

STRUKTURY UKŁADÓW LINII
NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ W OBSZARACH GRANICZNYCH,
SPEŁNIAJĄCYCH WARUNEK HUBERA-MISESA
CZEŚĆ I.
STRUKTURALNE WARUNKI ISTNIENIA PÓL ELEMENTARNYCH
ZADANIA BEZ OGRANICZEŃ GEOMETRYCZNYCH

WITOLD BODASZEWSKI (KIELCE)

Podano ogólne wzory na wyznaczanie parametrów statycznie dopuszczalnej linii nieciągłości naprężeń \mathcal{L} , która rozdziela obszary jednorodnych i granicznych stanów płaskich, spełniających warunek Hubera-Misesa. Sformułowano warunki istnienia rozwiązań linii \mathcal{L} oraz przedstawiono określony nimi, wygodny w zastosowaniach obraz obszaru dopuszczalnego Λ . Otrzymane wzory wykorzystano w algorytmie poszukiwania struktur pól elementarnych o najmniejszej liczbie linii \mathcal{L} , zależnej od warunków brzegowych, dla których to struktur rozwiązania pól istnieją. Rozważano zadania bez ograniczeń geometrycznych. Szczegółowo przedstawiono rozwiązania pól elementarnych, zawierających cztery obszary jednorodne. Stanowią one osobną klasę dotychczas nie analizowaną. Rezultatem dodatkowym jest prosta konstrukcja wykresu, która pozwala, bez żadnych dodatkowych obliczeń, znajdować parametry linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$ rozdzielającej obszary, w których dowolnie narzucono wartości parametrów naprężeń $\omega^{(n)}$, $\omega^{(n+1)}$. Wykres jest również przydatny w jakościowych i ilościowych analizach struktur bardziej złożonych.

WYKAZ OZNACZEŃ

- \mathcal{L} Linia nieciągłości naprężeń,
 y^i współrzędne punktu w ortonormalnym układzie globalnym ($i = 1, 2$),
 x^i współrzędne w układzie lokalnym, związanym z kierunkami naprężeń głównych ($i = 1, 2$),
baza $\{i_1, i_2\}$,
 ω parametr naprężeń,
 Ω iloczyn kartezjański: $\Omega \equiv \{(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}): \omega^{(n)} \in [0, \pi], \omega^{(n+1)} \in [0, \pi]\}$,
 σ_{ij} współrzędne tensora naprężenia ($i, j = 1, 2$),
 σ_i naprężenia główne ($i = 1, 2$),
 \mathbf{p} wektor naprężenia,
 σ_{pl} granica plastyczności materiału,
 $k = \frac{\sigma_{pl}}{\sqrt{3}}$,
 \mathbf{e} wektor jednostkowy normalny do \mathcal{L} ,

- γ parametr kąta pomiędzy x^1 i normalną do \mathcal{L} ,
 φ parametr kąta pomiędzy osią x^1 układu lokalnego w obszarze poprzednim a kierunkiem większego naprężenia głównego w obszarze następnym,
 Q parametr rodziny linii \mathcal{L} ($Q = I, II$),
 q parametr podrodziny linii \mathcal{L} ($q = 1, 2, 3, 4$),
 l liczba obszarów stanu jednorodnego w polu elementarnym,
 T macierz transformacji współrzędnych T_{ij} , $i, j = 1, 2$,
 P obraz linii \mathcal{L} w Ω ,
 S ciąg parametrów linii \mathcal{L} określony na Ω ,
 F ciąg parametrów linii \mathcal{L} określony na Y ,
 A obszar dopuszczalny obrazów P określony na Ω ,
 Γ przedział dopuszczalny parametrów ω ; $\Gamma \subset \dot{F} \equiv \{\omega : \omega \in [0, \pi]\}$,
 c ustalony parametr naprężeń.

OZNACZENIA SPECJALNE

- n bieżący wskaźnik (numer) obszaru jednorodnego stanu naprężenia „ n ”,
 Wielkości związane z obszarem „ n ”:

$$\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_b^{(n)}, p_b^{(n)}, \omega, \varphi, \gamma, x, X, c, c_{gr}, Q, q, e_i, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2$$

(w numeracji obszarów jednorodnych używa się także wskaźnika m).

Wielkości związane z dwoma sąsiednimi obszarami „ n ” i „ $(n+1)$ ”:

$$\mathcal{L}^{n,n+1}, P^{n,n+1}, S^{n,n+1}, F^{n,n+1}$$

Podobszary i przedziały dopuszczalne związane z liniami $\mathcal{L}^{n,n+1}$:

- $A_m^{n,n+1}$ podobszar dopuszczalny obrazów $P(\omega, \omega) \in A \subset \Omega$, które odwzorowują w Ω dopuszczalną linię $\mathcal{L}^{n,n+1}$ określoną w Y ; podobszar ten jest zmienny, zależny od $\omega^{(m)}$ w obszarze „ m ”;
 $\Gamma_m^{(n)}$ dopuszczalny przedział zmienności $\omega^{(n)}$, zależny od $\omega^{(m)}$ w obszarze „ m ”;
 \wedge nad symbolem — wielkość, której jednoznaczne określenie wartości wymaga podania warunków dodatkowych.

1. WPROWADZENIE

Podczas szacowania wartości obciążeń granicznych lub parametrów kształtu i wymiarów konstrukcji za pomocą nieciągłych pól statycznie dopuszczalnych (NPSD) mamy do rozwiązania zadanie, w którym m. in. nie jest określona nawet liczba równań. Ustala ją dopiero założenie struktury siatki linii nieciągłości naprężeń, która — jeśli przyjąć ją dowolnie — prowadzi na ogół do stwierdzenia, że w jej ramach rozwiązanie pola granicznego nie istnieje. Istnieje ono tylko dla struktur szczególnych, jednak ich efektywne wyznaczenie wciąż jeszcze natrafia na znaczne trudności i udaje się tylko w bardzo prostych przypadkach układów linii i prostych warunkach brzegowych.

Mimo to, od czasu sformułowania idei wykorzystania NPSD w zagadnieniach kształtowania przez W. SZCZEPIŃSKIEGO [1], ukazała się spora grupa prac, zebranych ostatnio w dwóch monografiach [2 i 3], przedstawiających różnorodne rozwiązania pól statycznie dopuszczalnych o dość złożonych strukturach i spełniających rozmaite warunki brzegowe. Otrzymano je metodami pólodwrotnymi.

Kwestie doboru struktur, w ramach których rozwiązania istnieją, nie były głębiej rozważane, jakkolwiek tego potrzebę — z różnych pozycji — wykazano już w pracach [4 i 5]. Warto podkreślić, że w rozwiązanych dotąd polach granicznych (poza może niektórymi własnościami, na przykład spotykaną często lokalną symetrią) nie udaje się stwierdzić prawie żadnej regularności, lub wydobyć z nich cech, które by pozwalały efektywnie i metodycznie te struktury znajdować. Brak również metod korygowania struktur, dla których stwierdzono, że w ich ramach, rozwiązanie pola statycznie dopuszczalnego i granicznego nie istnieje.

W związku z tym uznano za celowe powrót do podstaw rozwiązywania układów linii nieciągłości naprężeń, dokładniejsze ich przeanalizowanie i szukanie także sposobów określania struktur, dla których rozwiązania pól granicznych istnieją.

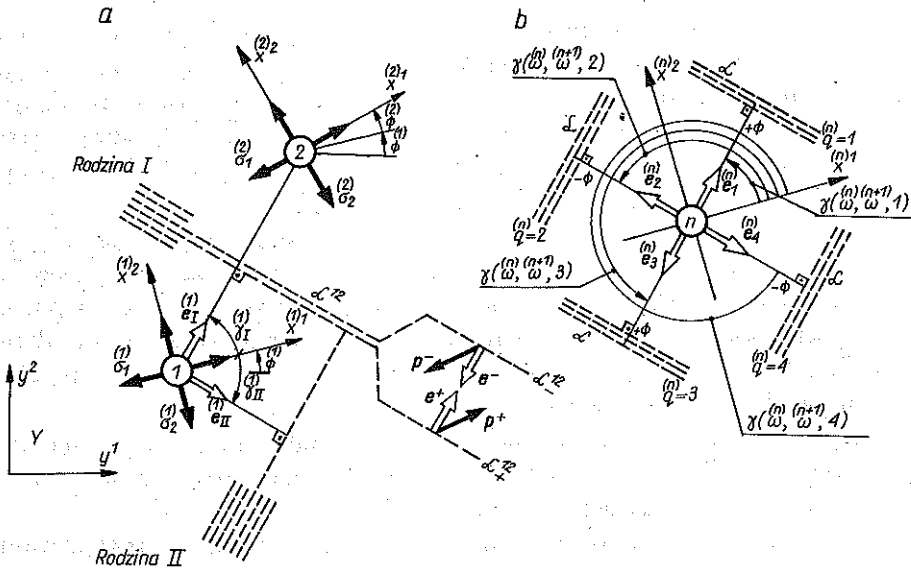
Dlatego nawiązujemy najpierw do rozwiązań pól elementarnych, które w NPSD odgrywają nieco podobną rolę jak superelementy w metodzie elementów skończonych (MES): są składowymi pól bardziej złożonych i układają się w pośrednim poziomie agregacji elementów. Sposób formułowania zadań jest jednak w obu metodach zupełnie odmienny. Między innymi w NPSD nie znany jest również podział na elementy (struktura), nawet więcej — rozwiązania istnieją tylko dla podziałów (struktur) szczególnych zależnych od warunków brzegowych, w tym także od wartości danych na brzegach parametrów.

W pracy pokażemy, że wszystkie pola elementarne dają się dość prosto wygenerować z odpowiednio skonstruowanego obszaru stanów dopuszczalnych, który w przypadku braku ograniczeń na parametry przestrzeni fizycznej pozwala bez żadnych rachunków rozstrzygać, czy w ramach konkretnej struktury linii nieciągłości naprężeń, rozwiązanie pola granicznego istnieje, czy nie istnieje. W przypadku gdy takie ograniczenia występują, zadanie staje się znacznie trudniejsze, tym niemniej przytoczymy przykłady pokazujące, że i wówczas możliwe jest podanie wielu wniosków dotyczących struktur linii nieciągłości pola naprężeń.

Będziemy rozważali tylko płaskie pola naprężeń, spełniające warunek plastyczności Hubera-Misesa.

2. STATYCZNIE DOPUSZCZALNA LINIA NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ

Rozważamy nieciągłe, płaskie pole naprężeń, złożone z dwóch obszarów 1 i 2 (rys. 1a), gdzie panują stany jednorodnie opisane współrzędnymi $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$



Rys. 1

$(1) \neq (2)$. Obszary te rozdziela prosta \mathcal{L}^{12} , która jest linią nieciągłości naprężeń.

Współrzędne $\sigma_{ij}^{(n)}$ ($n=1,2$) oraz prosta \mathcal{L}^{12} są określone w układzie ortogonalnym y^1, y^2 związanym z płaszczyzną Y . Zakładamy, że w żadnym z obszarów nie jest przekroczony warunek uplastycznienia.

Aby linia \mathcal{L}^{12} była statycznie dopuszczalną żądamy spełnienia warunku równości oddziaływań:

$$\mathbf{p}^+ = -\mathbf{p}^-$$

który z uwagi na związki $p_j^+ = \sigma_{ij}^{(1)} e_i^+$, $p_j^- = \sigma_{ij}^{(2)} e_i^-$ ($\text{mod } \mathbf{e}^+ = \text{mod } \mathbf{e}^- = \text{mod } \mathbf{e} = 1$) prowadzi do jednorodnego układu równań:

$$(2.1) \quad (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}) e_i = 0$$

z niewiadomymi współzrzednymi e_i wektora jednostkowego \mathbf{e} , normalnego do \mathcal{L}^{12} . Przyrównując do zera wyznacznik

$$(2.2) \quad \det |\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}| = 0$$

i rozwiązując przy tym warunku układ (2.1) z dołączonym równaniem $\text{mod } \mathbf{e} = 1$, otrzymuje się dwie zależności:

$$(2.3) \quad e_i = \sqrt{\frac{\overset{(1)}{\sigma_{jj}} - \overset{(2)}{\sigma_{jj}}}{\overset{(1)}{\sigma_{\alpha\alpha}} - \overset{(2)}{\sigma_{\alpha\alpha}}}} \quad (i, j, \alpha = 1, 2; i \neq j; j \text{ nie sumować}).$$

Jeśli e_i są określone i rzeczywiste, a ponadto stany naprężenia w obszarach 1 i 2 spełniają warunek (2.2), to linia nieciągłości \mathcal{L}^{12} istnieje i jest statycznie dopuszczalna.

3. WARUNKI ISTNIENIA STATYCZNIE DOPUSZCZALNYCH I GRANICZNYCH LINII NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ

3.1. Parametry granicznej linii nieciągłości naprężeń

Zakładamy teraz, że pola naprężeń w obszarach 1 i 2 spełniają warunek H-M, który przedstawiamy w postaci sparametryzowanej:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \overset{(m)}{\sigma}_{11} &= k(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi), \\ \overset{(m)}{\sigma}_{22} &= k(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\varphi), \quad m = 1, 2, \\ \overset{(m)}{\sigma}_{12} &= k \sin \omega \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Przyjmujemy ponadto lokalny układ współrzędnych $\{x^1, x^2\}$ zgodny z kierunkami naprężeń głównych w obszarze 1 (rys. 1a), którego oś x^1 posiada kierunek $\overset{(1)}{\sigma}_1 > \overset{(1)}{\sigma}_2$. Wyznaczając $\overset{(1)}{\sigma}_{ij}$ w tym układzie, należy w (3.1) podstawić $\varphi = 0$. Operowanie w układzie $\{x^1, x^2\}$ które obecnie zakładamy, nie zmniejszy ogólności otrzymywanych dalej wyników. Pozwoli natomiast używać bardzo wygodne formuły rekurencyjne.

Podstawiając (3.1) do (2.2) otrzymamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \overset{(2)}{\hat{\varphi}} &\equiv \hat{\varphi}(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}) = \\ &= \frac{1}{2} \arccos \left[-\frac{2 \cos^2 \overset{(1)}{\omega} - 3 \cos \overset{(1)}{\omega} \cos \overset{(2)}{\omega} + 2 \cos^2 \overset{(2)}{\omega} - 1}{\sin \overset{(1)}{\omega} \sin \overset{(2)}{\omega}} \right]. \end{aligned}$$

Daszek nad φ oznacza, że jest to parametr określony niejednoznacznie. Przyjęty sposób ustanowienia jednoznaczności przedstawimy dalej, w powiązaniu z innymi parametrami pola, które będziemy definiowali. Obecnie założymy tylko, że $\hat{\varphi}(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}) \in [0, \pi/2]$.

Podstawiając następnie (3.1) do (2.3) otrzymamy wzory na współrzędne wektora \mathbf{e} normalnego do linii \mathcal{L}^{12} , która teraz będzie nie tylko statycznie dopuszczalną, ale także graniczną, rozdzielającą obszary, w których panują graniczne stany naprężenia. Otrzymamy

$$(3.3) \quad \hat{\mathbf{e}}^{(1) (2)}(\omega, \omega) = \pm \cos[\hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega)] \mathbf{i}_1 \pm \sin[\hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega)] \mathbf{i}_2,$$

gdzie

$$\hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega) = \frac{1}{2} \arccos \left[-\frac{\cos \omega - 2 \cos^2 \omega}{\sqrt{3 \sin \omega}} \right].$$

Z przyczyn podobnych do przypadku $\phi^{(1) (2)}(\omega, \omega)$ założymy $\hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega) \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ i odpowiednio do (3.3)₁ wyróżnimy dwie rodziny $\hat{Q} = \text{I, II}$ linii nieciągłości \mathcal{L}^{12} (rys. 1a):

$${}^{(1)}_i e_i^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{Q}) = C_{(1)}, \quad i = 1, 2,$$

dla których można skonstruować następujące wzory na obliczanie parametrów $\gamma^{(1)}$ i $\varphi^{(2)}$, poprawne w układzie $\{x^1, x^2\}$:

$$\gamma^{(1)} \equiv \gamma^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{Q}) = (-1)^{\hat{Q}+1} \hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega) \quad \left(\gamma^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{Q}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right),$$

$$(3.4) \quad \varphi^{(2)} \equiv \varphi^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{Q}) = (-1)^{\hat{Q}+1} \text{sign}(\omega - \hat{\omega}) \phi^{(1) (2)}(\omega, \omega) \quad \left(\varphi^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{Q}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right),$$

$$\mathbf{e}^{(1)} \equiv \mathbf{e}^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{Q}) = \cos[\hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega)] \mathbf{i}_1 + (-1)^{\hat{Q}+1} \sin[\hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega)] \mathbf{i}_2.$$

Podczas rozwiązywania pól zawierających kilka linii \mathcal{L} , nie związanych z konkretnymi wartościami $C_{(1)} (n = 1, 2, \dots)$, dogodnie jest wyróżniać pośród rodzin \hat{Q} — podrodziny \hat{q} i wiązać je ze wszystkimi czterema wektorami $\mathbf{e}^{(n)}$, jakie wynikają z (3.3)₁. Pozwoli to na jakościowe określenie położenia linii \mathcal{L} względem obszaru jednorodnego stanu naprężenia. W pracy rodzinie $\hat{Q} = \text{I}$ przyporządkujemy podrodziny $\hat{q} = 1, \hat{q} = 3$ (rys. 1b), natomiast rodzinie $\hat{Q} = \text{II}$ — podrodziny $\hat{q} = 2$ i $\hat{q} = 4$.

Analogicznie do wzorów (3.4), dla podrodzin $\hat{q} = 1, 2, 3, 4$ można posługiwać się następującymi zależnościami:

$$\gamma^{(1)} \equiv \gamma^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{q}) = (\hat{q} - 1) \left(\frac{\hat{q}^2}{3} - \frac{13}{6} \hat{q} + 4 \right) \pi + (-1)^{\hat{q}+1} \hat{\gamma}^{(1) (2)}(\omega, \omega),$$

$$(3.5) \quad \varphi^{(2)} \equiv \varphi^{(1) (2)}(\omega, \omega, \hat{q}) = \text{sign}(\omega - \hat{\omega}) \text{sign}(\text{tg } \gamma^{(1)}) \phi^{(1) (2)}(\omega, \omega),$$

$$(3.5) \quad \underset{[cd.]}{\mathbf{e}}^{(1)} \equiv \mathbf{e}(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}, \overset{(1)}{q}) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2q^{(1)} - 1}{4} \pi\right) \cos[\hat{\gamma}(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega})] \mathbf{i}_1 + \\ + \sqrt{2} \sin\left(\frac{2q^{(1)} - 1}{4} \pi\right) \sin[\hat{\gamma}(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega})] \mathbf{i}_2.$$

Przedziały zmienności parametrów φ, γ w przypadku podrodzin $q^{(1)} = 1, 2, 3, 4$ są następujące: $\gamma(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}, \overset{(1)}{q}) \in [0, 2\pi]$, $\varphi(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}, \overset{(1)}{q}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.2. Warunki istnienia linii \mathcal{L} . Obszar dopuszczalny

Żądanie, aby współrzędne e_i wyznaczone z (2.3) i (3.1) były określone i rzeczywiste, to znaczy, aby istniała rzeczywista linia \mathcal{L}^{12} , prowadzi do następującego układu nierówności:

$$(3.6) \quad \cos^2 \overset{(1)}{\omega} - \cos \overset{(1)}{\omega} \cos \overset{(2)}{\omega} + \cos^2 \overset{(2)}{\omega} - \frac{3}{4} \leq 0, \\ \overset{(1)}{\omega} \neq \overset{(2)}{\omega}, \quad \sin \overset{(1)}{\omega} \neq 0, \quad \sin \overset{(2)}{\omega} \neq 0.$$

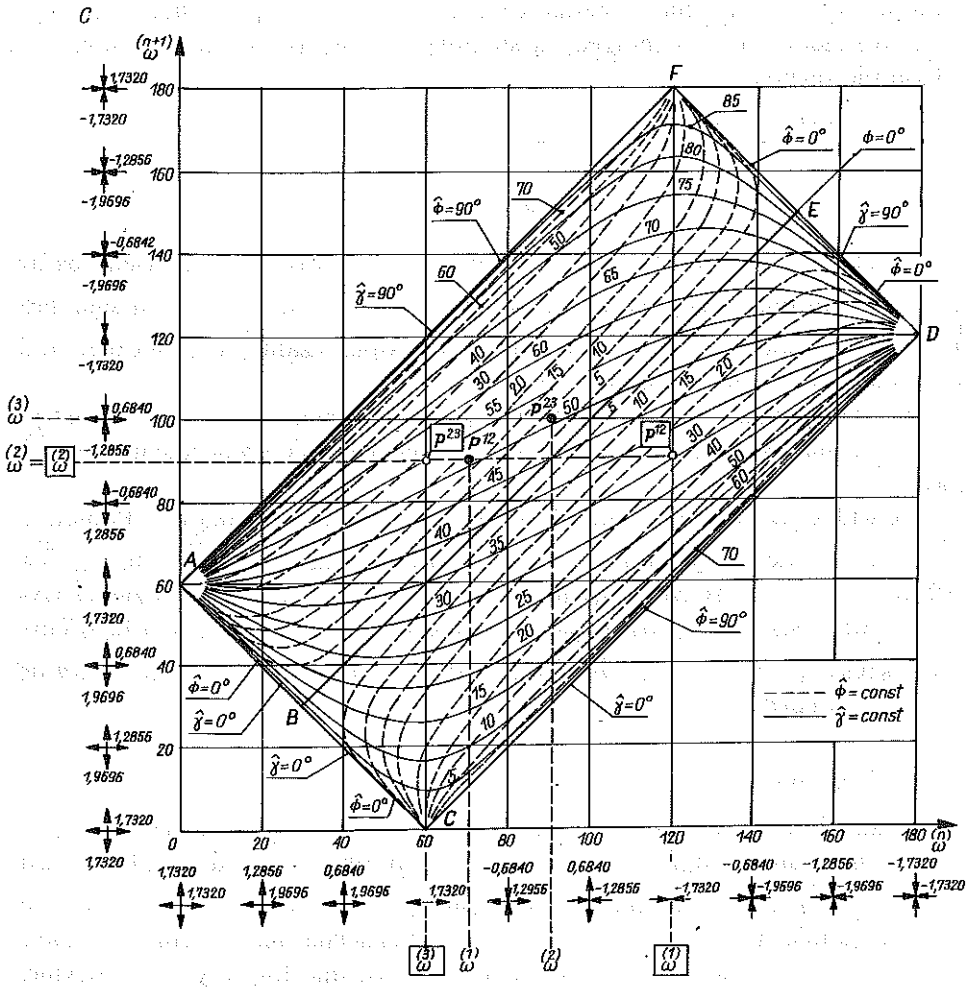
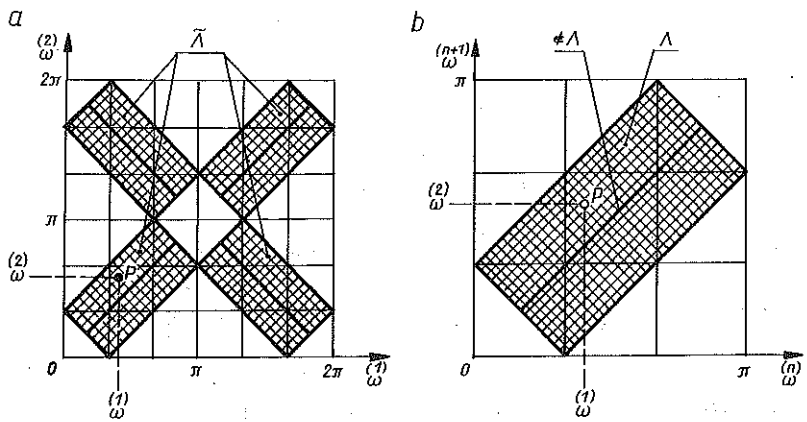
W produkcie $\tilde{\Omega} = \{(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}) : \overset{(1)}{\omega} \in [0, 2\pi], \overset{(2)}{\omega} \in [0, 2\pi]\}$ tworzą one pewien obszar $\tilde{\Lambda}$ (rys. 2a), którego każdy punkt wewnętrzny $P(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega})$ lub leżący na brzegu (bez $\overset{(1)}{\omega} = \overset{(2)}{\omega}$) odpowiada rzeczywistej, statycznie dopuszczalnej i granicznej linii \mathcal{L}^{12} , a ściślej dwom rodzinom tych linii.

Pokazany obraz $\tilde{\Lambda}$ nie jest jednym możliwym przedstawieniem geometrycznym warunków (3.6), jednakże w tej pracy będziemy się wyłącznie nim posługiwali.

Jak widać na rys. 2a, obszar $\tilde{\Lambda}$ składa się z ośmiu prostokątów. Ponieważ jednak wszystkie stany naprężeń można odwzorować biorąc $\overset{(1)}{\omega} \in [0, \pi]$, $\overset{(2)}{\omega} \in [0, \pi]$ (dopuszczamy zamianę indeksów naprężeń głównych), będziemy wykorzystywali tylko dwa prostokąty Λ pokazane na rys. 2b. Obszar Λ będziemy więc określali, na $\Omega = \{(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}) : \overset{(1)}{\omega} \in \hat{I} \equiv [0, \pi], \overset{(2)}{\omega} \in \hat{I}\}$. Uprości to znacznie późniejsze analizy.

3.3. Uogólnienia

Podane dotąd wzory zostały wyprowadzone dla dwóch kolejnych obszarów jednorodnego stanu naprężenia 1 i 2, przy czym lokalny układ współrzędnych $\{x^1, x^2\}$ wiązano z kierunkami głównymi naprężeń w obszarze 1. Chcąc te wzory uogólnić na przypadki linii $\mathcal{L}^{n, n+1}$ rozdzielających sąsiednie obszary „ n ” i „ $n+1$ ”, by w ten sposób otrzymać odpowiednie formuły rekurencyjne, wystarczy w miejsce 1 podstawić „ n ”, a w miejsce 2 — „ $n+1$ ” oraz wiązać kolejne, lokalne układy współrzędnych $\{x^i\}$ ($i = 1, 2$) z kierunkami głównymi



Rys. 2

naprężeń w obszarze „ n ” (x^1 ma kierunek $\sigma_1^{(n)} > \sigma_2^{(n)}$ (rys. 3)). Aby nie powtarzać podanych już wzorów z tą niewielką tylko zmianą, ich przytaczanie pomijamy.

Pomiędzy współrzędnymi sąsiednich układów lokalnych zachodzi oczywiście zależność

$$(3.7) \quad \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{T}^{(n+1)}(\varphi), \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{R}^{(n)}$$

gdzie $\mathbf{x}^{(n)} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\}$, \mathbf{T} oznacza macierz kosinusów kierunkowych (T_{ij} , $i, j = 1, 2$), $\mathbf{R}^{(n)}$ obiekt przesunięcia równoległego, $\varphi \equiv \varphi(\omega, \omega, Q)^{(n+1)}$ (wzór (3.4)₂) oraz $\gamma \equiv \gamma(\omega, \omega, Q)^{(n)}$ ((3.4)₁) parametry pola i linii $\mathcal{L}^{n, n+1}$. Gdy rozważamy podrodziny, w miejsce $Q^{(n)}$ podstawiamy $q^{(n)}$ i posługujemy się wzorami rekurencyjnymi zbudowanymi na podstawie (3.5).

Obszar dopuszczalny A oraz przestrzeń Ω nie zależą od wskaźnika n .

4. ODWZOROWANIA PARAMETRÓW LINII $\mathcal{L}^{n, n+1}$ NA PRZESTRZEŃ Ω ORAZ KWESTIA ODWZOROWAŃ ODWROTNYCH

Obszar A wyznacza dopuszczalne pole zmienności punktów $P^{(n)}(\omega, \omega)^{(n+1)} \equiv P^{n, n+1}$, które są obrazami linii $\mathcal{L}^{n, n+1}$ w przestrzeni Ω . Tym niemniej warunek

$$(4.1) \quad P^{n, n+1} \in A$$

jest tylko warunkiem koniecznym istnienia dopuszczalnej i granicznej linii $\mathcal{L}^{n, n+1}$ w przestrzeni fizycznej Y . Wiąże się to z niejednoznacznością odwzorowania elementów przestrzeni Ω na przestrzeń Y . Jeśli dany jest obraz $P^{n, n+1}$, to za pomocą wzorów typu (3.2) i (3.3)₂ można wyznaczyć $\phi^{(n)}(\omega, \omega)^{(n+1)}$, $\gamma^{(n)}(\omega, \omega)^{(n+1)}$, a następnie utworzyć ciąg

$$(4.2) \quad S^{n, n+1} \equiv \{\omega, \omega, \phi^{(n)}(\omega, \omega)^{(n+1)}, \gamma^{(n)}(\omega, \omega)^{(n+1)}\},$$

który odpowiada dwom rodzinom $Q^{(n)}$ linii $\mathcal{L}^{n, n+1}$ (lub czterem podrodzinom $q^{(n)}$). Parametry rodzin $Q \notin \Omega$, a więc są niezależne od parametrów naprężeń ω w dowolnym obszarze „ m ”. Uzupełniając zatem $S^{n, n+1}$ parametrami $Q^{(n)}$

(lub q) oraz zakładając, że linia $\mathcal{L}^{n,n+1}$ jest określona, gdy określona jest rodzina, otrzymujemy równoważności

$$(4.3) \quad S^{n,n+1} + \{Q\} \leftrightarrow F^{n,n+1} \equiv \\ \equiv \{ \overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, \varphi(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, Q), \gamma(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, Q) \} \leftrightarrow \bar{F} \equiv \{ \overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, Q \}.$$

gdzie przez $\bar{F}^{n,n+1}$ oznaczono bazy, nieredukowalny zbiór parametrów linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$. Analogicznie dla podrodzin q ; ostatecznie

$$\bar{F} \leftrightarrow F \rightarrow S \leftrightarrow P \quad \text{oraz} \quad S + \{Q\} \leftrightarrow F.$$

Ciąg elementów zbioru $S^{n,n+1}$ (określony w Ω) mimo że nie można go jednoznacznie odwzorować na parametry linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$ (określona jest w Y), jest dość wygodny w zastosowaniach praktycznych szczególnie gdy w obszarze dopuszczalnym A naniesiemy jeszcze linie stałych parametrów $\hat{\phi}(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}) = \text{const}$, $\hat{\gamma}(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}) = \text{const}$ (rys. 2c). Wykorzystanie tej konstrukcji pokazemy na przykładach. Obecnie zwracamy tylko uwagę na osobliwości parametrów $\hat{\phi}$ i $\hat{\gamma}$, które są na rysunku dobrze widoczne.

5. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ I ANALIZ

5.1. Przykłady wykorzystania obrazów $P^{n,n+1}$

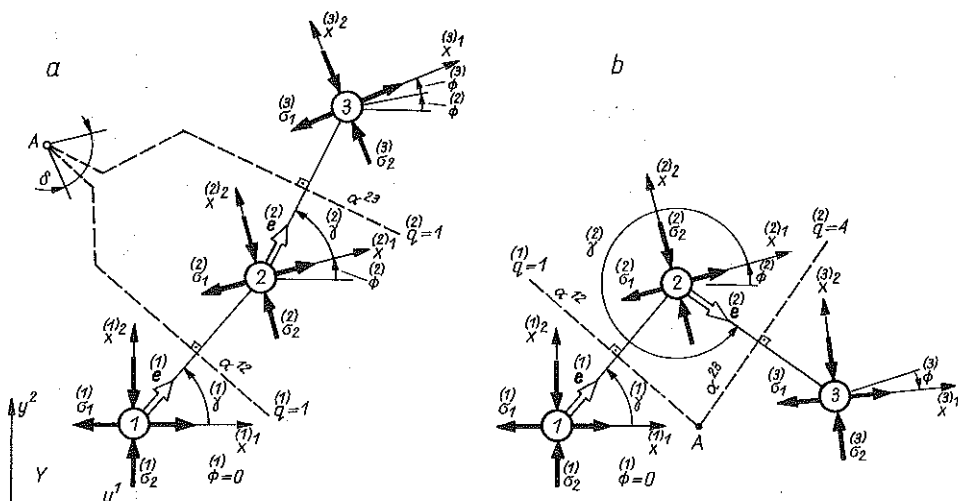
PRZYKŁAD 1. Przyjmujemy, że w trzech kolejnych obszarach stanów jednorodnych (rys. 3a)

$$\overset{(1)}{\omega} = 70^\circ, \quad \overset{(2)}{\omega} = 90^\circ, \quad \overset{(3)}{\omega} = 100^\circ.$$

Za pomocą konstrukcji obszaru dopuszczalnego A z rys. 2c wyznaczmy parametry linii nieciągłości naprężeń \mathcal{L}^{12} , \mathcal{L}^{23} , które te obszary rozdzielają.

Stwierdzamy (rys. 2c), że $P(70, 90) \in A$, $P(90, 100) \in A$, to znaczy, iż są spełnione warunki konieczne (4.1) istnienia obu linii. Punkty P^{12} , P^{23} tworzą „mapę” linii \mathcal{L}^{12} i \mathcal{L}^{23} w przestrzeni Ω , a każdy z nich odpowiada dwom rodzinom lub czterem podrodzinom linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$ ($n = 1, 2$) w płaszczyźnie fizycznej Y .

Z rys. 2c możemy odczytać przybliżone wartości $\hat{\gamma}(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega})$, $\hat{\phi}(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega})$, $\hat{\gamma}(\overset{(2)}{\omega}, \overset{(3)}{\omega})$, $\hat{\phi}(\overset{(2)}{\omega}, \overset{(3)}{\omega})$; wynoszą one odpowiednio: 52° , 18° , 51° , 8° . Otrzymujemy zatem [(4.2)]



Rys. 3

$$S^{12} = \{70, 90, 18, 52\}, \quad S^{23} = \{90, 100, 8, 51\}.$$

Zbiory S^{12} i S^{23} należy jeszcze uzupełnić parametrami rodzin $\bar{Q}^{(n)}$ ($\bar{n} = 1, 2$) lub podrodzin $\bar{q}^{(n)}$. Załóżmy tutaj np. $\bar{q}^{(1)} = 1, \bar{q}^{(2)} = 1$. Ze wzorów typu (3.5)₁ otrzymujemy więc $\gamma^{(1)} = \gamma(70, 90, 1) = 52^\circ, \gamma^{(2)} = \gamma(90, 100, 1) = 51^\circ$. Z kolei z zależności (3.5)₂ dostaniemy $\varphi^{(2)} = \varphi(70, 90, 1) = 18^\circ, \varphi^{(3)} = \varphi(90, 100, 1) = 8^\circ$. Ostatecznie (4.3)]

$$F^{12} = \{70, 90, 18, 52\}, \quad F^{23} = \{90, 100, 8, 51\}.$$

Wyznaczone w ten sposób pole pokazano na rys. 3a. Założono tu $\varphi^{(1)} = 0$.

Widzimy, że rozwiązanie liczbowe zostało tutaj otrzymane prawie bez żadnych rachunków. W klasycznych metodach wyznaczenie pól spełniających warunek H—M rachunki te są bardzo żmudne. Dla porządku dodamy, że wartości parametrów rozważanego pola wyznaczone numerycznie za pomocą podanych uprzednio wzorów są następujące:

dla $n = 1$ ($\omega = 70^\circ$): $\sigma_1^{(1)} = 1,532 k, \sigma_2^{(1)} = -0,348 k, \left(k = \frac{\sigma_{pl}}{\sqrt{3}}\right), \gamma^{(1)} = 51,06^\circ$

$$(\bar{q}^{(1)} = 1), \varphi = 0 \text{ (z założenia);}$$

dla $n = 2$ ($\omega = 90^\circ$): $\sigma_1^{(2)} = k, \sigma_2^{(2)} = -k, \varphi^{(2)} = 17,69^\circ, \gamma^{(2)} = 50,78^\circ, (\bar{q}^{(2)} = 1);$

dla $n = 3$ ($\omega = 100^\circ$): $\sigma_1^{(3)} = 0,684 k, \sigma_2^{(3)} = -1,286 k, \varphi = 8,7^\circ;$

wartości $\gamma^{(3)}$ nie oblicza się, ponieważ nie określono $\omega^{(4)}$.

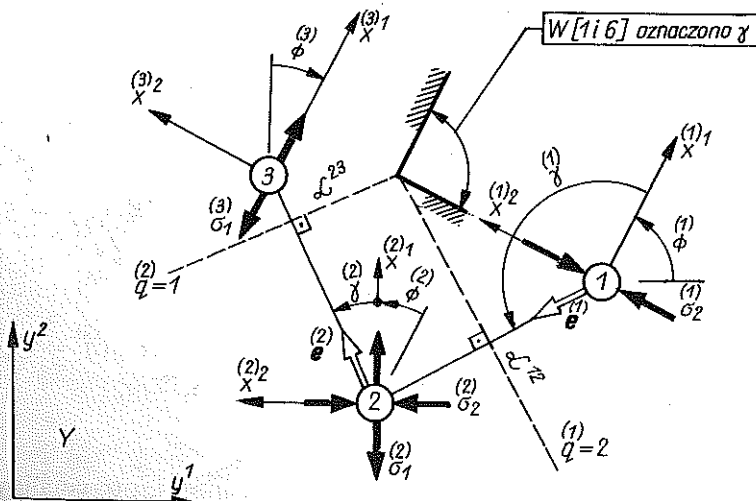
Przyjmując w uzyskanym rozwiązaniu np. $\bar{q}^{(1)} = 1, \bar{q}^{(2)} = 4$, otrzymalibyśmy pole pokazane na rys. 3b. Zbiór F^{23} przyjmuje dla niego postać $F^{23} = \{90, 100; -8,7; 309, 21\}$ (wartości obliczone). Zwróćmy uwagę na multiplikatywne po-

większenie się liczby rozwiązań, towarzyszące wzrostowi liczby obszarów stanów jednorodnych. W przypadku trzech obszarów, jaki był rozważany, otrzymujemy cztery rozwiązania dla obszarów 2 ($q, \bar{q} = 1, 2, 3, 4$) i odpowiednio szesnaście rozwiązań dla obszarów 3. Są to oczywiście rozwiązania związane z podrodzinami, które w ramach tych samych rodzin różnią się usytuowaniem w płaszczyźnie fizycznej Y . W przypadku operowania rodzinami i ustalonym punktem węzłowym linii \mathcal{L} — efekt ten będzie mniejszy tym niemniej również wystąpi. Jest to jedna z istotnych trudności, jakie w zdaniach dotyczących pól elementarnych występują.

Dokładność odczytanych wartości parametrów $\hat{\gamma}$ i $\hat{\phi}$ jest różna i zależy od $P^{(n), (n+1)}$. Wartości podane w przykładzie różnią się od ścisłych mniej niż o 1° .

Dla punktów $P^{n, n+1}$, które wypadają w pobliżu naroży obszaru A (punkty osobliwe), dokładność odczytu będzie mniejsza. Wadę tę kompensuje jednak wielka sprawność otrzymywania rezultatów liczbowych, która pozwala szybko analizować rozwiązania w tym także ich zależności od parametrów strukturalnych.

PRZYKŁAD 2. Zadanie rozwiązane w przykładzie poprzednim dotyczyło dowolnego pola elementarnego, zawierającego trzy obszary jednorodnych stanów naprężenia. Aby przybliżyć proponowany w pracy sposób opisu i analiz tego typu zadań, rozważmy jeszcze pewien przypadek szczególny, podany w [1] i oznaczony w [5] jako pole elementarne typu B . W skrajnych obszarach 1 i 3 tego pola (rys. 4) mamy $\sigma_1^{(3)} = \sigma_{pl} = \sqrt{3}k$, $\sigma_2^{(3)} = 0$, $\sigma_1^{(1)} = 0$, $\sigma_2^{(1)} = -\sigma_{pl} = -\sqrt{3}k$. Podane wartości naprężeń głównych odpowiadają parametrom $\omega = 60^\circ$, $\bar{\omega} = 120^\circ$.



Rys. 4

Typowe zadanie formułowane dla pola B polega na wyznaczeniu $\bar{\omega}^{(2)}$ w obszarze pośrednim 2 oraz parametrów geometrycznych linii \mathcal{L}^{12} , \mathcal{L}^{23} , gdy dane są $\bar{\omega}^{(1)}$, $\bar{\omega}^{(3)}$ i kąt pomiędzy kierunkami $\sigma_1^{(3)}$, $\sigma_2^{(1)}$ oznaczany w [1] przez γ . Za pomocą wzorów przedstawionych w punktach poprzednich możemy, oczywiście, zadanie takie rozwiązać; obecnie jednak nie będziemy się tym zajmowali, a uwagę skoncentrujemy na odwzorowaniach parametrów tego pola w przestrzeni Ω . W tym celu założymy z góry $\bar{\omega}^{(2)} = 90^\circ$ ($\sigma_1^{(2)} = k$, $\sigma_2^{(2)} = -k$). Widzimy (rys. 2c), że $P(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}) \in \mathcal{A}$, $P(\bar{\omega}^{(2)}, \bar{\omega}^{(3)}) \in \mathcal{A}$ (punkty P podano w prostokątach), a więc dla założonego $\bar{\omega}^{(2)}$ są spełnione warunki konieczne istnienia linii \mathcal{L}^{12} i \mathcal{L}^{23} . Ze wzorów typu (3.2) i (3.3)₂ (lub w przybliżeniu z rys. 2c) obliczymy: $\hat{\phi}(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}) = 27,36^\circ$, $\hat{\gamma}(\bar{\omega}^{(1)}, \bar{\omega}^{(2)}) = 35,27^\circ$, $\hat{\phi}(\bar{\omega}^{(2)}, \bar{\omega}^{(3)}) = 27,36^\circ$, $\hat{\gamma}(\bar{\omega}^{(2)}, \bar{\omega}^{(3)}) = 27,36^\circ$. Przyjmujemy ponadto $\hat{\phi} = 60^\circ$. Zauważmy, że w polu pokazanym na rys. 4 założono $\bar{q}^{(1)} = 2$, $\bar{q}^{(2)} = 1$, a więc [wzory typu (3.5)]

$$F^{12} = \{120; 90; 36; 144, 73\}, \quad F^{23} = \{90; 60; -27, 36; 27, 36\}.$$

Zwróćmy następnie uwagę, że najmniej liczny zbiór parametrów, jakim można rozważane pole opisać ma postać następującą:

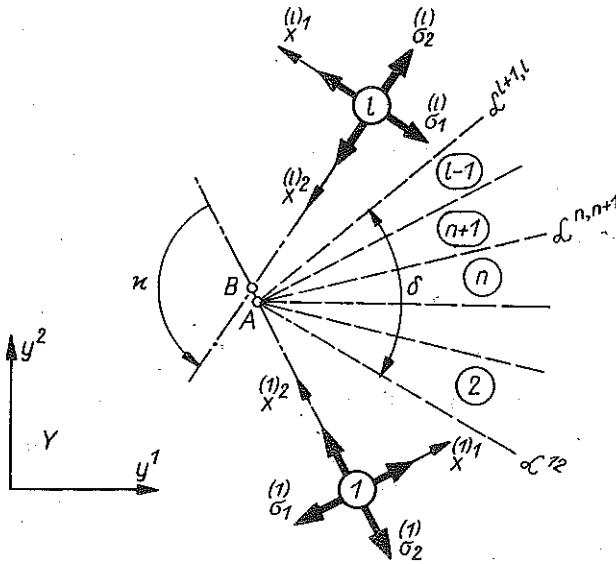
$$\{\bar{\omega}^{(1)} = 120^\circ, \bar{\omega}^{(2)} = 90^\circ, \bar{\omega}^{(3)} = 60^\circ, \bar{q}^{(1)} = 2, \bar{q}^{(2)} = 1\}$$

Poprawność otrzymanych wyników liczbowych można ewentualnie sprawdzić porównując je z podanymi w tablicach zamieszczonych w pracy [6].

5.2. Formułowanie zadań dla pól elementarnych

Pole elementarne. Rozważamy nieciągłe, płaskie pole naprężeń, złożone z $l \geq 2$ obszarów jednorodnych. Obszary te rozdzielają półproste linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$ (rys. 5) wychodzące z punktu A . Zakładamy, że wszystkie linie $\mathcal{L}^{n,n+1}$ pola leżą w półpłaszczyźnie ograniczonej pewnym kątem $\delta < 2\pi$. W celu opisu struktury pola, ponumerujemy obszary jednorodne kolejnymi liczbami naturalnymi ($n = 1, 2, 3, \dots, l$) rosnącymi w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Określamy w ten sposób uporządkowanie obszarów i linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$ oraz ich liczbę.

Żądamy, aby na liniach $\mathcal{L}^{n,n+1}$ ($n = 1, 2, \dots, (l-1)$) spełnione były równania równowagi (2.1), a w każdym obszarze „ n ” — warunek uplastycznienia (3.1). Nie stawiamy natomiast żadnych warunków na wzajemne bezpośrednie oddziaływania pomiędzy obszarami skrajnymi 1 i l . Przyjmujemy tu z góry, że rozważane pola posiadają dopuszczalne przedłużenia na półpłaszczyznę dopełniającą δ do 2π . Składowe stanów naprężenia w obszarach skrajnych uważamy zatem za niezależne. Podany zespół własności określa statycznie dopuszczalne, nieciągłe i graniczne w sensie H—M pole elementarne. Pola takie będziemy analizowali.



Rys. 5

Zgodnie z (4.3) każdą z linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$ określa zbiór liczb $\{\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}, \varphi^{(n+1)}, \gamma^{(n)}\}$ lub równoważny mu zbiór parametrów bazowych $\{\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}, q^{(n)}\}$. Pole elementarne opiszą zatem elementy zbioru (por. przykład 2 z p. 5.1):

$$(5.1) \quad \left\{ \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(l)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(l-1)} \right\},$$

który można odwzorować na parametry pola w płaszczyźnie elementu Y_i odwrotnie.

Konstrukcja układu równań i nierówności. W przypadkach najbardziej typowych zbiór z góry danych wartości parametrów pola przyjmuje postać $\{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \kappa, \delta\}$, gdzie κ jest kątem pomiędzy kierunkami naprężeń głównych w obszarach l i l (rys. 5). Wyrażając κ i δ przez parametry linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$, otrzymujemy następujący zapis „geometrycznych” warunków brzegowych:

$$(5.2) \quad \kappa = \sum_{n=2}^l \varphi^{(n)}, \quad \sum_{n=1}^{l-1} (\varphi^{(n+1)} + \gamma^{(n+1)} - \gamma^{(n)}) < \delta.$$

Aby wyznaczyć pozostałe parametry pola wymienione w (5.1) należy rozwiązać zagadnienie brzegowe dla układu równań, który obejmuje równania równowagi na liniach nieciągłości naprężeń, warunki uplastycznienia w każdym obszarze jednorodnym oraz zespół dodatkowych nierówności:

$$(5.3) \quad \gamma(\overset{(n+1)}{\omega}, \overset{(n+2)}{\omega}, \overset{(n+1)}{q}) + \varphi(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, \overset{(n)}{q}) - \gamma(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, \overset{(n)}{q}) > 0,$$

które wynikają z przesłanek geometrycznych i wyrażają żądanie by kąty pomiędzy kolejnymi liniami nieciągłości $\mathcal{L}^{n,n+1}$, $\mathcal{L}^{n+1,n+2}$ były dodatnie. Wykluczamy w ten sposób rozwiązania pól, które by się realizowały w kilku warstwach tej samej płaszczyzny fizycznej Y .

Wymienione równania i nierówności przedstawiamy za pomocą $\overset{(n)}{\omega}$ oraz $\overset{(l)}{q}$ ($l = 1, 2, \dots, l-1$) uzyskując tym samym tożsamościowe spełnienie warunku H-M w każdym obszarze n . Tożsamościowo spełnimy także warunki równowagi na $\mathcal{L}^{n,n+1}$, w opisie bowiem linii operujemy parametrami, $\varphi(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, \overset{(n)}{q})$, $\gamma(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, \overset{(n)}{q})$ określonymi za pomocą wzorów typu (3.2), (3.3) i (3.5). Podstawiane do nich $\overset{(n)}{\omega}$, $\overset{(n+1)}{\omega}$ muszą oczywiście spełniać warunki konieczne istnienia linii (4.1), które także dołączamy do układu.

W układzie końcowym pozostanie więc równanie (lub równania) typu (5.2)₁, nierówności (5.2)₂ (jeśli takie ograniczenie jest nakładane), zespół nierówności (5.3) oraz warunki (4.1) — wszystkie wyrażone przez $\overset{(n)}{\omega}$ oraz $\overset{(n)}{q}$. Niewiadomymi pozostają: $\{\overset{(2)}{\omega}, \overset{(3)}{\omega}, \dots, \overset{(l-1)}{\omega}, \overset{(1)}{q}, \overset{(2)}{q}, \dots, \overset{(l-1)}{q}\}$.

Otrzymujemy bardzo złożone formuły rekurencyjne (pomijamy je), które jednak pozwalają łatwo konstruować układ końcowy (przystępny, zawierający wielomiany trygonometryczne wysokiego stopnia). Oczywiście, jego konkretna realizacja wymaga podania liczby l obszarów jednorodnych, która — co należy szczególnie podkreślić — nie jest z góry dana. Co więcej, zależy od wartości nadawanych elementom zbioru $\{\overset{(1)}{\omega}, \overset{(l)}{\omega}, \kappa, \delta\}$ i na tym zbiorze tworzy funkcję dyskretną. Dla dowolnie obranych l rozwiązanie zagadnienia brzegowego na ogół nie istnieje.

Uwarunkowanie istnienia rozwiązania od doboru parametru strukturalnego l stanowi najbardziej istotną trudność zadania i na tej kwestii będziemy się obecnie koncentrowali.

Rozważmy zadania, w których nie nakłada się warunków (5.2) i (5.3) wiążących kształt linii \mathcal{L} oraz kierunki główne naprężeń w obszarach skrajnych, nazywanych dalej umownie ograniczeniami geometrycznymi. Zależność $\eta(\overset{(1)}{\omega}, \overset{(l)}{\omega}, \kappa, \delta, l) = 0$, upraszcza się wówczas do postaci $\eta_1 = (\overset{(1)}{\omega}, \overset{(l)}{\omega}, l) = 0$

i odpowiada sytuacji, gdy w skrajnych obszarach jednorodnych dane są tylko naprężenia główne. Analizy tego przypadku prowadzą do określenia struktur o najmniejszej liczbie obszarów l , gwarantującej istnienie rozwiązania przy konkretnie określonych $\{\omega^{(1)}, \omega^{(l)}\}$. Cechą szczególną tego zadania jest możliwość wyznaczania l na podstawie tylko warunków (4.1). Przy braku ograniczeń geometrycznych stają się one także dostatecznymi, mimo że są formułowane dla obrazów $P(\omega, \omega^{(n+1)})$ w przestrzeni Ω i nie zawierają elementów przestrzeni fizycznej Y . Warto dodać, że dla pól o najmniejszej liczbie linii można zawsze dodać taki ciąg $q^{(l)} (j = 1, 2, \dots, l-1)$, że warunki (5.3) będą spełnione.

5.3. Struktury pól elementarnych o najmniejszej liczbie linii \mathcal{L} Przykłady analiz dla zadań bez ograniczeń geometrycznych

Przedziały i podobszary dopuszczalne. Ustalenie parametru $\omega = c^{(m)}$ w dowolnym obszarze m pola elementarnego powoduje nałożenie ograniczeń typu

$$(5.4) \quad \omega \in \Gamma_m^{(n)} \equiv \{\omega : \omega \in [\omega_{\min}^{(n)}, \omega_{\max}^{(n)}]\} \subset \dot{I}$$

na parametry $\omega^{(n)}$ w obszarach sąsiednich: $n = m \pm 1, n = m \pm 2, \dots$. Wyznaczenie tych ograniczeń jest kluczowe dla rozwiązania postawionego w pracy zagadnienia i wymaga skonstruowania odwzorowania

$$(5.5) \quad \Gamma_m^{(n \pm 1)} = f(\Gamma_m^{(n)}),$$

przedziałów dopuszczalnych $\Gamma_m^{(n)}$ na przedziały dopuszczalne $\Gamma_m^{(n \pm 1)}$, gdzie $\Gamma_m^{(n \pm 1)} = \{\omega : \omega \in [\omega_{\min}^{(n \pm 1)}, \omega_{\max}^{(n \pm 1)}]\} \subset \dot{I}$. Jest to zależność opisująca rozwój przedziałów dopuszczalnych, jaki towarzyszy wzrostowi mod $|n - m|$, i który jest symetryczny względem tej liczby. Dlatego w dalszym ciągu będziemy rozważali odwzorowania (5.5) tylko dla $n = m + 1, n = m + 2, \dots$ itd.

Otrzymujemy więc

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \omega_{\max}^{(n+1)} &= \max \left\{ \arccos \left[\sin \left(\frac{\pi}{6} - \omega \right) \right] \omega = \omega_{\min}^{(n)}, \omega_{\max}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{2}{3}\pi, \text{ gdy } \frac{2}{3}\pi \in \Gamma_m^{(n)} \right) \right\}; \\ \omega_{\min}^{(n+1)} &= \min \left\{ \arccos \left[\sin \left(\frac{\pi}{6} + \omega \right) \right] \omega = \omega_{\min}^{(n)}, \omega_{\max}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{3}\pi, \text{ gdy } \frac{1}{3}\pi \in \Gamma_m^{(n)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wzory (5.6) uzasadniamy następująco. Aby wyznaczyć $\omega_{\max}^{(n+1)}$ należy rozwiązać zadanie następujące: $\max \omega^{(n+1)}$ przy ograniczeniach $\omega \in \Gamma_m^{(n)}$, $\omega \in \Gamma$. Łatwo zauważyć, że jest to zadanie programowania liniowego. Zgodnie z (3.6)₁, łamana AFD z rys. 2c, ograniczająca Λ od góry, posiada równanie $\omega^{(n+1)} = \arccos \left[\sin \left(\frac{\pi}{6} - \omega^{(n)} \right) \right]$, a zatem $\omega^{(n+1)}$ osiąga maksimum bądź na krańcach przedziału $\Gamma_m^{(n)}$ bądź w punkcie wierzchołkowym $\omega = \frac{2}{3}\pi$, o ile punkt ten należy do $\Gamma_m^{(n)}$.

Z analogiczną sytuacją spotkamy się w zadaniu: $\min \omega^{(n+1)}$, $\omega \in \Gamma_m^{(n)}$, $\omega \in \Gamma$ z tym, że punkt wierzchołkowy otrzymamy tutaj dla $\omega = \frac{\pi}{3}$. Łamana ACD (rys. 2c, wzór (3.6)₁) ma równanie $\omega^{(n+1)} = \arccos \left[\sin \left(\frac{\pi}{6} + \omega^{(n)} \right) \right]$.

Przedziały $\Gamma_m^{(n)}$ wydziela ją z Λ dopuszczalne podobszary obrazów $P(\omega, \omega^{(n+1)})$ linii $\mathcal{L}^{n,n+1}$ w przestrzeni Ω . Są one także zależne od $c^{(n)}$ w obszarze m oraz określone następująco:

$$A_m^{n,n+1} \equiv \left\{ (\omega, \omega^{(n+1)}) : \omega \in \Gamma_m^{(n)}, \omega^{(n+1)} \in \left[\arccos \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} + \omega \right) \right), \arccos \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} - \omega \right) \right) \right] \right\}$$

(5.7) albo

$$A_m^{n,n+1} = \{ (\omega, \omega^{(n+1)}) : \omega \in \Gamma_m^{(n)}, \omega^{(n+1)} \in \Gamma_m^{(n+1)} \} \cap \Lambda$$

lub w inny, równoważny sposób.

Algorytmy poszukiwania struktur o najmniejszej liczbie linii \mathcal{L} . Niech dane będą $\omega = c \in \Gamma$, $\omega = c \in \Gamma$ w skrajnych obszarach l i l pola elementarnego. Poszukujemy natomiast najmniejszej liczby linii \mathcal{L} , dla której przy danych wartościach parametrów $c^{(l)}$ i $c^{(l)}$ rozwiązanie pola istnieje.

Korzystając ze wzorów i definicji (5.4) do (5.7) można dla tego celu ułożyć kilka równoważnych algorytmów, które startują bądź od $\omega = c^{(1)}$, bądź od $\omega = c^{(0)}$, bądź też od obu wartości parametrów $\omega, \omega^{(0)}$ równocześnie.

Dla naszych obecnych potrzeb wyjdziemy od $\omega = c^{(1)} \in I^{\sharp}$. Z (5.5) oraz (5.6) wyznaczamy wówczas kolejno elementy ciągu dopuszczalnych przedziałów $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_1^{(3)}$... i dla każdego $n \geq 2$ badamy, czy spełniony jest warunek

$$(5.8) \quad \omega \in \Gamma_m^{(n+1)}$$

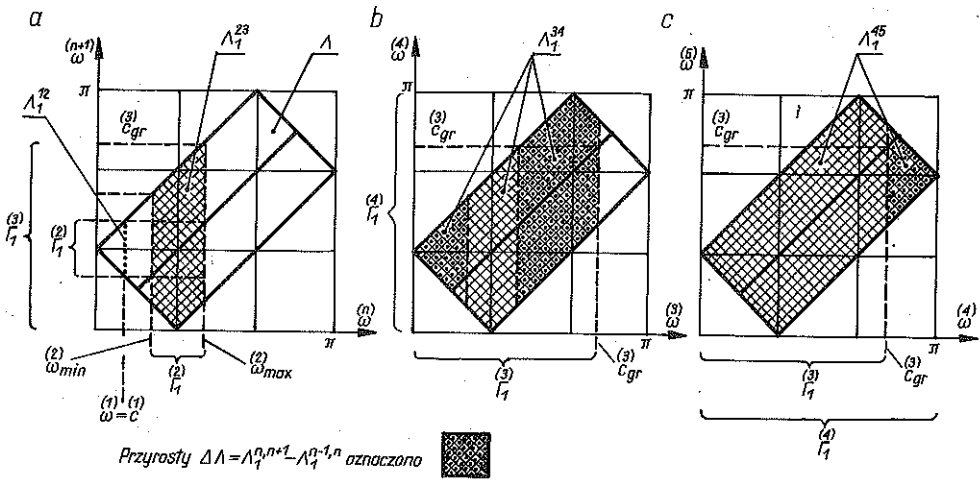
Najmniejsza wartość n , przy której warunek (5.8) jest spełniony jest równocześnie poszukiwaną liczbą linii \mathcal{L} ($n = l - 1$).

Można oczywiście nie kończyć procedury określenia $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_1^{(3)}$, ... na spełnieniu warunku (5.8) lecz kontynuować postępowanie, aż do uzyskania $\Gamma_1^{(n+1)} = I^{\sharp}$. Otrzymamy wtedy całą rodzinę dopuszczalnych struktur, jakie wiążą się z założoną wartością parametru $\omega = c^{(1)}$ oraz odpowiadający jej elementom ciąg najmniejszych liczb linii \mathcal{L} dla różnorodnie przyjmowanych wartości $\omega \in I^{\sharp}$.

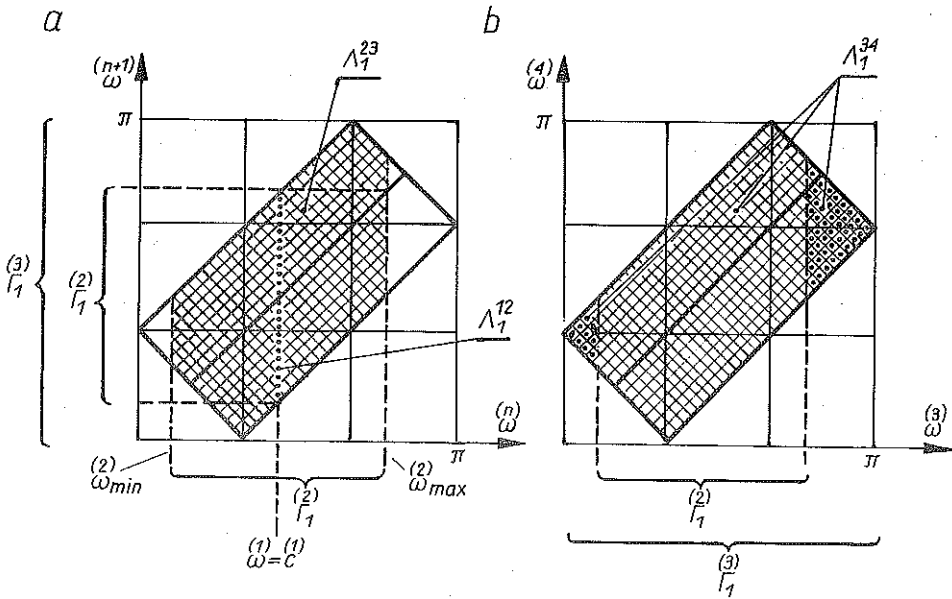
Podany algorytm tworzenia $\Gamma_1^{(n)}, A_1^{n, n+1}$ oraz wnioskowania o najmniejszej liczbie linii \mathcal{L} poła, przy których założeniu rozwiązanie istnieje dla konkretnych danych $\omega, \omega^{(0)}$ jest łatwy do programowania.

W analizach praktycznych dogodnie jest także operować jego przedstawieniem geometrycznym za pomocą geometrycznych obrazów $\Gamma_1^{(n)}, A_1^{n, n+1}$ w przestrzeni Ω . Pokażemy to na przykładach, które równocześnie zilustrują „działanie” formuł (5.4) do (5.8).

Przykłady generowania rodzin struktur o najmniejszej liczbie linii. Zastosujemy wspomniane podejście geometryczne i przedstawimy dwa najbardziej typowe obrazy ciągów podobszarów i przedziałów dopuszczalnych, jakie otrzymuje się dla $c^{(1)} \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (rys. 6) oraz $c^{(1)} \in \left[\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right]$ (rys. 7). Sposób tworzenia $\Gamma_1^{(n)}, A_1^{n, n+1}$ jest w obu zadaniach identyczny, dlatego omówimy szczegółowo tylko konstrukcję pokazaną na rys. 6.



Rys. 6



Rys. 7

Dla założonej wartości $c \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ w przestrzeni Ω otrzymamy prostą (c, ω) (rys. 6a), natomiast

$$A_1^{12} = \{(c, \omega) : \omega \in [0, \pi]\} \cap A$$

wyznaczy podzbiór dopuszczalnych obrazów $P(c, \omega) \in A_1^{12} \subset A \subset \Omega$ (linia gruba, kropkowa na rys. 6a) odpowiadających dopuszczalnym liniom \mathcal{L}^{12} (rodzinom tych linii w przestrzeni \mathcal{Y}). Przedział dopuszczalności ω określimy następująco:

$$\Gamma_1^{(2)} \equiv \{ \omega : (c, \omega) \in A_1^{12} \} = \left\{ \omega : \omega \in \left[\frac{\pi}{3} - c, \frac{\pi}{3} + c \right] \right\}$$

Jeśli dana ω spełnia warunek $\omega \in \Gamma_1^{(2)}$, to obszary l i l można rozdzielić jedną tylko linią nieciągłości naprężeń \mathcal{L}^{12} i wówczas najmniejsza liczba obszarów stanów jednorodnych wyniesie $l = 2$. Przyjmijmy do dalszych analiz, że warunek ten nie jest spełniony i że dla dopuszczalnego rozdzielania obszarów l i l niezbędna jest jeszcze linia \mathcal{L}^{23} . Jej obrazy $P(\omega, \omega)$ w Ω muszą wtedy spełnić warunek

$$P(\omega, \omega) \in A_1^{23} \equiv \{ (\omega, \omega) : \omega \in \Gamma_1^{(2)}, \omega \in [0, \pi] \} \cap A$$

(obszar zacięniowany na rys. 6a)

Z (5.4) lub rysunku 6a otrzymamy następnie

$$\Gamma_1^{(3)} \equiv \left\{ \omega : \omega \in \left[0, c_{gr} = \frac{2}{3}\pi + c \right] \right\}$$

Spostrzegamy, że przedział $\Gamma_1^{(3)}$ jest znacznie większy od $\Gamma_1^{(2)}$ oraz, że obydwa posiadają część wspólną. Obrazy P linii \mathcal{L}^{23} , które należą do podobszaru

$$(5.9) \quad A_1^{23} = \{ (\omega, \omega) : \omega \in \Gamma_1^{(2)}, \omega \in \Gamma_1^{(3)} \} \cap A$$

odpowiadają polu, którego rozwiązanie istnieje tylko przy założeniu conajmniej dwóch linii \mathcal{L} . Dla

$$(5.10) \quad P \in \{ (\omega, \omega) : \omega \in \Gamma_1^{(2)}, \omega \in \Gamma_1^{(3)} \} \cap A$$

natomiast, możliwe są rozwiązania pól zarówno przy założeniu jednej jak i dwóch linii \mathcal{L} .

W związku z przedstawionym wnioskiem zwróćmy na chwilę uwagę na kwestię ogólniejszą. Mamy tutaj zadanie bez ograniczeń geometrycznych co powoduje, że więzy nie są nakładane na pary liczb (ω, ω) , lecz tylko na jedną z tych liczb, która samodzielnie nie określa ϕ i $\hat{\phi}$. Gdy takie ograniczenia są nakładane, wspomniana wymiennosc (jedna lub dwie linie \mathcal{L}) nie ma już miej-

sca. Podobszary (5.9) i (5.10) obejmują bowiem różne przedziały parametrów ϕ , φ i odpowiadają różnym geometriom linii \mathcal{L} w płaszczyźnie fizycznej Y (rys. 2c).

Wracając do analizy przypadku z rys. 6a, zauważymy następnie, że niedopuszczalne jest zakładanie dwóch linii \mathcal{L} , gdy ω przyjmuje wartości większe od $c_{gr}^{(3)} = \frac{2}{3}\pi + c^{(1)}$. Należy wtedy przyjąć co najmniej trzy linie \mathcal{L} . Otrzymamy wówczas (rys. 6b)

$$\Gamma_1^{(4)} \equiv \{\omega : \omega \in (0, \pi)\}$$

oraz

$$A_1^{34} \equiv \{(\omega, \omega) : \omega \in \Gamma_1^{(3)}, \omega \in \Gamma_1^{(4)}\} \cap A.$$

Przyrost $\Delta A = A_1^{34} - A_1^{23}$ wyróżniono na zacięniowanym tle podobszaru A_1^{34} drobnymi kropkami.

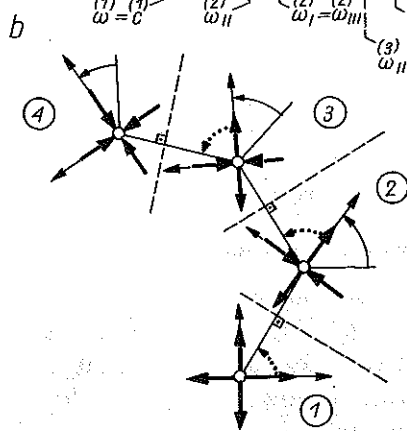
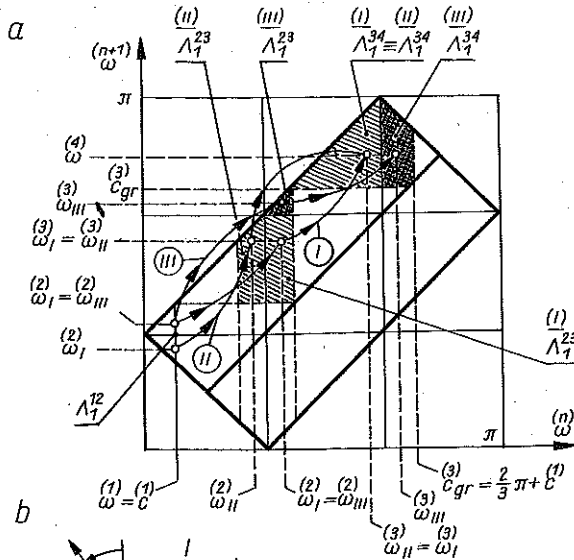
Podobszar A_1^{34} nie obejmuje jeszcze całego obszaru dopuszczalnego A , jakkolwiek $\Gamma_1^{(4)}$ pozwala już otrzymywać dowolne wartości $\omega = \omega \in \Gamma^{\circ}$. W ramach struktur zawierających trzy linie \mathcal{L} i cztery obszary stanów jednorodnych istnieją zatem rozwiązania pól elementarnych, które w obszarach skrajnych mogą mieć dowolne stany naprężeń głównych lecz naprężenia te nie mogą przyjmować dowolnych kierunków. Chcąc otrzymać dowolne wartości elementów zbioru $S^{l-1, l}$, należy założyć jeszcze czwartą linię \mathcal{L}^{45} i przyjąć liczbę obszarów jednorodnych równą pięć (rys. 6c). W tym przypadku będzie

$$A_1^{45} = A, \quad \Gamma_1^{(5)} = \Gamma^{\circ}.$$

Analogiczne sytuacje i podobne do omówionych wnioski będą towarzyszyły analizom przypadków, w których zakłada się $c \in \left[\frac{2}{3}\pi, \pi \right]$.

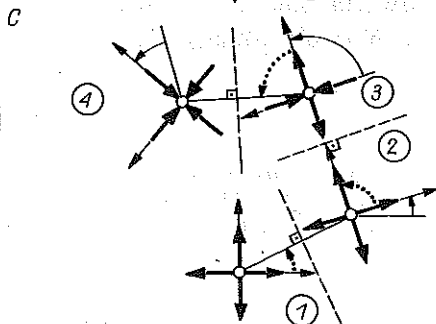
W przypadku pokazanym na rys. 7 założono $c \in \left[\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \right]$, i już dla dwóch linii \mathcal{L}^{12} i \mathcal{L}^{23} otrzymano przedział dopuszczalny $\Gamma_1^{(3)} = \Gamma^{\circ}$ nie zawierający ograniczeń na ω . Wypełnienie obszaru A otrzymuje się tutaj przy założeniu trzech linii \mathcal{L} (rys. 7b).

Rozwiązanie pokazane na rys. 7 różni się od poprzedniego (rys. 6), wieloma istotnymi szczegółami, których przedstawienie pomijamy, ponieważ różnice są łatwe do odczytania bezpośrednio z rysunków.



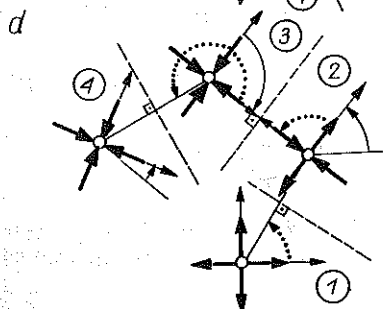
Ścieżka I

n	$(n) \omega$	$(n) \varphi$	$(n) \phi$	$(n) \varrho$	$(n) \sigma_1/k$	$(n) \sigma_2/k$
1	15,0	58,3	00,0	1	1,931	1,414
2	67,5	67,9	51,0	1	1,586	-0,262
3	112,5	73,7	45,8	1	0,262	-1,587
4	150,0	—	32,0	—	-1,000	-2,000



Ścieżka II

n	$(n) \omega$	$(n) \varphi$	$(n) \phi$	$(n) \varrho$	$(n) \sigma_1/k$	$(n) \sigma_2/k$
1	15,0	27,9	00,0	1	1,931	1,414
2	52,5	90,0	20,1	1	1,847	0,262
3	112,5	73,7	90,0	1	0,262	-1,586
4	150,0	—	32,0	—	-1,000	-2,000



Ścieżka III

n	$(n) \omega$	$(n) \varphi$	$(n) \phi$	$(n) \varrho$	$(n) \sigma_1/k$	$(n) \sigma_2/k$
1	15,0	58,3	00,0	1	1,931	1,414
2	67,5	90,0	51,0	1	1,586	-0,262
3	127,5	252,4	-90,0	3	-0,262	-1,848
4	150,0	—	15,4	—	-1,000	-2,000

Uwaga: na rys. b, c, d oznaczono: $(n) \phi$, $(n) \varphi$

Rys. 8

Przykłady pól o co najmniej czterech obszarach stanów jednorodnych. Są to pola elementarne, w których $\omega = c \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\omega > c_{gr} = \frac{2}{3}\pi + c$ (lub analogicznie $c \in \left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$, $\omega < c_{gr}$), i przy których to wartościach parametrów w obszarach skrajnych, najmniejsza liczba obszarów, warunkująca istnienie rozwiązania, wynosi cztery. W ciągu parametrów określających pole zmiennymi pozostają zatem ω , ω , q , q . Parametry rodzin q ($n = 1, 2, 3$) przyjmują wartości 1, 2, 3, 4; na ω nakładamy natomiast warunki istnienia rozwiązania (4.1). Nie narzucamy jednak żadnych warunków geometrycznych.

Przedstawimy tylko rozwiązania dla przypadku $c \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\omega > \frac{2}{3}\pi + c$ (rys. 8). Przypadek $c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\omega > c_{gr}$ różni się od poprzedniego tylko szczegółami i może być rozwiązany podobnie.

Podobszary dopuszczalne $A_1^{n,n+1}$ ($n = 1, 2, 3$) znaleziono w sposób identyczny jak dla konstrukcji z rys. 6. W kroku następnym odrzucono z nich części, dla których nie można spełnić warunku $\omega > c_{gr}$. Części pozostałe są podobszarami dopuszczalnymi obejmującymi rozwiązania, które istnieją tylko dla struktur o co najmniej trzech liniach \mathcal{L} . Podobszary te zacieniowano (rys. 8a) w różny sposób. Podobszar $A_1^{1,2}$ wyróżniono grubą linią kropkową.

Widzimy, że niejednoznaczność, naturalna przy założonych warunkach brzegowych, objawiła się tutaj trzema jakościowo różnymi rozwiązaniami, które odpowiadają trzem kombinacjom znaków naprężeń w obszarach pośrednich 2 i 3. Na rys. 8a reprezentują je ścieżki $s = I, II, III$, które równocześnie odwzorowują w Ω rozwiązania pokazane na rysunkach 8b, 8c i 8d (odtworzone rysunki automatyczne).

Podobszary dopuszczalne odpowiadające ścieżkom $s = I, II, III$ są częściami $A_1^{n,n+1}$ i dla odróżnienia oznaczamy je $A_1^{(s),n,n+1}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_1^{1,2} &\equiv \left\{ (c, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + c \right], c \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \right\}, \\ A_1^{2,3} &\equiv \left\{ (\omega, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + c \right], \omega \in \left[\frac{\pi}{3} + c, \frac{2}{3}\pi \right] \right\} \cap A, \\ A_1^{3,4} &\equiv \left\{ (\omega, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3} + c, \frac{2}{3}\pi \right], \omega \in \left[\frac{2}{3}\pi + c, \pi \right] \right\} \cap A; \\ A_1^{1,2} &\equiv \left\{ (c, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3} - c, \frac{\pi}{3} \right], c \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad A_1^{23} &\equiv \left\{ \begin{matrix} (2) & (3) & (2) \\ (\omega, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3} - c, \frac{\pi}{3} \right], & \omega \in \left[\frac{\pi}{3} + c, \frac{2}{3}\pi \right] \end{matrix} \right\} \cap A, \\
 \text{(II)} \quad A_1^{34} &\equiv \left\{ \begin{matrix} (3) & (4) & (3) \\ (\omega, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3} + c, \frac{2}{3}\pi \right], & \omega \in \left[\frac{2}{3}\pi + c, \pi \right] \end{matrix} \right\} \cap A; \\
 \text{(III)} \quad A_1^{12} &\equiv \left\{ \begin{matrix} (1) & (2) & (2) \\ (c, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + c \right], & c \in \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \end{matrix} \right\}, \\
 \text{(III)} \quad A_1^{23} &\equiv \left\{ \begin{matrix} (2) & (3) & (2) \\ (\omega, \omega) : \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + c \right], & \omega \in \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi + c \right] \end{matrix} \right\} \cap A, \\
 \text{(III)} \quad A_1^{34} &\equiv \left\{ \begin{matrix} (3) & (4) & (3) \\ (\omega, \omega) : \omega \in \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi + c \right], & \omega \in \left[\frac{2}{3}\pi + c, \pi \right] \end{matrix} \right\} \cap A.
 \end{aligned}$$

W przedstawionych wyrażeniach uwagę zwraca prostota opisów podobszarów $A_1^{n,n+1}$ oraz ich zależność tylko od $c^{(1)}$, łatwa w geometrycznej konstrukcji i programowaniu. Jest ona przede wszystkim rezultatem dogodnych właściwości obszaru A , warunków które go definiują oraz przestrzeni, na której został on określony. Układ $\{\omega, \omega^{(n+1)}\}$ jest bowiem podzbiorem bazowego zbioru parametrów $\{\omega, \omega^{(n+1)}, q\}$, co implikuje redukcję liczby zmiennych w zadaniu do liczby najmniejszej. Przez te zmienne są następnie bezpośrednio wyrażone warunki istnienia rozwiązania.

W odróżnieniu w podejściu klasycznym, które wykorzystuje konstrukcję kół Mohra [2 i 3], operujemy większą liczbą zmiennych (promienie, współrzędne środków kół). Są one wzajemnie od siebie zależne, a związki pomiędzy nimi muszą być dołączane dodatkowo do konstrukcji geometrycznej. Znalezienie tym sposobem niewielkich podobszarów $A_1^{n,n+1}$ (rys. 8a) byłoby oczywiście bardzo trudne.

Rozwiązania pól elementarnych, które zawierają 3 obszary stanów jednorodnych (2 linie \mathcal{L}) są znane i w tej pracy nie będziemy już ich rozważali, chociaż dla nich właśnie wykorzystanie własności obszaru A jest najbardziej efektywne.

6. UWAGI KOŃCOWE

Obierając różnorodne wartości na parametry $\omega, \omega^{(n)} (\in \mathring{I})$ oraz żądając, by pozostałe parametry pola spełniały tylko warunki konieczne (4.1), otrzymujemy cały zbiór możliwych rozwiązań. W zadaniach praktycznych do warunków (4.1) dołączamy jeszcze warunki typu (5.2), które wydziela ją z tego zbioru

розв'язання о особливої геометрії і одночасно чиня недопустимими геометрії пол, котрі тих умов не спліняють. Окреслять то місця представлених тут аналізів в загалу з обмеженнями. Пошвиємо їм особну працю і там же розвинеми особливо висновки, котрі були в попередніх пунктах формульовані на бїжачо.

Подані wzory і рівняння дають ся латво програмувати і були аналізовані чисельно. Мимо то в багатьох випадках користано безпосередньо з конструкції області A і окресляно параметри лінії \mathcal{L} за допомогою нанесених там шарів $\phi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$. Простота цієї конструкції, а також поданих залежностей, бїть може бїдуть причиною, же в розв'язаннях пол граничних умов Губера-Мисеса бїдуть чїтїше застосовані.

Підкреслимо на кїнець крїтко натуру розв'язаного завдання. З окресленням поля елементарного зв'язує ся розв'язання завдання берегового для нелинійового укладу рївнянь і нерївностей (завира багатономї тригонометричнї високїго ступня), котрого структура (лїчба невідомих, виміар укладу) не єсть з гїри дана. Залежить она од конкретних форм умов берегових, а також од вартостї даних на берегах параметрїв. Для структур заложених довільно розв'язання завдання не існує.

Підчас розв'язання пол сложених представлено завдання уlega натуральному звїлїкратненню, а понадто доводять ся умови рївноваги взаємних впливїв поміжду складовими полями елементарними.

ЛІТЕРАТУРА ЦИТОВАНА В ТЕКСТІ

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN, Warszawa 1968.
2. W. SZCZEPIŃSKI, J. SZLAGOWSKI, *Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń*, PWN, Warszawa 1985.
3. *Węzły i połączenia konstrukcyjne*, Praca zbiorowa koordynowana przez H. FRĄCKIEWICZA, WNT, Warszawa 1986.
4. J. SZLAGOWSKI, *Kształtowanie węzłów konstrukcji stalowych metodą tensorowego nakładania dwóch pól naprężeń*, Rozpr. Inżyn., 29, 3, 401—417, 1981.
5. W. BODASZEWSKI, *Rozwiązania statycznie dopuszczalnych płaskich i granicznych siatek linii nieciągłości naprężeń*, Prace IPPT, 43, 1983.
6. W. SZCZEPIŃSKI, J. SZLAGOWSKI, *Graniczne i statycznie dopuszczalne nieciągłe pola naprężeń dla szacowania nośności granicznej*, Prace IPPT, 20, 1976.

Резюме

СТРУКТУРЫ СИСТЕМ ЛИНИЙ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ В ГРАНИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ГУБЕРА-МИЗЕСА ЧАСТЬ I. СТРУКТУРНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОЛЕЙ. ЗАДАЧИ БЕЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Приведены общие формулы для определения параметров статически допустимой линии разрыва напряжений \mathcal{L} , которая разделяет области однородных и предельных плоских состояний, удовлетворяющих условию Губера-Мизеса. Сформулированы ус-

ловия существования линии \mathcal{L} , а также представлено определенное ими, выгодное в приложениях, отображение допустимой области A .

Полученные формулы использованы в алгоритме поиска структур элементарных полей с наименьшим количеством линий \mathcal{L} , зависящим от граничных условий, для которых то структур решения полей существуют. Рассмотрены задачи без геометрических ограничений. Подробно представлены решения элементарных полей, содержащих четыре однородные области. Составляют они отдельный класс не анализированный до сих пор.

Дополнительным результатом является простая конструкция диаграммы, которая позволяет, без никаких дополнительных расчетов, найти параметры линии $\mathcal{L}^{n,n+1}$ разделяющей области, в которых произвольно даются значения параметров напряжений $\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}$. Диаграмма тоже пригодна в качественных и количественных анализах более сложных структур.

SUMMARY

STRESS DISCONTINUITY LINE STRUCTURES IN YIELD ZONES SATISFYING THE HUBER-MISES CONDITION PART I. STRUCTURAL CONDITION OF EXISTENCE OF ELEMENTARY FIELDS (ZONES), PROBLEMS WITHOUT GEOMETRICAL LIMITATIONS

General formulae are presented enabling the determination of a statically admissible stress discontinuity line \mathcal{L} which bounds the regions of homogeneous limit states satisfying the Huber-Mises conditions. Conditions of existence of solutions for the \mathcal{L} -lines are formulated; the lines determine the form of admissible region A useful in practical applications. The formulae are then applied in the search for the elementary field structures with the least possible number of lines \mathcal{L} (depending on the boundary conditions) which secure the existence of solutions of the elementary fields. In particular, elementary fields containing four homogeneous regions are presented. They constitute a separate class which has not been analyzed so far. An additional result obtained in the paper is a simple method of construction of a graph which makes it possible to determine (without additional calculations) the parameters of lines $\mathcal{L}^{n,n+1}$ separating the regions with arbitrarily assumed values of stress parameters $\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}$. The graph proves also to be useful in the qualitative and quantitative analyses of other, more complex structures.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA
INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ, KIELCE

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1986 r.