

ANALIZA WŁASNOŚCI TŁUMIĄCYCH ODKSZTAŁCALNYCH OŚRODKÓW PERFOROWANYCH WYPEŁNIONYCH CIECZĄ^(*)

STEFAN J. KOWALSKI, ROMAN KUC I GRZEGORZ MUSIELAK (POZNAŃ)

Celem pracy jest analiza własności tłumiących ośrodków perforowanych wypełnionych cieczą lepka. Na podstawie drgań swobodnych oraz drgań wymuszonych siłą harmoniczną elastycznego perforowanego walca nasyconego cieczą bada się wpływ lepkości cieczy na własności tłumiące ośrodka. Analizuje się wpływ współczynnika tłumienia na efekt wibroizolacji, tj. na współczynnik przenoszenia siły. Wyniki przedstawiono na wykresach.

1. WSTĘP

We wcześniejszej pracy [1] autorzy przeprowadzili analizę własności wibroizolacyjnych ośrodków perforowanych wypełnionych cieczą, traktując ciecz jako nielepka. Wykazano, że zjawisko „rozmywania” sił wymuszających drgania przy ich przenoszeniu ze źródła drgań na podłoże lub obiekt izolowany pozwala uzyskać szerokie pasmo częstotliwości wymuszenia, w zakresie którego wibroizolator jest skuteczny, tzn. współczynnik przenoszenia obciążenia jest mniejszy od jedności.

W niniejszej pracy autorzy starają się odpowiedzieć na pytanie jak lepkość cieczy, a zatem dysypacja energii wynikająca z ruchu względnego cieczy i sprężystego szkieletu porowatego, wpływa na analizowane wielkości.

Korzystając z równań teorii ośrodków porowatych wypełnionych cieczą zredukowanych do jednoosiowego stanu naprężenia, analizuje się drgania swobodne i wymuszone porowatego walca wypełnionego cieczą lepka.

W szczególności bada się intensywność zanikania drgań swobodnych w wyniku tłumienia oraz wpływ współczynnika tłumienia na efekt wibroizolacji. Rozwiązanie zagadnienia uzyskano w formie zamkniętej, w postaci szeregów według układu podwójnych funkcji własnych. Niektóre rozwiązania przedstawiono przykładowo w formie graficznej.

W konkluzji stwierdza się, że intensywność tłumienia zależy od lepkości płynu, przepuszczalności ośrodka, jego porowatości oraz prędkości względnej szkieletu i cieczy. Wzrost własności tłumiących pogarsza efekt wibroizolacji.

^(*) Praca wykonana w ramach CPBP 02.03 „Akustyka w technice, medycynie i kulturze”.

2. PODSTAWY MATEMATYCZNE ANALIZY

Zakładamy, że materiał porowaty (szkielet) jest sprężysty, a wypełniająca go ciecz jest cieczą lepłą, ściśliwą. Posługiwac się będziemy metodami teorii ośrodków porowatych nasyconych cieczą [2], w których korzysta się z tzw. wielkości parcjalnych. Rozważać będziemy jednowymiarowe zagadnienia początkowo-brzegowe, przy czym współrzędną miejsca oznaczamy przez x , a współrzędną czasu przez t . W równaniach pomijamy tzw. efekt sprężenia ruchu przez masę (por. [3]).

Równania równowagi mechanicznej mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{s,x} &= \varrho_s \ddot{u}_s + b(\dot{u}_s - \dot{u}_f), \\ \sigma_{f,x} &= \varrho_f \ddot{u}_f - b(\dot{u}_s - \dot{u}_f), \end{aligned}$$

natomiast związki fizyczne teorii dla zagadnień jednowymiarowych wyrażają się następująco:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_s &= (2N + A)u_{s,x} + Qu_{f,x}, \\ \sigma_f &= Qu_{s,x} + Ru_{f,x}. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach $u_s(x, t)$ i $u_f(x, t)$ oznaczają osiowe przemieszczenia szkieletu oraz cieczy, $\sigma_s(x, t)$ i $\sigma_f(x, t)$ są naprężeniami parcjalnymi w szkielecie i cieczy odniesionymi do jednostki powierzchni ośrodka jako całosci, ϱ_s i ϱ_f są masami składników odniesionymi do jednostki objętości całkowitej, natomiast N , A , Q , R są stałymi materiałowymi. Ponadto x po przecinku oznacza cząstkową pochodną przestrzenną, a kropka nad symbolem oznacza pochodną cząstkową po czasie.

Lepkość cieczy μ w równaniach reprezentuje współczynnik b , zwany współczynnikiem tłumienia, związany ze współczynnikiem przepuszczalności ośrodka K oraz porowatością f zależnością:

$$(2.3) \quad b = \frac{\mu f^2}{K}.$$

Z równań (2.1) i (2.2) otrzymuje się równania zbiorcze teorii, wyrażone w przemieszczeniach

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (2N + A)u_{s,xx} + Qu_{f,xx} &= \varrho_s \ddot{u}_s + b(\dot{u}_s - \dot{u}_f), \\ Qu_{s,xx} + Ru_{f,xx} &= \varrho_f \ddot{u}_f - b(\dot{u}_s - \dot{u}_f). \end{aligned}$$

Układ równań (2.4) jest typu hiperbolicznego i opisuje bifale. Prędkości fal, zwanych falą szybką i falą wolną, wyrażają się jak następuje:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} c_s^2 &= \frac{1}{2}[(a_s^2 + a_f^2) + \sqrt{(a_s^2 - a_f^2) + 4a_1 a_2 a_s^2 a_f^2}], \\ c_w^2 &= \frac{1}{2}[(a_s^2 + a_f^2) - \sqrt{(a_s^2 - a_f^2) + 4a_1 a_2 a_s^2 a_f^2}], \end{aligned}$$

przy czym

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a_s^2 &= \frac{2N+A}{\varrho_s}, & a_f^2 &= \frac{R}{\varrho_f}, \\ a_1 &= \frac{Q}{2N+A}, & a_2 &= \frac{Q}{R}. \end{aligned}$$

Rozwiązania układu równań (2.4) budujemy stosując metodę rozdzielania zmiennych:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= U_s(x)T(t), \\ u_f(x, t) &= U_f(x)T(t). \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że w ośrodku propagują się dwie fale dylatacyjne o różnych prędkościach propagacji, dla analizowanych w pracy zagadnień początkowo-brzegowych otrzymuje się dwie grupy częstości drgań własnych

$$\{\omega_n^{(1)}\} \text{ i } \{\omega_n^{(2)}\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a zatem również dwie grupy funkcji własnych $U_{sn}^{(i)}$, $U_{fn}^{(i)}$ oraz współrzędnych uogólnionych $T_n^{(1)}$ i $T_n^{(2)}$.

Ogólne rozwiązania (2.7) budujemy więc za pomocą szeregów według funkcji własnych:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_{sn}^{(1)}(x)T_n^{(1)}(t) + U_{sn}^{(2)}(x)T_n^{(2)}(t), \\ u_f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_{fn}^{(1)}(x)T_n^{(1)}(t) + U_{fn}^{(2)}(x)T_n^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Przyjmujemy, że funkcje własne $U_{sn}^{(i)}(x)$, $U_{fn}^{(i)}(x)$ spełniają równania (2.4) dla układu niedysypatywnego

$$(2.9) \quad \begin{aligned} (2N+A)U_{sn}^{(i)''} + QU_{fn}^{(i)''} + \varrho_s \omega_n^{(i)2} U_{sn}^{(i)} &= 0, \\ QU_{sn}^{(i)''} + RU_{fn}^{(i)''} + \varrho_f \omega_n^{(i)2} U_{fn}^{(i)} &= 0 \end{aligned}$$

i mają postać ogólną

$$(2.10) \quad \begin{aligned} U_{sn}^{(i)}(x) &= A_1 e^{i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x} + A_2 e^{-i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x} + A_3 e^{i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x} + A_4 e^{-i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x}, \\ U_{fn}^{(i)}(x) &= \delta_1 (A_1 e^{i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x} + A_2 e^{-i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x}) + \delta_2 (A_3 e^{i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x} + A_4 e^{-i \frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x}), \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{c_s^2}{a_s^2} \right), \\ \delta_2 &= -\frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{c_w^2}{a_s^2} \right), \end{aligned}$$

a $\omega_n^{(i)}$ są stałymi rozdzielania zmiennych.

W postaci ogólnej warunek ortogonalności funkcji własnych można napisać w następujący sposób:

$$(2.12) \quad (\omega_n^{(i)^2} - \omega_m^{(k)^2}) \int_0^h [\varrho_s U_{sn}^{(i)}(x) U_{sm}^{(k)}(x) + \varrho_f U_{fn}^{(i)}(x) U_{fm}^{(k)}(x)] dx + \\ + \{ [(2N + A) U_{sn}^{(i)'}(x) + Q U_{fn}^{(i)'}(x)] U_{sm}^{(k)}(x) + [Q U_{sn}^{(i)'}(x) + R U_{fn}^{(i)'}(x)] U_{fm}^{(k)}(x) - \\ - [(2N + A) U_{sm}^{(k)'}(x) + Q U_{fn}^{(k)'}(x)] U_{sn}^{(i)}(x) - [Q U_{sm}^{(k)'}(x) + R U_{fn}^{(k)'}(x)] U_{fn}^{(i)}(x) \} \Big|_0^h = 0,$$

przy czym $i, k = 1, 2; m, n = 1, 2, 3, \dots$, a prim nad symbolem oznacza pochodną zwyczajną względem miejsca.

Współczynniki A_1, A_2, A_3, A_4 występujące w funkcjach własnych (2.10) oraz postacie współrzędnej uogólnionej $T_n^{(i)}(t)$ wyznacza się dla danych warunków brzegowych i początkowych wykorzystując warunek ortogonalności funkcji własnych.

Równania (2.7) możemy obecnie napisać jak następuje:

$$(2.13) \quad u_{sn}^{(i)}(x, t) = U_{sn}^{(i)}(x) T_n^{(i)}(t), \\ u_{fn}^{(i)}(x, t) = U_{fn}^{(i)}(x) T_n^{(i)}(t)$$

i podstawiając je do równań (2.4), które muszą być spełnione dla każdej pary wyrazów szeregu, przy (2.9) uzyskamy równania

$$(2.14) \quad \varrho_s U_{sn}^{(i)}(\ddot{T}_n^{(i)} - \omega_n^{(i)^2} T_n^{(i)}) = -b(U_{sn}^{(i)} - U_{fn}^{(i)}) \dot{T}_n^{(i)}, \\ \varrho_f U_{fn}^{(i)}(\ddot{T}_n^{(i)} - \omega_n^{(i)^2} T_n^{(i)}) = b(U_{sn}^{(i)} - U_{fn}^{(i)}) \dot{T}_n^{(i)}.$$

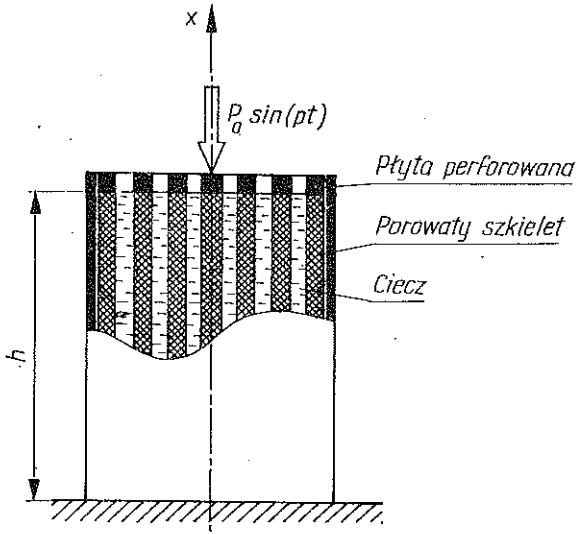
Równania te posłużą nam do wyznaczania postaci szeregu współrzędnej uogólnionej $T_n^{(i)}(t)$.

3. DRGANIA PERFOROWANEGO WALCA WYPEŁNIONEGO CIECZĄ LEPKĄ

Rozważać będziemy drgania swobodne i wymuszone perforowanego walca wypełnionego cieczą lepką. Schematycznie konstrukcję tłumika drgań, w którym elementem roboczym jest wypełniony cieczą porowaty walec przedstawia rys. 1. Dolna powierzchnia walca ($x = 0$) jest sztywno podparta, natomiast ciecz może swobodnie wypływać przez górną powierzchnię. W przypadku drgań wymuszonych zewnętrzna siła harmoniczna, wymuszająca drgania, przyłożona jest do szkieletu na górnej jego powierzchni ($x = h$).

3.1. Drgania swobodne

Drgania swobodne perforowanego walca wypełnionego cieczą lepką opisują całki (2.8). Stałe oraz postacie funkcji $T_n^{(i)}(t)$ określamy na podstawie



Rys. 1. Schemat wibroizolatora z perforowanym elementem roboczym

warunków brzegowych

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_s(0, t) = 0, & \quad u_f(0, t) = 0, \\ \left. \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial x} \right|_{x=h} = 0, & \quad \left. \frac{\partial u_f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=h} = 0 \end{aligned}$$

oraz warunków początkowych

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_s(x, 0) = u_{s_0}(x), & \quad u_f(x, 0) = u_{f_0}(x), \\ \dot{u}_s(x, 0) = 0, & \quad \dot{u}_f(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Warunki (3.2) oznaczają, że składniki ośrodka zostały w chwili początkowej ($t = 0$) wychylone ze stanu równowagi, a następnie swobodnie drgają.

Na podstawie warunków brzegowych (3.1) wyznaczmy dwie grupy częstości drgań własnych

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \omega_n^{(1)} &= \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c_s}{h}, \\ \omega_n^{(2)} &= \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c_w}{h} \end{aligned}$$

oraz postaci funkcji własnych

$$(3.4) \quad \begin{aligned} U_{sn}^{(1)} &= \sin\left(\frac{\omega_n^{(1)}}{c_s}x\right), & U_{sn}^{(2)} &= \sin\left(\frac{\omega_n^{(2)}}{c_w}x\right), \\ U_{fn}^{(1)} &= \delta_1 \sin\left(\frac{\omega_n^{(1)}}{c_s}x\right), & U_{fn}^{(2)} &= \delta_2 \sin\left(\frac{\omega_n^{(2)}}{c_w}x\right), \end{aligned}$$

a warunek ortogonalności (2.12) przyjmuje postać:

$$(3.5) \quad \int_0^h [\varrho_s U_{sn}^{(i)}(x) U_{sm}^{(k)}(x) + \varrho_f U_{fn}^{(i)}(x) U_{fm}^{(k)}(x)] dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \text{ lub } i \neq k, \\ M_n^{(i)} & \text{dla } n = m \text{ oraz } i = k, \end{cases}$$

gdzie

$$(3.6) \quad M_n^{(i)} = \int_0^h [\varrho_s (U_{sn}^{(i)}(x))^2 + \varrho_f (U_{fn}^{(i)}(x))^2] dx.$$

Wykorzystujemy warunek ortogonalności (3.5) w równaniach (2.14) i otrzymamy następujące równanie na określenie współrzędnej uogólnionej:

$$(3.7) \quad \ddot{T}_n^{(i)} + 2b_n^{(i)} \dot{T}_n^{(i)} + \omega_n^{(i)2} T_n^{(i)} = 0,$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{aligned} 2b_n^{(i)} &= b \frac{H_n^{(i)}}{M_n^{(i)}}, \\ H_n^{(i)} &= \int_0^h [U_{sn}^{(i)}(x) - U_{fn}^{(i)}(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Postać rozwiązania równania (3.7) zależy od stosunku współczynników tłumienia $b_n^{(i)}$ i częstości własnych $\omega_n^{(i)}$:

1) dla $b_n^{2(i)} > \omega_n^{2(i)}$

$$(3.9)_1 \quad T_n^{(i)}(t) = C_n^{(i)} \exp(r_{1n}^{(i)} t) + D_n^{(i)} \exp(r_{2n}^{(i)} t),$$

gdzie

$$(3.10)_1 \quad \begin{aligned} r_{1n}^{(i)} &= -b_n^{(i)} - \sqrt{b_n^{2(i)} - \omega_n^{2(i)}}, \\ r_{2n}^{(i)} &= -b_n^{(i)} + \sqrt{b_n^{2(i)} - \omega_n^{2(i)}}; \end{aligned}$$

2) dla $b_n^{2(i)} = \omega_n^{2(i)}$

$$(3.9)_2 \quad T_n^{(i)}(t) = \exp(-b_n^{(i)} t) [C_n^{(i)} t + D_n^{(i)}];$$

3) dla $b_n^{2(i)} < \omega_n^{2(i)}$

$$(3.9)_3 \quad T_n^{(i)} t = \exp(-b_n^{(i)} t) C_n^{(i)} \sin(\lambda_n^{(i)} t) + D_n^{(i)} \cos(\lambda_n^{(i)} t),$$

gdzie

$$(3.10)_2 \quad \lambda_n^{(i)} = \sqrt{\omega_n^{2(i)} - b_n^{2(i)}}.$$

Stałe występujące w równaniach (3.9) wyznaczamy z warunków początkowych (3.2). Dla tych warunków równania (2.8) przyjmą postacie:

$$(3.11)_1 \quad u_{s0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [U_{sn}^{(1)}(x) T_n^{(1)}(0) + U_{sn}^{(2)}(x) T_n^{(2)}(0)],$$

$$u_{f0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [U_{fn}^{(1)}(x) T_n^{(1)}(0) + U_{fn}^{(2)}(x) T_n^{(2)}(0)];$$

$$(3.11)_2 \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} [U_{sn}^{(1)}(x) \dot{T}_n^{(1)}(0) + U_{sn}^{(2)}(x) \dot{T}_n^{(2)}(0)],$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} [U_{fn}^{(1)}(x) \dot{T}_n^{(1)}(0) + U_{fn}^{(2)}(x) \dot{T}_n^{(2)}(0)].$$

Wykorzystując w powyższych wzorach warunek ortogonalności (3.5), otrzymamy

$$(3.12) \quad T_n^{(i)} = \Omega_n^{(i)} = \frac{1}{M_n^{(i)}} \int_0^h [\varrho_s U_{sn}^{(i)}(x) u_{s0}(x) + \varrho_f U_{fn}^{(i)}(x) u_{f0}(x)] dx,$$

$$\dot{T}_n^{(i)}(0) = 0$$

i z równań (3.9)_{1,2,3} wyznaczmy stałe:

1) dla $b_n^{2(i)} > \omega_n^{2(i)}$

$$(3.13)_1 \quad C_n^{(i)} = \frac{r_{2n}^{(i)}}{r_{2n}^{(i)} - r_{1n}^{(i)}} \Omega_n^{(i)},$$

$$D_n^{(i)} = -\frac{r_{1n}^{(i)}}{r_{2n}^{(i)} - r_{1n}^{(i)}} \Omega_n^{(i)};$$

2) dla $b_n^{2(i)} = \omega_n^{2(i)}$

$$(3.13)_2 \quad C_n^{(i)} = b_n^{(i)} \Omega_n^{(i)},$$

$$D_n^{(i)} = \Omega_n^{(i)};$$

3) dla $b_n^{2(i)} < \omega_n^{2(i)}$

$$(3.13)_3 \quad C_n^{(i)} = \frac{b_n^{(i)}}{\lambda_n^{(i)}} \Omega_n^{(i)},$$

$$D_n^{(i)} = \Omega_n^{(i)}.$$

Drgania swobodne walca opisane są równaniami (2.8), przy czym funkcje własne określone są wzorami (3.4), a współrzędne uogólnione wzorami (3.9), zaś stałe wzorami (3.13).

3.2. Drgania spowodowane wymuszeniem siłowym

Analizować będziemy drgania walca spowodowane wymuszeniem siłą harmoniczną, przyłożoną do górnej powierzchni walca ($x = h$) i działającą na szkielet.

Drgania te są określone następującymi warunkami brzegowymi:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \sigma_s(h, t) &= f(t) = p_0 \sin(pt), \\ \sigma_f(h, t) &= 0, \\ u_s(0, t) &= u_f(0, t) = 0, \end{aligned}$$

przy czym p_0 jest amplitudą siły wymuszającej odniesionej do powierzchni przekroju poprzecznego walca, a p jest częstością wymuszenia.

Przyjmujemy zerowe warunki początkowe

$$(3.15) \quad u_s(x, 0) = u_f(x, 0) = \dot{u}_s(x, 0) = \dot{u}_f(x, 0) = 0.$$

Rozwiązań zagadnienia szukamy w postaci sumy

$$(3.16) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= u_{1s}(x, t) + u_{2s}(x) \cdot f(t), \\ u_f(x, t) &= u_{1f}(x, t) + u_{2f}(x) \cdot f(t). \end{aligned}$$

Funkcje $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$ dobieramy w ten sposób, by funkcje $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ spełniały jednorodne warunki brzegowe

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma_{1s}(h, t) &= 0, \\ \sigma_{1f}(h, t) &= 0, \\ u_{1s}(0, t) &= u_{1f}(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Gdy przyjmiemy liniowe postacie funkcji $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$

$$(3.18) \quad \begin{aligned} u_{2s}(x) &= \alpha \cdot x, \\ u_{2f}(x) &= \beta \cdot x, \end{aligned}$$

to spełniają one przyjęte warunki, jeżeli

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{R}{(2N + A)R - Q^2}, \\ \beta &= -\frac{Q}{(2N + A)R - Q^2}. \end{aligned}$$

Funkcje $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ znajdujemy rozwiązując niejednorodny układ równań postaci

$$(3.20) \quad \begin{aligned} (2N + A)u''_{1s}(x, t) + Qu''_{1f}(x, t) - \varrho_s \ddot{u}_{1s}(x, t) - \\ - b[\dot{u}_{1s}(x, t) - \dot{u}_{1f}(x, t)] = g_s(x, t), \\ Qu''_{1s}(x, t) + Ru''_{1f}(x, t) - \varrho_f \ddot{u}_{1f}(x, t) + \\ + b[\dot{u}_{1s}(x, t) - \dot{u}_{1f}(x, t)] = g_f(x, t), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.21) \quad \begin{aligned} g_s(x, t) = \varrho_s u_{2s}(x) \dot{f}(t) + b[u_{2s}(x) - u_{2f}(x)] \dot{f}(t) - \\ - [(2N + A)u''_{2s}(x) + Qu''_{2f}(x)] f(t), \\ g_f(x, t) = \varrho_f u_{2f}(x) \dot{f}(t) - b[u_{2s}(x) - u_{2f}(x)] \dot{f}(t) - \\ - [Qu''_{2s}(x) + Ru''_{2f}(x)] f(t), \end{aligned}$$

przy czym, jak wspomnieliśmy, spełniają one warunki (3.17) i następujące warunki początkowe:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} u_{1s}(x, 0) &= -u_{2s}(x) f(0), \\ u_{1f}(x, 0) &= -u_{2f}(x) f(0), \\ \dot{u}_{1s}(x, 0) &= -u_{2s}(x) \dot{f}(0), \\ \dot{u}_{1f}(x, 0) &= -u_{2f}(x) \dot{f}(0). \end{aligned}$$

Zagadnienie własne dla funkcji $u_{1s}(x, t)$ i $u_{1f}(x, t)$ jest analogiczne do rozważanego w poprzednim akapicie zagadnienia drgań swobodnych. Całki będziemy więc budować za pomocą funkcji własnych postaci (3.4). Całki te są sumą całki ogólnej $\dot{u}_{1s}^*(x, t)$, $\dot{u}_{1f}^*(x, t)$ równań (3.20) jednorodnych ($g_s(x, t) = 0$, $g_f(x, t) = 0$) przy warunkach początkowych (3.22) oraz całki szczególnej $\ddot{u}_{1s}^{**}(x, t)$, $\ddot{u}_{1f}^{**}(x, t)$ równań niejednorodnych (3.20) przy zerowych warunkach początkowych

$$(3.23) \quad \begin{aligned} u_{1s}(x, t) &= \dot{u}_{1s}^*(x, t) + \ddot{u}_{1s}^{**}(x, t), \\ u_{1f}(x, t) &= \dot{u}_{1f}^*(x, t) + \ddot{u}_{1f}^{**}(x, t). \end{aligned}$$

Ogólne postacie tych rozwiązań napiszemy następująco:

$$u_{1s}^*(x, t) = \sum_{n=1}^s U_{sn}^{(1)}(x) T_n^{*(1)}(t) + U_{sn}^{(2)}(x) T_n^{*(2)}(t), \quad (3.24)$$

$$u_{1f}^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{fn}^{(1)}(x) T_n^{*(1)}(t) + U_{fn}^{(2)}(x) T_n^{*(2)}(t);$$

$$u_{1s}^{**}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{sn}^{(1)}(x) \xi_n^{(1)}(t) + U_{sn}^{(2)}(x) \xi_n^{(2)}(t), \quad (3.25)$$

$$u_{1f}^{**}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{fn}^{(1)}(x) \xi_n^{(1)}(t) + U_{fn}^{(2)}(x) \xi_n^{(2)}(t).$$

Współrzędne uogólnione $T_n^{(i)}(t)$ spełniają równania (3.7)

$$T_n^{(i)} + 2b_n^{(i)} \dot{T}_n^{(i)} + \omega_n^{2(i)} T_n^{(i)} = 0, \quad (3.26)$$

natomiast można pokazać, że współrzędne uogólnione $\xi_n^{(i)}(t)$ spełniać muszą równania niejednorodne

$$\ddot{\xi}_n^{(i)} + 2b_n^{(i)} \dot{\xi}_n^{(i)} + \omega_n^{2(i)} \xi_n^{(i)} = Q(t), \quad (3.27)$$

gdzie funkcja $Q(t)$ dla $f(t) = p_0 \sin(pt)$ ma postać

$$Q(t) = \Gamma_{1n}^{(i)} \sin(pt) + \Gamma_{2n}^{(i)} \cos(pt), \quad (3.28)$$

przy czym

$$\Gamma_{1n}^{(i)} = -\frac{1}{M_n^{(i)}} p_0 p^2 (\varrho_s \alpha + \varrho_f \beta \delta_i) \int_0^h \times U_{sn}^{(i)}(x) dx, \quad (3.29)$$

$$\Gamma_{2n}^{(i)} = \frac{1}{M_n^{(i)}} p_0 p b (\alpha - \beta) (1 - \delta_i) \int_0^h \times U_{sn}^{(i)}(x) dx.$$

Otrzymane następujące rozwiązania równań (3.26) i (3.27) oraz stałe wyznaczone z warunków początkowych, postaci ogólnych (3.24) i (3.25), i warunków ortogonalności (3.5):

1) dla $b_n^{2(i)} > \omega_n^{2(i)}$

$$T_n^{(i)}(t) = C_n^{(i)} \exp(r_{1n}^{(i)} t) + D_n^{(i)} \exp(r_{2n}^{(i)} t), \quad (3.30)_1$$

$$\xi_n^{(i)}(t) = \hat{C}_n^{(i)} \exp(r_{1n}^{(i)} t) + \hat{D}_n^{(i)} \exp(r_{2n}^{(i)} t) + E_n^{(i)} \sin(pt) + F_n^{(i)} \cos(pt);$$

$$C_n^{(i)} = \frac{p_0 p}{r_{2n}^{(i)} - r_{1n}^{(i)}} \frac{R_n^{(i)}}{M_n^{(i)}}, \quad (3.31)_1$$

$$D_n^{(i)} = -C_n^{(i)},$$

$$\hat{C}_n^{(i)} = \frac{p E_n^{(i)} - r_{2n}^{(i)} F_n^{(i)}}{r_{2n}^{(i)} - r_{1n}^{(i)}},$$

$$\hat{D}_n^{(i)} = -\frac{p E_n^{(i)} - r_{1n}^{(i)} F_n^{(i)}}{r_{2n}^{(i)} - r_{1n}^{(i)}};$$

2) dla $b_n^{2(i)} = \omega_n^{2(i)}$

$$(3.30)_2 \quad \begin{aligned} \overset{*}{T}_n^{(i)}(t) &= \exp(-b_n^{(i)}t)[\overset{*}{C}_n^{(i)}t + \overset{*}{D}_n^{(i)}], \\ \overset{*}{\xi}_n^{(i)}(t) &= \exp(-b_n^{(i)}t)[\hat{C}_n^{(i)}t + \hat{D}_n^{(i)}] + E_n^{(i)}\sin(pt) + F_n^{(i)}\cos(pt); \end{aligned}$$

$$\overset{*}{C}_n^{(i)} = -p_0P \frac{R_n^{(i)}}{M_n^{(i)}},$$

$$\overset{*}{D}_n^{(i)} = 0,$$

$$\hat{C}_n^{(i)} = pE_n^{(i)} - b_n^{(i)}F_n^{(i)},$$

$$\hat{D}_n^{(i)} = -F_n^{(i)};$$

(3.31)₂3) dla $b_n^{2(i)} < \omega_n^{2(i)}$

$$(3.30)_3 \quad \begin{aligned} \overset{*}{T}_n^{(i)}(t) &= \exp(-b_n^{(i)}t)[\overset{*}{C}_n^{(i)}\sin(\lambda_n^{(i)}t) + \overset{*}{D}_n^{(i)}\cos(\lambda_n^{(i)}t)], \\ \overset{*}{\xi}_n^{(i)}(t) &= \exp(-b_n^{(i)}t)[\hat{C}_n^{(i)}\sin(\lambda_n^{(i)}t) + \hat{D}_n^{(i)}\cos(\lambda_n^{(i)}t)] \\ &\quad + E_n^{(i)}\sin(pt) + F_n^{(i)}\cos(pt); \end{aligned}$$

$$\overset{*}{C}_n^{(i)} = -p_0P \frac{R_n^{(i)}}{\lambda_n^{(i)}M_n^{(i)}},$$

$$\overset{*}{D}_n^{(i)} = 0,$$

$$\hat{C}_n^{(i)} = -\frac{1}{\lambda_n^{(i)}}[pE_n^{(i)} + b_n^{(i)}F_n^{(i)}],$$

$$\hat{D}_n^{(i)} = -F_n^{(i)}.$$

(3.31)₃

We wzorach (3.30) i (3.31) $r_{1n}^{(i)}$ i $r_{2n}^{(i)}$ są określone wzorami (3.10)₁, a $\lambda_n^{(i)}$ wzorem (3.10)₂,

$$(3.32) \quad R_n^{(i)} = \varrho_s \int_0^h u_{2s}(x) U_{sn}^{(i)}(x) dx + \varrho_f \int_0^h u_{2f}(x) U_{fn}^{(i)}(x) dx$$

oraz

$$(3.33) \quad \begin{aligned} E_n^{(i)} &= \frac{(\omega_n^{2(i)} - p^2)\Gamma_{1n}^{(i)} + 2b_n^{(i)}p\Gamma_{2n}^{(i)}}{(\omega_n^{2(i)} - p^2)^2 + 4b_n^{2(i)}p^2}, \\ F_n^{(i)} &= \frac{(\omega_n^{2(i)} - p^2)\Gamma_{2n}^{(i)} - 2b_n^{(i)}p\Gamma_{1n}^{(i)}}{(\omega_n^{2(i)} - p^2)^2 + 4b_n^{2(i)}p^2}. \end{aligned}$$

W taki sposób określiliśmy wszystkie poszukiwane funkcje. Stałe i przemieszczenia w sposób ogólny możemy napisać następująco:

$$(3.34) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 U_{sn}^{(i)}(x) [\overset{*}{T}_n^{(i)}(t) + \overset{*}{\xi}_n^{(i)}(t)] + u_{2s}(x) f(t), \\ u_f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 U_{fn}^{(i)}(x) [\overset{*}{T}_n^{(i)}(t) + \overset{*}{\xi}_n^{(i)}(t)] + u_{2f}(x) f(t). \end{aligned}$$

We wzorach ogólnych (3.34) można wyróżnić składniki opisujące drgania swobodne układu, spowodowane nagłym przyłożeniem obciążenia:

1) dla $b_n^{2(i)} > \omega_n^{2(i)}$

$$(3.35)_1 \quad \begin{aligned} u_{sn}^{sw(i)} &= \sum_n \sum_i U_{sn}^{(i)} [(\hat{C}_n^{(i)} + \hat{C}_n^{(i)}) \exp(r_{1n}^{(i)} t) + (\hat{D}_n^{(i)} + \hat{D}_n^{(i)}) \exp(r_{2n}^{(i)} t)], \\ u_{fn}^{sw(i)} &= \sum_n \sum_i U_{fn}^{(i)} [(\hat{C}_n^{(i)} + \hat{C}_n^{(i)}) \exp(r_{1n}^{(i)} t) + (\hat{D}_n^{(i)} + \hat{D}_n^{(i)}) \exp(r_{2n}^{(i)} t)]; \end{aligned}$$

2) dla $b_n^{2(i)} = \omega_n^{2(i)}$

$$(3.35)_2 \quad \begin{aligned} u_{sn}^{sw(i)} &= \sum_n \sum_i U_{sn}^{(i)} \exp(-b_n^{(i)} t) [(\hat{C}_n^{(i)} + \hat{C}_n^{(i)}) t + (\hat{D}_n^{(i)} + \hat{D}_n^{(i)})], \\ u_{fn}^{sw(i)} &= \sum_n \sum_i U_{fn}^{(i)} \exp(-b_n^{(i)} t) [(\hat{C}_n^{(i)} + \hat{C}_n^{(i)}) t + (\hat{D}_n^{(i)} + \hat{D}_n^{(i)})]; \end{aligned}$$

3) dla $b_n^{2(i)} < \omega_n^{2(i)}$

$$(3.35)_3 \quad \begin{aligned} u_{sn}^{sw(i)} &= \sum_n \sum_i U_{sn}^{(i)} \exp(-b_n^{(i)} t) [(\hat{C}_n^{(i)} + \hat{C}_n^{(i)}) \sin(\lambda_n^{(i)} t) + \\ &\quad + (\hat{D}_n^{(i)} + \hat{D}_n^{(i)}) \cos(\lambda_n^{(i)} t)], \\ u_{fn}^{sw(i)} &= \sum_n \sum_i U_{fn}^{(i)} \exp(-b_n^{(i)} t) [(\hat{C}_n^{(i)} + \hat{C}_n^{(i)}) \sin(\lambda_n^{(i)} t) + \\ &\quad + (\hat{D}_n^{(i)} + \hat{D}_n^{(i)}) \cos(\lambda_n^{(i)} t)] \end{aligned}$$

oraz składniki opisujące drgania wymuszone, które dla wszystkich trzech przypadków mają postać:

$$(3.36) \quad \begin{aligned} u_{sn}^{wym(i)} &= \sum_n \sum_i U_{sn}^{(i)} [E_n^{(i)} \sin(pt) + F_n^{(i)} \cos(pt)] + u_{2s}(x) \cdot f(t), \\ u_{fn}^{wym(i)} &= \sum_n \sum_i U_{fn}^{(i)} [E_n^{(i)} \sin(pt) + F_n^{(i)} \cos(pt)] + u_{2f}(x) \cdot f(t). \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że drgania własne (swobodne) układu wygasają w krótkim czasie (zwłaszcza w układach dysypatywnych, co pokażemy dalej), w dalszym ciągu będziemy uwzględniać tylko funkcje $u_{sn}^{wym(i)}(x, t)$ oraz $u_{fn}^{wym(i)}(x, t)$ opisujące drgania wymuszone.

3.3. Współczynnik przenoszenia obciążenia

Określimy współczynnik przenoszenia obciążenia jako stosunek siły (jej amplitudy) przenoszonej na podłoże do siły (jej amplitudy) wymuszającej drgania:

$$(3.37) \quad \gamma_1 = \frac{\max |\sigma(0, t)|}{\max |f(t)|}.$$

Izolacja jest skuteczna jeżeli współczynnik ten w pewnym, pożądanym zakresie częstotliwości wymuszenia p jest mniejszy od jedności.

Obecnie należy zbadać jak lepkość cieczy wpływa na tak określoną skuteczność wibroizolatora.

Naprężenie w dowolnym przekroju walca, wywołane drganiami wymuszonymi, otrzymujemy ze związków fizycznych (2.2)

$$(3.38) \quad \sigma(x, t) = \sigma_s(x, t) + \sigma_f(x, t)$$

i dla $x = 0$ otrzymamy

$$(3.39) \quad \sigma(0, t) = \bar{A} \sin(pt) + \bar{B} \cos(pt),$$

gdzie

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \bar{A} = & [(2N + A + Q) + \delta_1(Q + R)] \sum_n \frac{\omega_n^{(1)}}{c_s} E_n^{(1)} + \\ & + [(2N + A + Q) + \delta_2(Q + R)] \sum_n \frac{\omega_n^{(2)}}{c_w} E_n^{(2)} + \\ & + [(2N + A + Q)\alpha + (Q + R)\beta] \cdot p_0; \\ \bar{B} = & [(2N + A + Q) + \delta_1(Q + R)] \sum_n \frac{\omega_n^{(1)}}{c_s} F_n^{(1)} + \\ & + [(2N + A + Q) + \delta_2(Q + R)] \sum_n \frac{\omega_n^{(2)}}{c_w} F_n^{(2)}. \end{aligned}$$

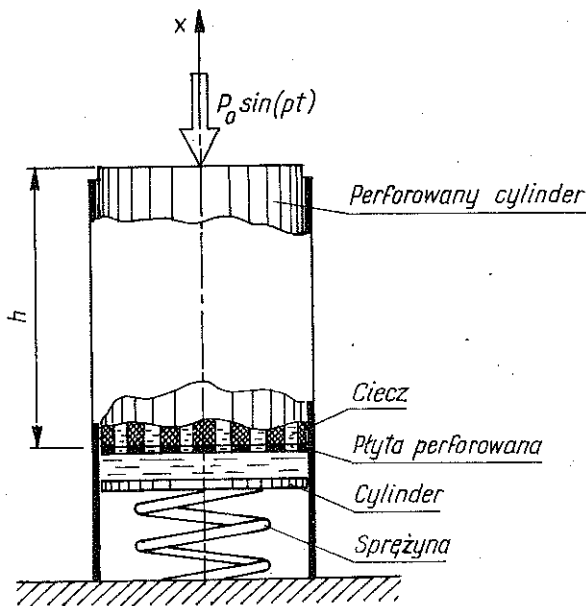
Zatem współczynnik γ_1 (3.37) wyraża się następująco:

$$(3.41) \quad \gamma_1 = \frac{\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}}{p_0}.$$

4. DRGANIA PERFOROWANEGO WALCA WYPELNIONEGO CIECZĄ ZE STEROWANYM PRZEMIESZCZENIEM CIECZY

Jak pokazano w pracy [1], analizowany kompozyt, oprócz doboru odpowiedniej jego struktury fizycznej i geometrycznej, stwarza możliwości dodatkowego sterowania parametrem wibroizolacji. Jedno z rozwiązań polega na tym, że ciecz ma możliwość przemieszczania się poza kontur perforowanego walca (jego dolną powierzchnię). Wyływającą ciecz ogranicza podparty na sprężynie o danej sztywności k tłoczek (rys. 2). Ugięcie sprężyny, proporcjonalne do ciśnienia w cieczy, możemy regulować przez odpowiedni dobór jej sztywności.

Analizować będziemy drgania swobodne i wymuszone takiego układu oraz



Rys. 2. Schemat wibroizolatora z dodanym elementem sprężystym

wpływ lepkości cieczy na interesujący nas współczynnik przenoszenia obciążenia.

4.1. Drgania swobodne

Warunki brzegowe przyjmujemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \sigma_s(h, t) + \sigma_f(h, t) &= 0, \\
 u_s(h, t) &= u_f(h, t), \\
 u_s(0, t) &= 0, \\
 \sigma_f(0, t) &= -k \cdot u_f(0, t)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

oraz warunki początkowe w postaci (3.2).

Drugi z warunków (4.1) oznacza, że górna powierzchnia walca jest nieprzepuszczalna dla cieczy.

Jeżeli ogólną postać funkcji własnych

$$\begin{aligned}
 U_s(x) &= A_1 e^{i\frac{\omega}{c_s}x} + A_2 e^{-i\frac{\omega}{c_s}x} + A_3 e^{i\frac{\omega}{c_w}x} + A_4 e^{-i\frac{\omega}{c_w}x}, \\
 U_f(x) &= \delta_1 (A_1 e^{i\frac{\omega}{c_s}x} + A_2 e^{-i\frac{\omega}{c_s}x}) + \delta_2 (A_3 e^{i\frac{\omega}{c_w}x} + A_4 e^{-i\frac{\omega}{c_w}x})
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

podstawimy do warunków (4.1), to przy wykorzystaniu tożsamości

$$(4.3) \quad \begin{aligned} 2N + A + Q\delta_1 &= \varrho_s c_s^2, & Q + R\delta_1 &= \varrho_f c_s^2 \delta_1, \\ 2N + A + Q\delta_2 &= \varrho_s c_w^2, & Q + R\delta_2 &= \varrho_f c_w^2 \delta_2. \end{aligned}$$

wyznacznik charakterystyczny układu równań można napisać jako

$$(4.4) \quad \begin{aligned} &\varrho_s c_s c_w \omega \{(\varrho_s + \varrho_f \delta_1)(1 - \delta_1)\delta_2 + (\varrho_s + \varrho_f \delta_2)(1 - \delta_2)\delta_1\} - \\ &\quad - \sin\left(\frac{\omega}{c_s} h\right) \sin\left(\frac{\omega}{c_w} h\right) \varrho_f \omega \{(\varrho_s + \varrho_f \delta_1)(1 - \delta_2)\delta_1 c_s^2 + \\ &\quad \quad \quad + (\varrho_s + \varrho_f \delta_2)(1 - \delta_2)\delta_2 c_w^2\} - \\ &\quad - \cos\left(\frac{\omega}{c_s} h\right) \cos\left(\frac{\omega}{c_w} h\right) \omega \varrho_f c_s c_w \{(\varrho_s + \varrho_f \delta_1)(1 - \delta_2)\delta_2 + \\ &\quad \quad \quad + (\varrho_s + \varrho_f \delta_2)(1 - \delta_1)\delta_1\} - \\ &\quad - \sin\left(\frac{\omega}{c_w} h\right) \cos\left(\frac{\omega}{c_s} h\right) c_s (\varrho_s + \varrho_f \delta_1) (\delta_1 - \delta_2) (1 - \delta_2) \cdot k + \\ &\quad + \sin\left(\frac{\omega}{c} h\right) \cos\left(\frac{\omega}{c} h\right) c_w (\varrho_s + \varrho_f \delta_2) (\delta_1 - \delta_2) (1 - \delta_1) \cdot k = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem równania (4.4) jest ciąg wartości $\{\omega_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, który na podstawie postaci funkcji własnych (4.2) możemy rozdzielić na dwie grupy częstości $\{\omega_n^{(1)}\}$ i $\{\omega_n^{(2)}\}$, por. [1]). Wtedy funkcje (4.2) przyjmą postać

$$U_{m_n}^{(i)}(x) = \bar{A}_{1n}^{(i)} \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) + \bar{A}_{2n}^{(i)} \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) + \bar{A}_{3n}^{(i)} \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x\right) + \\ + \bar{A}_{4n}^{(i)} \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x\right),$$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} U_{f_n}^{(i)}(x) &= \delta_1 \left(\bar{A}_{1n}^{(i)} \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) + \bar{A}_{2n}^{(i)} \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} x\right) \right) + \\ &\quad + \delta_2 \left(\bar{A}_{3n}^{(i)} \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x\right) + \bar{A}_{4n}^{(i)} \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} x\right) \right), \\ &\quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \bar{A}_{1n}^{(i)} &= (1 - \delta_2)(\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} h\right) \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} h\right) + \\ &\quad + (1 - \delta_1)(\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} h\right) \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} h\right) - \\ &\quad - (1 - \delta_2)(\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w; \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \bar{A}_{2n}^{(i)} = & (1 - \delta_2)(\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} h\right) \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} h\right) - \\ & - (1 - \delta_1)(\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} h\right) \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} h\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{3n}^{(i)} = & (1 - \delta_1)(\varrho_s + \varrho_f \delta_2) c_w \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} h\right) \sin\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} h\right) + \\ & + (1 - \delta_2)(\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_s} h\right) \cos\left(\frac{\omega_n^{(i)}}{c_w} h\right) - \\ & - (1 - \delta_1)(\varrho_s + \varrho_f \delta_1) c_s; \end{aligned}$$

$$\bar{A}_{4n}^{(i)} = -\bar{A}_{2n}^{(i)}.$$

Warunek ortogonalności funkcji własnych ma ogólną postać (3.5), (3.6), do której należy podstawić funkcje własne (4.5), (4.6). Rozwiązania ogólne drgań swobodnych mają postać

$$(4.7) \quad \begin{aligned} u_s(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 U_{sn}^{(i)}(x) T_n^{(i)}(t), \\ u_f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 U_{fn}^{(i)}(x) T_n^{(i)}(t), \end{aligned}$$

gdzie $U_{sn}^{(i)}(x)$ i $U_{fn}^{(i)}(x)$ określają wzory (4.5).

Współrzędne uogólnione $T_n^{(i)}(t)$ wyrażają się wzorami (3.9)_{1,2,3}, przy stałych (3.13)_{1,2,3} i (3.12).

4.2. Drgania wymuszone siłą harmoniczną

Rozważać będziemy drgania wymuszone siłą harmonicznie zmienną w czasie

$$(4.8) \quad f(t) = p_0 \sin(pt)$$

przyłożoną do górnej, nieprzepuszczalnej powierzchni walca ($x = h$). Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \sigma_s(h, t) + \sigma_f(h, t) &= -f(t) = -p_0 \sin(pt), \\ u_s(h, t) &= u_f(h, t), \\ u_s(0, t) &= 0, \\ \sigma_f(0, t) &= -k \cdot u_f(0, t) \end{aligned}$$

oraz zerowe warunki początkowe.

Jak poprzednio rozwiązań poszukujemy w postaci (3.16), przy czym funkcje $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$ przyjmujemy obecnie w postaci

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u_{2s} &= \bar{\alpha} \cdot x, \\ u_{2f}(x) &= \bar{\beta}x + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})h. \end{aligned}$$

Spełniają one warunki brzegowe (4.9), jeżeli

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \bar{\alpha} &= -\frac{R - kh}{W}, \\ \bar{\beta} &= \frac{Q + kh}{W}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.12) \quad W = [(2N + A)R - Q^2] - kh[2N + A + 2Q + R].$$

Wykorzystując procedurę przedstawioną w punkcie 3. i zachowując stosowaną w tym punkcie notację rozwiązania zapisują się formalnie wzorami (3.35) i (3.36), stałe w nich występujące wzorami (3.31), (3.32) i (3.33) oraz (3.29), przy czym należy pamiętać, że w wymienionych wzorach funkcje własne są postaci (4.5), a funkcje $u_{2s}(x)$ i $u_{2f}(x)$ określone są wzorami (4.10).

4.3. Współczynnik przenoszenia obciążenia

Zdefiniowany wzorem (3.37) współczynnik przenoszenia obciążenia dla zagadnienia rozpatrywanego w tym punkcie możemy wyrazić następująco:

$$(4.13) \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}}{p_0},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= (2N + A + Q) \left[\bar{\alpha} p_0 + \sum_n \sum_i \left\{ \frac{\partial U_{sn}^{(i)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} E_n^{(i)} \right\} \right] + \\ &\quad + (Q + R) \left[\bar{\beta} p_0 + \sum_n \sum_i \left\{ \frac{\partial U_{fn}^{(i)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} E_n^{(i)} \right\} \right]; \\ \bar{B} &= (2N + A + Q) \sum_n \sum_i \left\{ \frac{\partial U_{sn}^{(i)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} F_n^{(i)} \right\} + \\ &\quad + (Q + R) \sum_n \sum_i \left\{ \frac{\partial U_{fn}^{(i)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} F_n^{(i)} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, i = 1, 2. \end{aligned}$$

5. ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

W punkcie tym dokonamy analizy wyników obliczeń numerycznych. Celem tej pracy było badanie własności tłumiących ośrodków porowatych wypełnionych cieczą. W związku z tym zbadano wpływ lepkości cieczy wypełniającej pory na tłumienie drgań swobodnych, a także na współczynnik przenoszenia obciążenia w przypadku drgań wymuszonych.

Otrzymano zamknięte rozwiązanie postawionego problemu w postaci szeregów według układu podwójnych funkcji własnych. W obliczeniach numerycznych ograniczono się do sumowania dziesięciu pierwszych wyrazów szeregu. Uwzględnienie większej ilości wyrazów nie wносиło praktycznie żadnych zmian do uzyskanych wartości liczbowych.

Do obliczeń przyjęto następujące dane [4]:

$$(5.1) \quad 2N + A = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2, \quad R = 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, \quad Q = 1 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, \\ \rho_s = 2126 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_f = 187 \text{ kg/m}^3,$$

przy czym współczynnik tłumienia b zależny od lepkości cieczy zmieniano w zakresie

$$(5.2) \quad b = 0 - 10^8 \text{ Ns/m}^4,$$

natomiast sztywność sprężyny (punkt 4) w zakresie

$$(5.3) \quad k = 0 - 10^8 \text{ N/m}.$$

Rysunek 3 przedstawia naprężenia w szkielecie (w połowie wysokości walca) wywołane drganiami swobodnymi walca wychylonego z położenia równowagi w chwili początkowej $t = 0$.

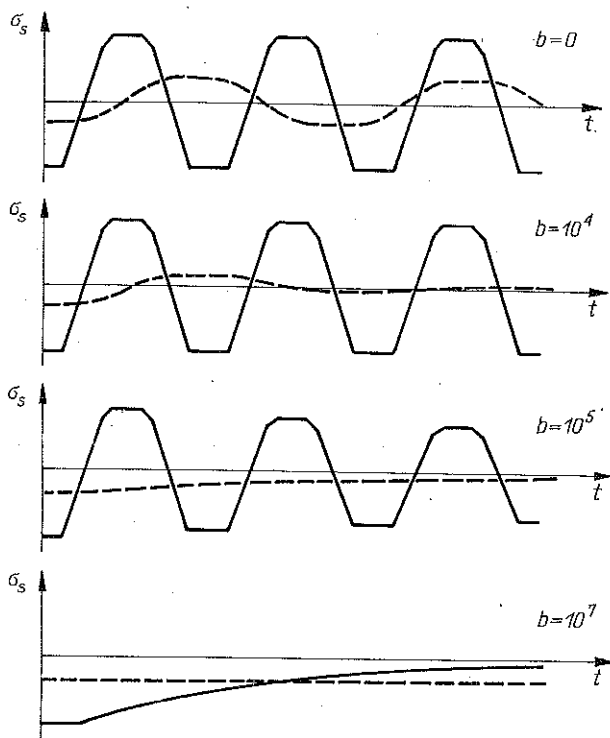
W warunkach początkowych (3.2) przyjęto

$$(5.4) \quad u_{s0}(x) = 0,02 \frac{x}{h}, \\ u_{f0}(x) = -\frac{1-f}{f} u_{s0}(x).$$

Postać wzoru (5.4b) jest przybliżona. Uzyskano go, pomijając ściślność składników przy założeniu, że w trakcie deformacji nieściśliwy materiał szkieletu wypełnia pory, wypychając tym samym nieściśliwą ciecz. Przyjęto porowatość początkową $f = 0,19$.

Na rys. 3 linią ciągłą oznaczono drgania wywołane falą szybką, a linią przerywaną drgania wywołane falą wolną. Drgania szkieletu są superpozycją obu rodzajów drgań.

Widoczne jest, że dla cieczy nielepkiej ($b = 0$) udział fali szybkiej w przenoszeniu naprężeń w szkielecie jest większy niż fali wolnej. Jak wynika z przedstawionych wykresów, dla $b \neq 0$ drgania wywołane falą wolną są silniej



Rys. 3. Drgania swobodne perforowanego szkieletu nasyconego cieczą

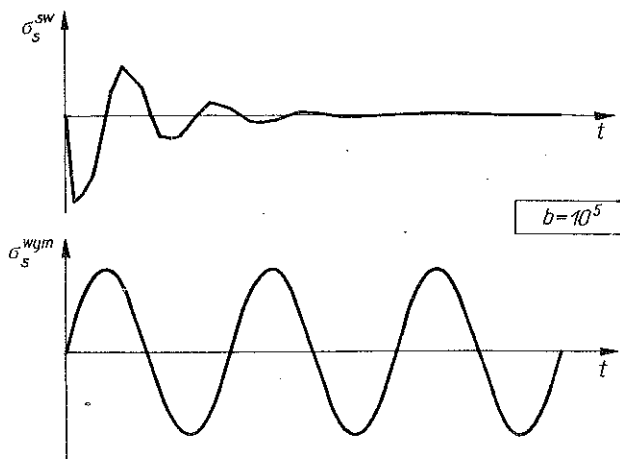
tlumione niż drgania wywołane falą szybką. Tak np. dla $b = 10^5 \text{ Ns/m}^4$ drgania wywołane falą wolną są tłumione nadkrytycznie, podczas gdy drgania wywołane falą szybką są nadal słabo tłumione. Dla dużej lepkości cieczy ($b = 10^7 \text{ Ns/m}^4$) oba rodzaje drgań są silnie tłumione.

Rysunek 4 przedstawia przykładowo drgania wymuszone perforowanego walca wypełnionego cieczą lepką ($b \neq 0$) siłą harmoniczną zmienną. Drgania te są superpozycją drgań wymuszonych o danej częstotliwości p oraz drgań swobodnych walca (własnych) wywołanych nagłym przyłożeniem obciążenia. Te ostatnie są szybko zanikającymi w czasie. Uzasadnia to pomijanie tychże drgań w obliczaniu współczynnika przenoszenia obciążenia.

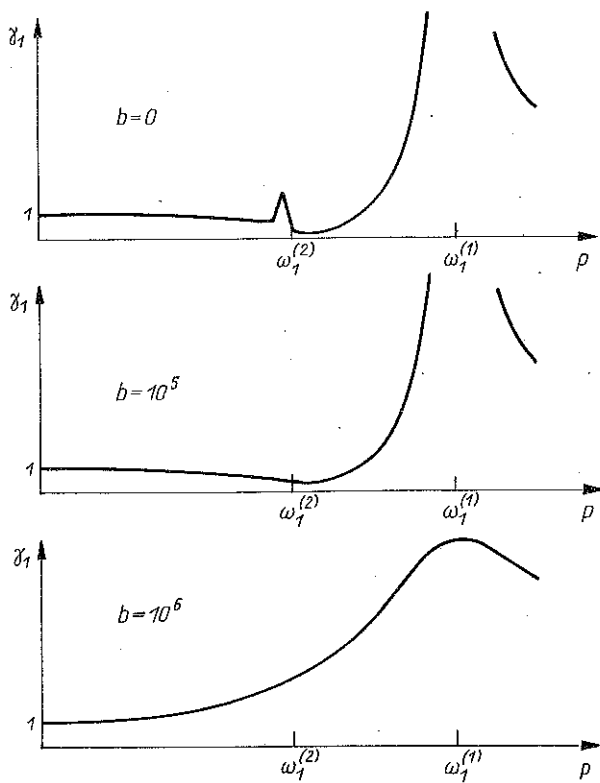
Na rys. 5 przedstawiono wykres zależności współczynnika przenoszenia obciążenia γ_1 (3.41) od częstości drgań wymuszonych w zakresie pierwszych częstości drgań własnych.

Na podstawie wzorów (3.40) i postaci funkcji $E_n^{(i)}$ i $F_n^{(i)}$, (3.33) możemy stwierdzić, że jeżeli współczynnik tłumienia b jest różny od zera, to nie występuje ostry rezonans. Jest to cecha korzystna, jednakże, jak wynika z rys. 5, wzrost lepkości cieczy powoduje, że zakres skutecznej wibroizolacji ($\gamma_1 < 1$) znacznie się zawęża, a dla dużych lepkości wibroizolacja jest zła.

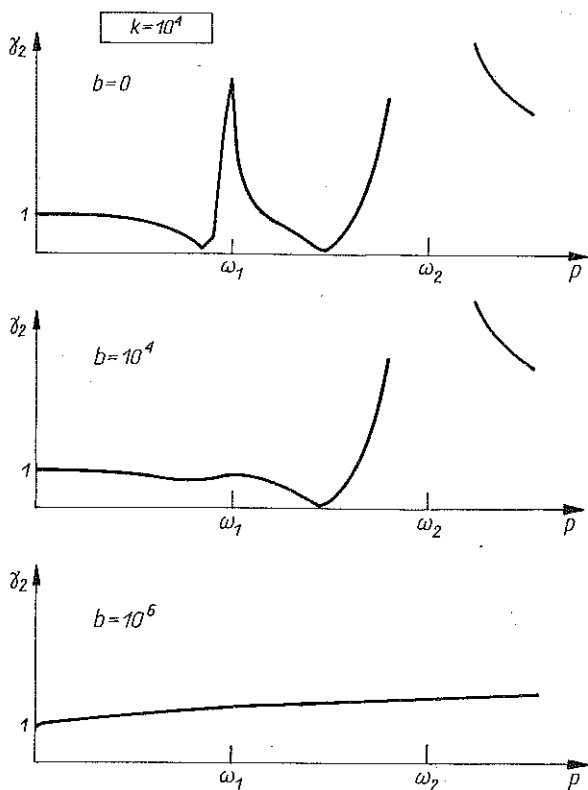
Do tych samych wniosków dojdziemy na podstawie rys. 6 i 7 przed-



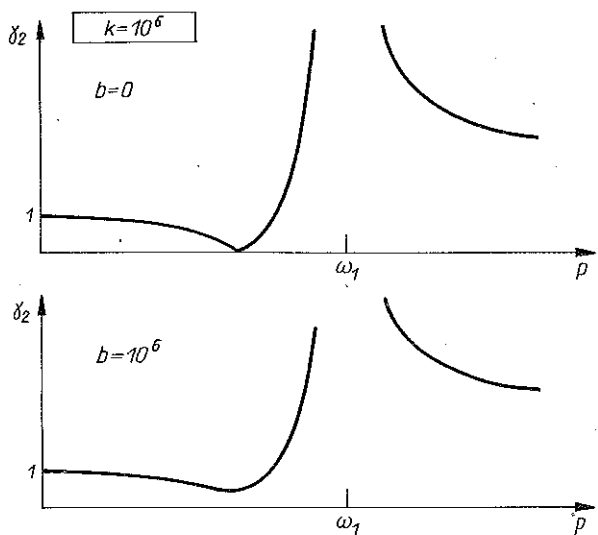
Rys. 4. Drgania swobodne (własne) i wymuszone perforowanego walca



Rys. 5. Współczynnik przenoszenia obciążenia γ_1

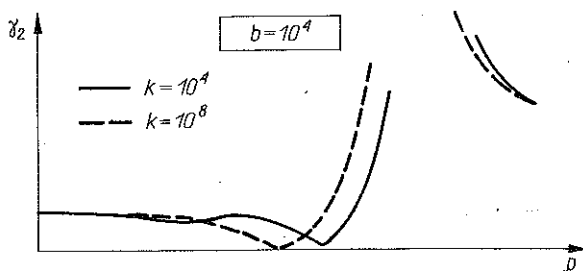


Rys. 6. Współczynnik przenoszenia obciążenia γ_2 dla danej sztywności sprężyny ($k = 10^4$ N/m)



Rys. 7. Współczynnik przenoszenia obciążenia γ_2 dla danej sztywności sprężyny ($k = 10^6$ N/m)

stawiających charakterystyki częstotliwościowe współczynnika przenoszenia obciążenia γ_2 (4.13) dla wybranych wartości sztywności sprężyny. Tutaj również wzrost lepkości cieczy pogarsza efekt wibroizolacji. Sama sztywność sprężyny ma także wpływ na efekt wibroizolacji, co przedstawia rys. 8. Bardziej szczegółową analizę tego zjawiska zamieszczono w pracy [1].



Rys. 8. Współczynnik przenoszenia obciążenia γ_2 dla danej lepkości cieczy ($b = 10^4$ Ns/m⁴)

Podsumowując uzyskane wyniki stwierdzamy:

- 1) Własności tłumiące ośrodków porowatych nasyconych cieczą wzrastają wraz ze wzrostem współczynnika tłumienia, który zależy od lepkości cieczy, przepuszczalności ośrodka, porowatości oraz prędkości względnej szkieletu i cieczy.
- 2) Bardziej tłumione są drgania pochodzące od fali wolnej niż od fali szybkiej.
- 3) Wzrost własności tłumiących powoduje pogorszenie się efektu wibroizolacji materiału porowatego wypełnionego cieczą.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. J. KOWALSKI, R. KUC i G. MUSIELAK, *Analiza własności wibroizolacyjnych odkształcalnych ośrodków perforowanych wypełnionych cieczą*, Rozpr. Inż., **36**, 3, 1988.
2. M. A. BIOT, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, I. Low-frequency range*, J. Acoust. Soc. Am., **28**, 2, 1956.
3. S. J. KOWALSKI, *Identification of the coefficients in the equations of motion for a fluid-saturated porous medium*, Acta Mechanica, **47**, 1983.
4. M. KURASHIGE, *Transient response of a fluid-saturated poroelastic layer subjected to a sudden fluid pressure rise*, Trans. ASME, J. App. Mech., **49**, 1982.

РЕЗЮМЕ

АНАЛИЗ ЗАТУХАЮЩИХ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПЕРФОРИРОВАННЫХ СРЕД ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Целью работы является анализ затухающих свойств перфорированных сред, заполненных вязкой жидкостью. На основе свободных колебаний и вынужденных колебаний гармонической силой эластичного перфорированного цилиндра, насыщенного жидкостью, исследуется влияние вязкости жидкости на затухающие свойства среды. Анализируется влияние коэффициента затухания на эффект виброизоляции, т.е. на коэффициент переноса силы. Результаты представлены на диаграммах.

SUMMARY

ANALYSIS OF DAMPING PROPERTIES OF PERFORATED DEFORMABLE MEDIA

The paper is aimed at analyzing the damping properties of perforated media filled by viscous fluids. Analysis of free vibrations and of vibrations forced by harmonic excitation in a perforated, fluid-saturated elastic cylinder enables the evaluation on the effect of fluid viscosity on the damping properties of the medium. Influence of the damping coefficient on the vibro-insulation effect is analyzed. The results are illustrated by graphs.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 15 listopada 1988 r.