{\underline{\eta}} + \hat{\underline{Q}}^T \underline{\eta} = 0.$$

Jeśli uwzględnimy (5.6)₁ i (5.8)_{1,2}, to

$$-\hat{\underline{Q}}^T \underline{\eta}' - (\underline{Q}'')^T \hat{\underline{\eta}} = 2(\underline{Q}'')^T \underline{\eta}' + (\underline{Q}'')^T \underline{\eta}'' + (\underline{Q}'')^T \underline{\eta}'' \geq 0,$$

z czego wynika, że musi być

$$(5.10) \quad \hat{\underline{Q}}^T \hat{\underline{\eta}} \leq 0.$$

Następnie otrzymuje się

$$\hat{\underline{Q}}^T \hat{\underline{\eta}} = \hat{\underline{Q}}^T (\underline{D}\hat{\underline{q}} - \underline{A}_{wU}\hat{\underline{U}}) = \hat{\underline{Q}}^T \underline{D}\underline{A}_{qQ}^{-1}\hat{\underline{Q}} - \underline{A}_{TQ}\hat{\underline{Q}}\hat{\underline{U}}.$$

Uwzględniono, że $\underline{A}_{wU} = \underline{A}_{TQ}^T$. Biorąc dalej pod uwagę, że $\underline{T} = \underline{A}_{TQ}\underline{Q}'$ i $\underline{T} = \underline{A}_{TQ}\underline{Q}''$, więc $\underline{A}_{TQ}\hat{\underline{Q}} = \underline{0}$ i warunek (5.10) można napisać w postaci

$$(5.11) \quad \hat{\underline{Q}}^T \underline{D}\underline{A}_{qQ}^{-1}\hat{\underline{Q}} \leq 0.$$

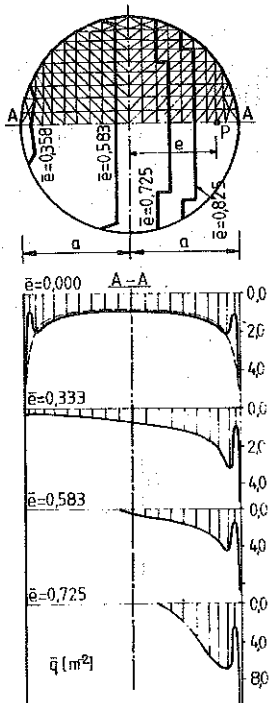
Macierz $\underline{D}\underline{A}_{qQ}^{-1}$ jest określona dodatnio, ponieważ forma kwadratowa $\frac{1}{2}\hat{\underline{Q}}^T \underline{D}\underline{A}_{qQ}^{-1}\hat{\underline{Q}}$ jest określona dodatnio i wyraża energię potencjalną dla półprzestrzeni sprężystej. Wobec tego nierówność (5.11) będzie spełniona tylko dla $\hat{\underline{Q}} = \underline{0}$, skąd wynika, że

$$(5.12) \quad \underline{Q}' = \underline{Q}'' \quad \text{oraz} \quad \underline{q}' = \underline{q}''.$$

6. PRZYKŁADY

6.1. Stempel kolisty

Przyjęto następujące dane: $a = 0,40$ m, $P = 10$ MN. Na rys. 3 zaznaczono podział na elementy powierzchniowe oraz granice stref kontaktu dla różnych wartości bezwymiarowego mimośrodru $\bar{e} = e/a$. Obliczenia wykonano dla $\bar{e} = 0$; 0,333; 0,358; 0,583; 0,725; 0,825. Na rys. 3 uwidoczniono część wyników. Poniżej wzdłuż średnicy naniesiono wykresy spowodowanego oporu podłoża



Rys. 3

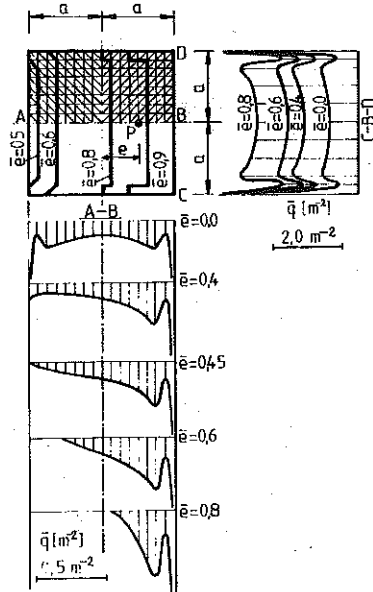
$\bar{q} = q/P \text{ m}^{-2}$. Dla $\bar{e} = 0$ zaznaczono linią przerywaną dla porównania wynik ścisły, który otrzymuje się według rozwiązania Boussinesq'a. Zarówno na tym, jak i na następnych rysunkach, na wykresach odporu podłoża zwraca uwagę charakterystyczne obniżenie w pobliżu krawędzi stępła, przy czym, wzdłuż samej krawędzi obserwuje się zawsze wyraźną koncentrację naprężeń w podłożu. Należy sądzić, że zaburzenie to jest efektem zastosowanej aproksymacji⁽¹⁾.

Przemieszczenia podstawy stępła i podłoża wzdłuż linii średnicowej, na której leży mimośród, pokazuje rys. 4. Przyjęto $P(1 - \nu^2)/E = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Na rys. 5 zamieszczono wykres zależności funkcyjnej $\bar{w}_0 = \bar{w}_0(\bar{e})$ i na rys. 6 — wykres $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\bar{e})$. Rzeczywiste wartości przemieszczenia środka podstawy stępła w_0 i kąta obrotu θ oblicza się wzorem

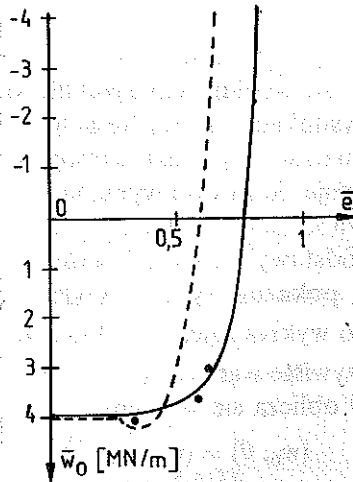
$$(6.1) \quad (w_0, \theta) = (\bar{w}_0, \bar{\theta}) \cdot \frac{\pi(1 - \nu^2)}{E}$$

Kropkami zaznaczono wyniki otrzymane w pracy [34]. Linią przerywaną nanie­siono wyniki, jakie otrzymuje się dla podłoża winklerowskiego. Współczynnik

⁽¹⁾ Wniosek taki potwierdzałyby badania doc. BENDY w Wyższej Szkole Technicznej w Brnie, który spotkał się z podobnymi efektami przy aproksymacji liniowej. Problem zaburzeń aproksymacji w otoczeniu osobliwości jest obecnie przedmiotem badań, których wyniki będą wkrótce opublikowane.



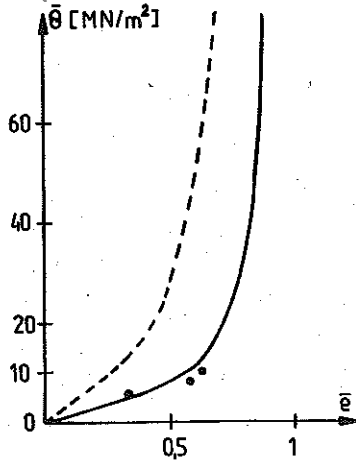
Rys. 4



Rys. 5

podłoża k obliczono z warunku równych osiadań stępła kolistego obciążonego osiowo i leżącego na półprzestrzeni sprężystej oraz na podłożu Winklera:

$$(6.2) \quad k = \frac{2E}{\pi a(1-\nu^2)}$$

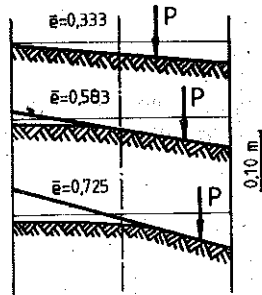


Rys. 6

Jest charakterystyczne, że wyniki elementarne są z reguły zawyżone w stosunku do wyników otrzymywanych na gruncie teorii sprężystości.

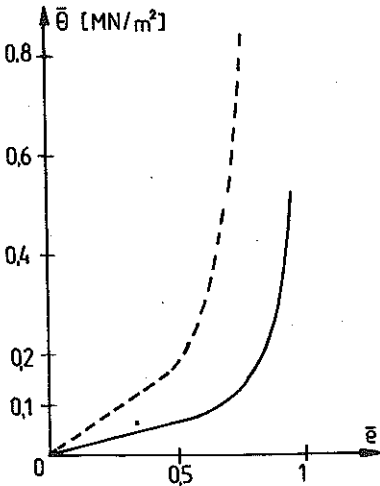
6.2. Stempel kwadratowy, siła działa na osi symetrii równoległej do boku kwadratu

Przyjęto dane: $a = 1,00$ m, $P = 0,8$ MN. Podział na elementy powierzchniowe pokazany jest na rys. 7. Obliczenia wykonano dla $\bar{e} = 0; 0,4; 0,45; 0,5; 0,6$;

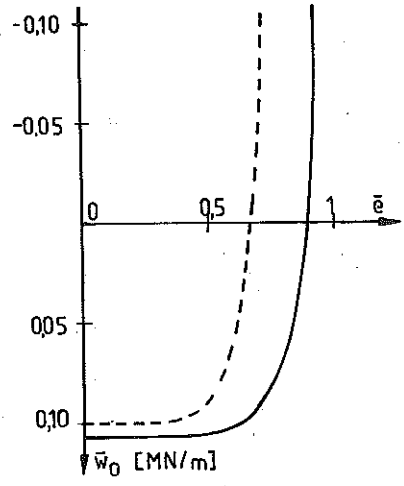


Rys. 7

0,8; 0,9. Na rysunku zaznaczono granice stref kontaktu i wykresy oporu podłoża \bar{q} . Z obliczeń wynika, że promień rdzenia jest nieco mniejszy niż $0,45a$, wobec wyniku elementarnego $0,33a$. Wykresy funkcji $\bar{w}_0 = \bar{w}_0(\bar{e})$ i $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\bar{e})$ pokazane są na rysunkach 8 i 9. Linia ciągła odpowiada półprzestrzeni sprężystej, linia przerywana — podłożu Winklera.



Rys. 8



Rys. 9

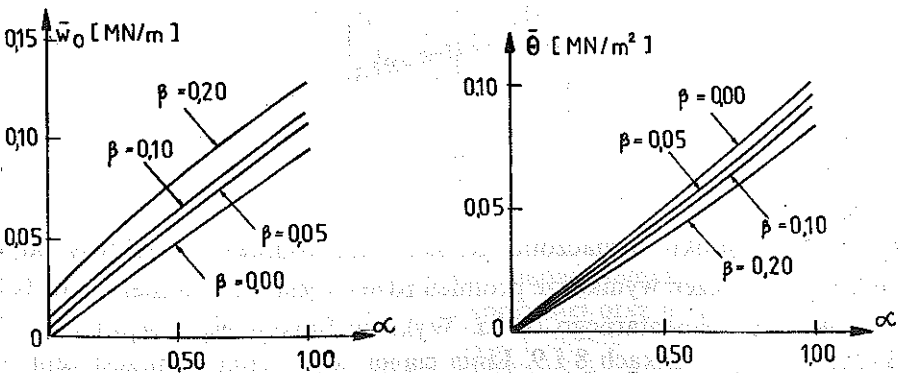
Obszar kontaktu jest zależny od mimośrodowości siły i niezależny od wielkości siły. Prosta proporcjonalność pomiędzy przemieszczeniami i obrotami a obciążeniem zachodzi jednak tylko w sytuacji abstrakcyjnej, jeśli przyjmie się, że stempel jest nieważki. W warunkach realnych należy odróżnić obciążenie czynne (siła P , która może przyjmować wartości zmienne) od obciążenia biernego (ciężar własny stempla G , o którym można założyć, że działa osiowo i jest wielkością stałą). Przyjmijmy

$$(6.3) \quad P = \alpha P^*, \quad \alpha \in (0, 1)$$

oraz

$$(6.4) \quad G = \beta P^*.$$

W powyższych wzorach P^* jest końcową wartością siły czynnej, α zmiennym parametrem obciążenia oraz β parametrem stałym. Na rys. 10 podano wykresy

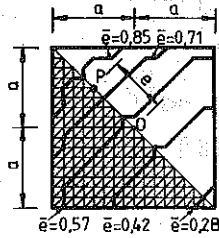


Rys. 10

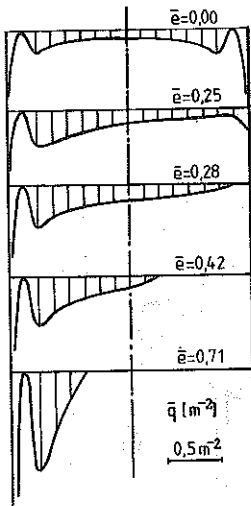
funkcji $\bar{w}_0 = \bar{w}_0(\alpha)$ i $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\alpha)$ dla różnych wartości parametru β . W tych warunkach związek pomiędzy uogólnionymi przemieszczeniami i siłą P można określić jako słabo nieliniowy.

6.3. Stempel kwadratowy, siła działa na przekątnej kwadratu

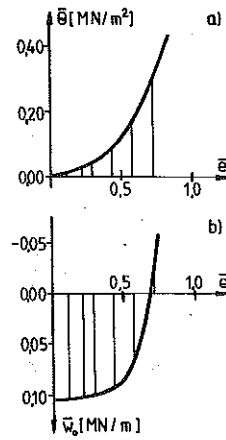
Tutaj przyjęto $\bar{e} = e/(a\sqrt{2})$. Poza tym wszystkie dane i oznaczenia jak w pkt. 6.2. Wyniki są podane na rysunkach 11, 12 i 13 (podział na elementy



Rys. 11



Rys. 12

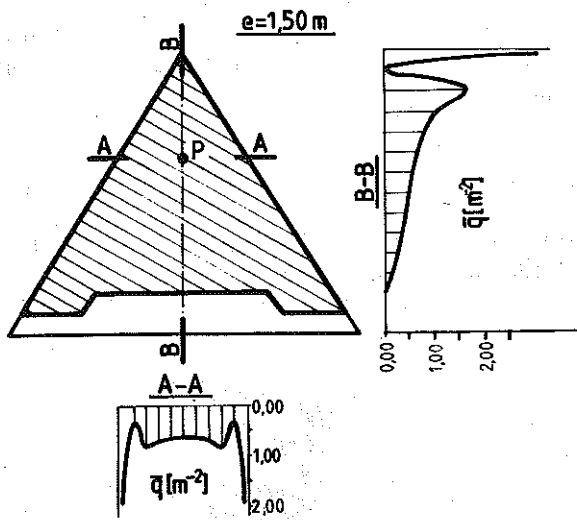


Rys. 13

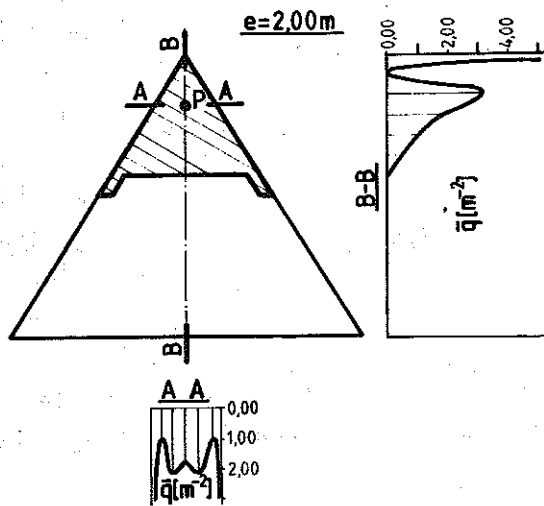
powierzchniowe i granice stref kontaktu przedstawia rys. 11, wykresy oporu podłoża — rys. 12 oraz wykresy funkcji $\bar{\theta} = \bar{\theta}(e)$ i $\bar{w}_0 = \bar{w}_0(e)$ — rys. 13).

6.4. Stempel o podstawie trójkąta równobocznego

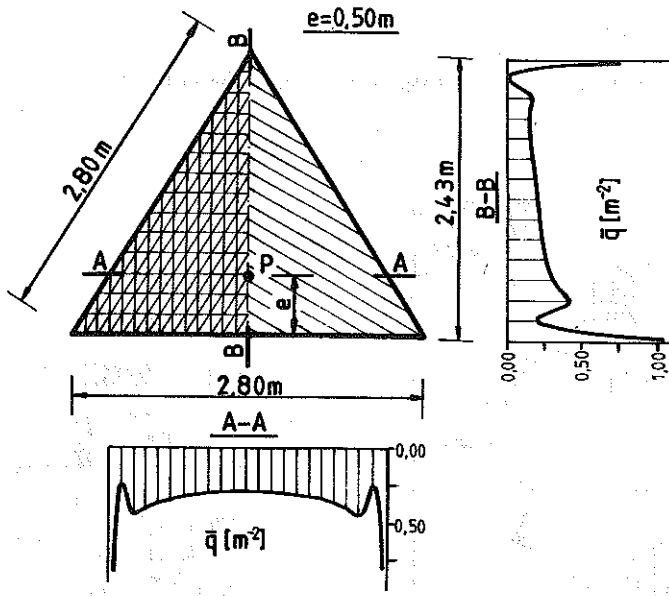
Stempel trójkątny jest obciążony siłą P działającą na osi symetrii. Wymiary stempla i wyniki obliczeń są przedstawione na rysunkach 14, 15, 16 i 17.



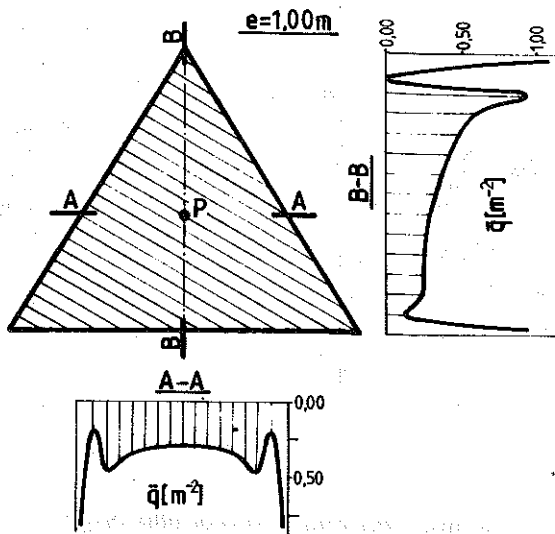
Rys. 14



Rys. 15



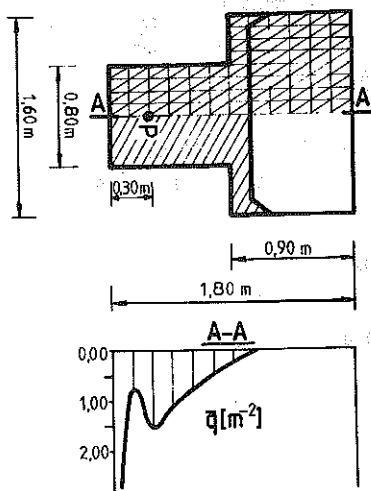
Rys. 16



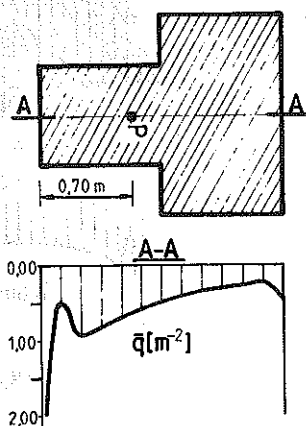
Rys. 17

6.5. Stempel teowy

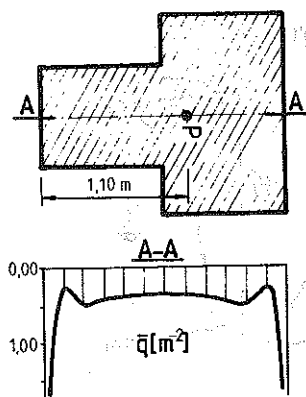
Dla stempla o podstawie teowej wyniki są przedstawione na rysunkach 18, 19, 20 i 21.



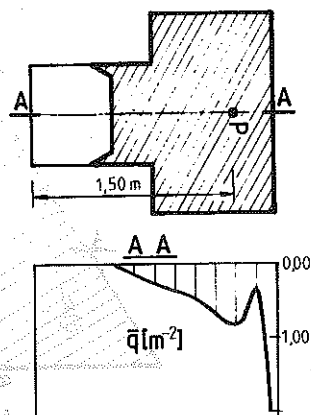
Rys. 18



Rys. 19



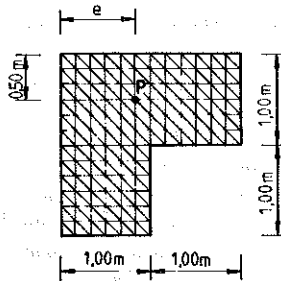
Rys. 20



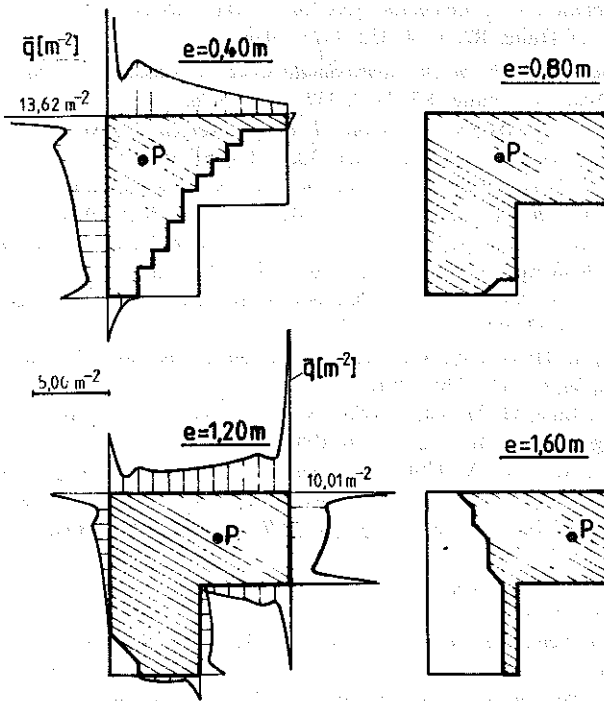
Rys. 21

6.6. Stempel o podstawie kątownika równoramiennego

Wymiary podstawy stempla i podział na elementy powierzchniowe pokazano na rys. 22. Rysunek 23 przedstawia niektóre wyniki dla różnych ustawień siły. Wykresy oporu podłoża dotyczą obwodu podstawy stempla.



Rys. 22



Rys. 23

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, cz. 2, PWN, Warszawa 1954.
2. I. N. SNEDDON, *Metoda transformacji całkowych w mieszanych zagadnieniach brzegowych klasycznej teorii sprężystości*, Ossolineum, Wrocław 1974.
3. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
4. M. SADOWSKY, *Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie*, ZAMM, 8, 2, 1928.
5. Л. А. ГАЛИН, *Контактные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1953.

6. G. M. L. GLADWELL, *Contact problems in the classical theory of elasticity*, Sijthoff and Nordhoff, 1980.
7. Я. С. УФЛЯНД, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, Изд. Наука, Ленинград 1968.
8. В. Л. РВАЧЕВ, В. С. ППОЦЕНКО, *Контактные задачи теории упругости для неклассических областей*, Наукова Думка, Киев 1977
9. T. F. CONRY, A. SEIREG, *A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact*, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **38**, 387-392, June 1971.
10. J. J. KALKER, Y. VAN RANDEN, *A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-Hertzian half-space contact problems*, J. Enging. Math., **6**, 2, 193—206, 1972.
11. T. G. JOHNS, A. W. LEISSA, *The normal contact of arbitrarily shaped multilayered elastic bodies*, In: *The Mechanics of Contact Between Deformable Bodies* (Eds. A. D. DE PATER and J. J. KALKER), University Press, 254—263, Delft 1975.
12. I. PÁCZELT, *Solution of elastic contact problems by the finite element displacement method*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung., **82**, 3—4, 353—375, 1976.
13. I. PÁCZELT, *Some remarks on the approximate solution of frictionless elastic contact problems*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung., **83**, 3—4, 337—355, 1976.
14. P. D. PANAGIOTOPOULOS, *On the unilateral contact problem of structures with a non quadratic strain energy density*, Int. J. Solids Struct., **13**, 253—261, 1977.
15. А. С. КРАВЧУК, *Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования*, ПММ, **42**, 3, 887—892, 1978.
16. А. ВОГОМОЛНИЙ, G. ESKIN, S. ZUCHOWIZKII, *Numerical solution of the stamp problem*, Comp. Methods in Applied Mech. and Enging. **15**, 149—159, 1978.
17. J. HASLINGER, I. HLAVAČEK, *Contact between elastic bodies. I. Continuous problems*, Aplikace Mat., **25**, 5, 324—347, 1980.
18. J. HASLINGER, I. HLAVAČEK, *Contact between elastic bodies. II. Finite element analysis*, Aplikace Mat., **26**, 4, 263—290, 1981.
19. H. BUFLER, H. LIEB, G. MEIER, *Frictionless contact between an elastic stamp and an elastic foundation*, Ingenieur Archiv, **52**, 63—76, 1982.
20. В. Л. РАБИНОВИЧ, А. А. СПЕКТОР, *Решение некоторых классов пространственных контактных задач с неизвестной границей*, Механика Твёрдого Тела, **2**, 93—100, 1985.
21. S. RIECHNIK, *Obliczenie płyt na sprężystym podłożu niewinklerowskim*, Czasop. Techn., **29**, 3, 5—13, 1960.
22. G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Inequalities in mechanics and physics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1976.
23. G. DUVAUT, *Problèmes de contact entre corps solides déformables*, Lecture Notes in Mathematics, 503, 1976.
24. N. KIKUCHI, *A class of rigid punch problems involving forces and moments*, Int. J. Eng. Sci., **17**, 1129—1140, 1979.
25. N. KIKUCHI, *A class of rigid punch problems involving forces and moments by reciprocal variational inequalities*, J. Struct. Mech., **7**, 3, 273—295, 1979.
26. J. T. ODEN, *Exterior penalty methods for contact problems in elasticity*, Proc. 3. U.S. — German Symp. on Finite Element, Bochum 1980.
27. N. KIKUCHI, Y. J. SONG, *Penalty-finite element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity*, Q. Appl. Math., **39**, 1—22, 1981.
28. S. K. CHAN, I. S. TUBA, *A finite element method for contact problems of solid bodies, Part I. Theory and validation*, Int. J. Mech. Sci., **13**, 615—625, 1971.
29. J. KRATOCHVIL, *Solution of contact problems by finite elements method*, Stavebn. Čas., **24**, 5, 1976.
30. Э. В. РЫЖОВ, В. И. САКАЛО, Ю. П. ПОДЛЕСНОВ, *Решение контактных задач релаксационным методом конечных элементов*, Машиноведение, **6**, 64—69, 1980.

31. F. F. MAHMOUD, N. J. SALAMON, W. R. MARKS, *A direct automated procedure for frictionless contact problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., **18**, 245—257, 1982.
32. B. R. TORSTENFELT, *An automatic incrementation technique for contact problems with friction*, Comput. and Struct., **19**, 3, 393—400, 1984.
33. G. CYROK, R. ŚWITKA, *Obliczanie płyt na półprzestrzeni sprężystej metodą elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., **29**, 4, 381—394, 1983.
34. E. С. АРХИПОВА, В. С. ПРОЦЕНКО, В. Л. РВАЧЕВ, *Вдавливание в упругое полупространство плоского круглого в плане наклонного штампа*, Прикл. Мех., **10**, 6, 3—10, 1974.

SUMMARY

PROBLEM OF A FLAT PUNCH CONSIDERED AS A PROBLEM WITH ONE-SIDED CONSTRAINTS

A punch of arbitrary shape and flat base is driven into an elastic halfspace by excentric loads which may produce a gap between the punch and the foundation. Iterational procedure is applied to the problem: using the boundary element method, the problem is treated, in its first stage of solution, as a problem with two-sided constraints. The region underlying the punch is divided into triangular elements with linear shape functions approximating the distribution of reaction forces. To analyze the case of one-sided constraints, an iterational procedure is applied. A suitable computer program is used to derive the solutions corresponding to various shapes of the punch bases: circular, square, triangular, angular, and T-shaped sections.

Резюме

ЗАДАЧА ШТАМПА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ
С ОДНОСТРОННЫМИ СВЯЗЯМИ

В работе рассматривается задача штампа с произвольной формой плоского основания, вдавливаемого в упругое полупространство нагружением, которого эксцентрическое действие может вызывать отрыв части области основы штампа от упругого основания. Принят итерационный метод решения. С этой целью решается сначала задача штампа с двухсторонними связями, используя метод граничных элементов. Область основы штампа разделяется на треугольные поверхностные элементы с линейными функциями формы, аппроксимирующими функцию реакции основания. Для задачи с односторонними связями разработан алгоритм итерационного поступания. При помощи реализованной вычислительной программы проведены расчеты многих примеров (штампы с круговой, квадратной, треугольной, тавровой и угловой основами).

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, ZIELONA GÓRA
POLITECHNIKA POZNAŃSKA, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1986 r.