

ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH KONSTRUKCJI KONTAKTUJĄCYCH SIĘ Z CIECZĄ, PRZEPROWADZONA ZA POMOCĄ PROGRAMU SAP-IV

HIEN DO TRONG (WROCŁAW)

W pracy przedstawiono rozwiązania analityczne i numeryczne drgań niektórych konstrukcji sprężystych (belkowych, płytowych, zbiorników) kontaktujących się z cieczą. Po zbudowaniu modelu matematycznego, skonstruowano przestrzeń liniową opisującą sprzężenie drgań konstrukcji i powierzchni swobodnej. Sprowadzono problem do równania liniowego operatorowego, dokonano analizy własności operatora wykazując, że jest symetryczny i dodatni. Z tego wynika, że spektrum jest dyskretne i dodatnie. Dzięki temu można dokonać wyboru metody do wyznaczania częstości drgań. W przykładzie numerycznym rozpatrzono zagadnienie drgań własnych belki sprzężonej z cieczą wypełniającą zbiornik o przekroju prostokątnym. Zadanie to rozwiązano dwoma sposobami: metodą elementów skończonych (za pomocą programu SAP-IV) oraz metodą Ritza i porównano otrzymane wyniki.

1. WSTĘP

Zagadnienia analizy drgań układów sprężystych kontaktujących się z układami ciekłymi są przedmiotem badań hydrosprężystości. Ogólna teoria hydrosprężystości zaczęła się szybko rozwijać w ostatnich 30-40 latach w związku z potrzebą rozwiązania różnych zagadnień technicznych dotyczących budowy okrętów, samolotów, reaktorów atomowych i raket oraz budownictwa wodnego i zbiorników na ropę. Hydrosprężystość jest dyscypliną stosunkowo młodą, podczas gdy aerosprężystość posiada swoje tradycje i doczekała się szeregu opracowań monograficznych. Jedną z pierwszych prac (1937 rok) o drganiach sprężystego ciała kontaktującego się z cieczą był artykuł P. K. ISZKOWA [14]. Rozpatrzono tam drgania swobodne belki o przekroju kołowym zanurzonej w cieczy. Przy założeniu, że postaci drgań belki w cieczy i w próżni są jednakowe, wyznaczono masę towarzyszącą cieczy i obliczono częstości drgań własnych tej belki. W pracy [16] przeanalizowano szereg przypadków drgań płyt częściowo kontaktujących się z cieczą oraz przedstawiono metodę przybliżenia (metoda Ritza) obliczenia częstości drgań układów sprzężonych przez wyznaczenie masy towarzyszącej cieczy.

Praca [10] poświęcona jest dynamice dachów pływających. Przedstawiono

ogólny sposób rozwiązania zagadnienia hydrosprężystości za pomocą funkcji własnych swobodnego falowania cieczy w zbiorniku. W pracach [5 i 12] rozpatrzono drgania swobodne i wymuszone konstrukcji sprężystych z przyjętą liczbą części (w [12] drgania ramy składającej się z belek, a w [5] drgania zbiornika o kształcie prostopadłościanu składającego się z płyt prostokątnych) i częściowo kontaktujących się z cieczą. Praca [2] przedstawia analizę małych drgań układu „ciecz-powłoka”. Zastosowano metodę wariacyjną w badaniu widma drgań własnych układu sprzężonego do różnych modeli fizycznych. Udowodniono szereg twierdzeń o strukturze spektrum, a sformułowanie wariacyjne wykorzystano do rozwiązania różnych zadań metodą elementów skończonych.

Niniejsza praca przedstawia ogólne sformułowanie zagadnienia drgań konstrukcji sprężystych, składających się z jednego lub większej liczby składników będących częściowo w kontakcie z cieczą, która ma powierzchnię swobodną. Przez wprowadzenie funkcji Neumanna można sprowadzić problem do zagadnienia poszukiwania wartości i funkcji własnych. To ogólne sformułowanie wykorzystano następnie do rozwiązania przykładu numerycznego metodą elementów skończonych.

Wykorzystano istniejącą teorię i dostosowano program komputerowy SAP-IV do możliwości wykonania wspomnianych obliczeń.

2. RÓWNANIE RÓWNOWAGI I WŁASNOŚCI SPEKTRALNE

2.1. Sformułowanie zagadnienia

Przeanalizowano drgania swobodne konstrukcji utworzonych z M części $S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_M$, które związane są krawędziami $L_{1,2}, L_{2,3}, \dots, L_{m,m+1}, \dots, L_{M-1,M}$ i częściowo kontaktują się z cieczą, która ma powierzchnię swobodną S_{M+1} (rys. 1).

Przyjęto następujące założenia: a) ciecz jest nieściśliwa, nielepka i znajduje się w potencjalnym polu sił ciężkości, b) drgania są małe i ustalone w czasie.

Ruch układu „ciecz-konstrukcja” (rys. 1) przy powyższych założeniach opisuje się następującymi równaniami i warunkami granicznymi.

a) Dla cieczy

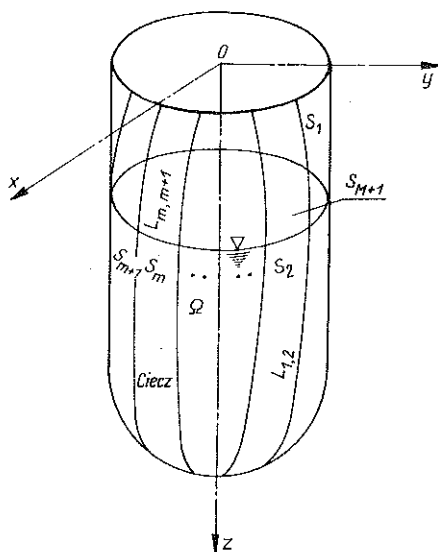
$$(2.1) \quad \Delta\phi = 0 \quad \text{w } \Omega.$$

Na podstawie liniowości zagadnienia można napisać

$$(2.2) \quad \phi = \sum_{n=1}^{M+1} \phi_n.$$

Każda funkcja ϕ_n jest harmoniczna, czyli

$$(2.3) \quad \Delta\phi_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, M+1) \quad \text{w } \Omega,$$



Rys. 1. Układ współrzędnych

gdzie ϕ i ϕ_n oznaczają potencjały prędkości cieczy. Każda ϕ_n spełnia warunek sprzężenia drgań:

$$(2.4) \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial N_m} = \begin{cases} \frac{\partial W_m}{\partial t} & \text{dla } n = m, \\ 0 & \text{dla } n \neq m \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots, M+1),$$

gdzie $W_m(P, t)$, ($p \in S_m$) oznacza ugięcie konstrukcji mierzone w kierunku N_m oraz N_m — normalne części konstrukcji i niezaburzonej powierzchni swobodnej cieczy.

b) Dla powierzchni swobodnej cieczy

$$(2.5) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + gW_{M+1} = 0,$$

gdzie W_{M+1} jest rzędną fali powierzchni.

c) Dla części m konstrukcji sprężystej równanie drgań swobodnych ma postać

$$(2.6) \quad K_m W_m + \bar{M}_m \frac{\partial^2 W_m}{\partial t^2} = P_m = \begin{cases} 0 & \text{na } S_m - S_m^v, \\ -\rho_{cz} \frac{\partial \phi}{\partial t} & \text{na } S_m^v, \end{cases}$$

gdzie ρ_{cz} oznacza masę właściwą cieczy, S_m^v — powierzchnię zwilżoną części m konstrukcji, K_m — operator różniczkowy, który zależy od rodzaju konstrukcji.

cji (np. dla belki $K_m = \frac{d^4}{dx^4}$; dla płyty $K_m = \Delta^2$, dla membrany $K_m = \Delta$ itd.), P_m — ciśnienie cieczy na części m , W_m — ugięcie sprężyste, które spełnia warunki brzegowe na krawędziach $L_{m-1,m}$ i $L_{m,m+1}$ oraz M_m — gęstość masy konstrukcji.

Z zależności (2.3) i (2.4) wynika

$$(2.7) \quad \phi_n(P) = \int_{S_n^v} N_n(P, Q) \frac{\partial W_n(Q)}{\partial t} dS_n = H_n \frac{\partial W_n(Q)}{\partial t},$$

gdzie $P \in \Omega$ i $Q \in S_n^v$, $N_n(P, Q)$ oznacza funkcję Neumanna oraz H_n — operator całkowy.

Ze wzorów (2.2), (2.5) i (2.7) wynika

$$(2.8) \quad \phi(P) = \sum_{n=1}^{M+1} \phi_n(P) = \sum_{n=1}^{M+1} H_n \frac{\partial W_n(Q)}{\partial t}.$$

Oznaczając wartość potencjału składowego ϕ_n na części m przez $\phi_n^m(P)$, można określić operator całkowy z zależności (2.7)

$$\bar{H}_n^m \frac{\partial^2 W_n(P)}{\partial t^2} = \int_{S_n} \bar{N}_n(P, Q) \frac{\partial^2 W_n(Q)}{\partial t^2} dS_n,$$

gdzie $P \in S_m$, $Q \in S_n$.

$$(2.9) \quad \bar{N}_n(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } Q \in S_n - S_n^v, \\ N_n & \text{gdy } Q \in S_n^v. \end{cases}$$

Podstawiając (2.8), (2.9) do (2.5) i (2.6) otrzymamy równanie drgań

$$(2.10)_1 \quad K_m W_m + \left[\bar{M}_m + \varrho_{cz} \frac{\sum_{n=1}^{M+1} \bar{H}_n^m \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 W_m}{\partial t^2}} \right] \frac{\partial^2 W_m}{\partial t^2} = 0$$

dla $m = 1, 2, \dots, M$ oraz

$$(2.10)_2 \quad \varrho_{cz} g W_{M+1} + \varrho_{cz} \sum_{n=1}^{M+1} \bar{H}_n^{M+1} \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} = 0$$

dla powierzchni swobodnej $m = M+1$.

Jeśli przyjmiemy, że $\mu_m = \varrho_{cz} \frac{\sum_{n=1}^{M+1} \bar{H}_n^m \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2}}{\partial^2 W_m / \partial t^2}$, to z równań (2.10) wynika, że μ_m

może być interpretowane jako gęstość masy cieczy, którą trzeba dodać do gęstości masy konstrukcji \bar{M}_m : μ_m będziemy dalej nazywać masą towarzyszącą cieczy.

2.2. Równanie operatorowe

Wprowadzamy przestrzenie A_m ($m = 1, 2, \dots, M+1$) funkcji mierzalnych całkownych (w sensie Lebesgue'a) z kwadratem na S_m , z normą

$$(2.11) \quad \|W_m\|^2 = \int_{S_m} |W_m|^2 dS_m$$

i z iloczynem skalarnym

$$(2.12) \quad (W_m \varphi_m) = \int_{S_m} W_m \varphi_m dS_m,$$

przy czym W_m i $\varphi_m \in A_m$. Każda A_m jest zupełną przestrzenią Hilberta [3, 15].

Wprowadzamy również przestrzeń A , która jest sumą prostą przestrzeni L_m

$$A = \sum_{m=1}^{M+1} A_m$$

z iloczynem skalarnym

$$(2.13) \quad (W, \varphi) = \sum_{m=1}^{M+1} (W_m, \varphi_m)_m,$$

gdzie $w = (w_1, w_2, \dots, w_{M+1})^T$; funkcje w_m spełniają warunki brzegowe na krawędziach każdej części konstrukcji i na powierzchni swobodnej cieczy.

Przyjmując, że $a_n = \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2}$, wprowadzamy następujące operatory macierzowe i macierze:

$$(2.14) \quad K = \begin{vmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_m \\ 0 & & & & Q_{czg} \end{vmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{vmatrix} \bar{M}_1 & & & 0 \\ & \bar{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{M}_M \\ 0 & & & & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mu = Q_{cz} \begin{vmatrix} \bar{H}_1^1 a_1 + \bar{H}_2^1 a_2 + \dots + \bar{H}_{M+1}^1 a_{M+1} & & & & 0 \\ & a_1 & & & \\ & & \bar{H}_1^2 a_1 + \bar{H}_2^2 a_2 + \dots + \bar{H}_{M+1}^2 a_{M+1} & & \\ & & & a_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \bar{H}_1^{M+1} a_1 + \bar{H}_2^{M+1} a_2 + \dots + \bar{H}_{M+1}^{M+1} a_{M+1} \\ 0 & & & & & & a_{M+1} \end{vmatrix}$$

oraz wektory

$$(2.15) \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 W_{M+1}}{\partial t^2} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{M+1} \end{pmatrix}.$$

Stosując proste oznaczenia macierzowe (2.14), (2.15) można napisać układ równań (2.10) w postaci równania operatorowego w przestrzeni A

$$(2.16) \quad KW + (\bar{M} + \mu)\dot{W} = 0.$$

2.3. Własności spektralne i rozwiązanie równania operatorowego

W każdym konkretnym zagadnieniu można wyznaczyć operatory różniczkowe K_m (np. dla belki o stałym przekroju $K_m = \frac{d^4}{dx^4}$, dla płyty o stałej

grubości $K_m = \Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$ itd.) i warunki brzegowe dla wektorów W_m .

Biorąc pod uwagę pracę [15] można dowieść, że operatory K_m są symetryczne i dodatnie w przestrzeniach A_m . Na tej podstawie stwierdzamy, że operator K (patrz (2.14)) jest symetryczny i dodatni w przestrzeni A .

\bar{M}_m ($m = 1 - M$) są stałymi dodatnimi i dlatego, oczywiście, operator \bar{M} jest symetryczny i dodatni.

Każdy operator całkowy H_n (patrz (2.7)) jest operatorem pełnościągłym i symetrycznym [3, 7, 9, 11].

Rozpatrzmy iloczyn (HW, \bar{w}) , gdzie w i $\bar{w} \in A$. Przyjmując, że $V = \frac{\partial W}{\partial t}$

i $\bar{V} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial t}$, z zależności (2.4) i (2.7) otrzymujemy

$$(2.17) \quad \bar{H}_n V_n = \phi_n \quad \text{i} \quad V_n = \frac{\partial \phi_n}{\partial N}.$$

We wzorze (2.14) operator μ działa, zamiast na wektor a , na wektor $V = (V_1, V_2, \dots, V_{M+1})^T$. Stąd, z (2.17) wynika

$$(\mu V, \bar{V}) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1^1 V_1 + \bar{H}_2^1 V_2 + \dots + \bar{H}_{M+1}^1 V_{M+1} \\ \bar{H}_1^2 V_1 + \bar{H}_2^2 V_2 + \dots + \bar{H}_{M+1}^2 V_{M+1} \\ \dots \\ \bar{H}_1^{M+1} V_1 + \bar{H}_2^{M+1} V_2 + \dots + \bar{H}_{M+1}^{M+1} V_{M+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_{M+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (\bar{H}_1^1 V_1, \bar{V}_1) + (\bar{H}_2^1 V_2, \bar{V}_1) + \dots + (\bar{H}_{M+1}^1 V_{M+1}, \bar{V}_1) + \\
&\quad + (\bar{H}_1^2 V_1, \bar{V}_2) + (\bar{H}_2^2 V_2, \bar{V}_2) + \dots + (\bar{H}_{M+1}^2 V_{M+1}, \bar{V}_2) + \\
&\quad \dots \dots \dots + \\
&\quad + (\bar{H}_1^{M+1} V_1, \bar{V}_{M+1}) + (\bar{H}_2^{M+1} V_2, \bar{V}_{M+1}) + \dots + (\bar{H}_{M+1}^{M+1} V_{M+1}, \bar{V}_{M+1}) = \\
&= \int_{S_1} \phi_1^1 \frac{\partial \bar{\phi}_1^1}{\partial N_1} dS + \int_{S_1} \phi_2^1 \frac{\partial \bar{\phi}_1^1}{\partial N_1} dS + \dots + \int_{S_1} \phi_{M+1}^1 \frac{\partial \bar{\phi}_1^1}{\partial N_1} dS + \\
&\quad + \int_{S_2} \phi_1^2 \frac{\partial \bar{\phi}_2^2}{\partial N_2} dS + \int_{S_2} \phi_2^2 \frac{\partial \bar{\phi}_2^2}{\partial N_2} dS + \dots + \int_{S_2} \phi_{M+1}^2 \frac{\partial \bar{\phi}_2^2}{\partial N_2} dS + \\
&\quad \dots \dots \dots + \\
&\quad + \int_{S_{M+1}} \phi_1^{M+1} \frac{\partial \bar{\phi}_{M+1}^{M+1}}{\partial N_{M+1}} dS + \int_{S_{M+1}} \phi_2^{M+1} \frac{\partial \bar{\phi}_{M+1}^{M+1}}{\partial N_{M+1}} dS + \dots + \int_{S_{M+1}} \phi_{M+1}^{M+1} \frac{\partial \bar{\phi}_{M+1}^{M+1}}{\partial N_{M+1}} dS.
\end{aligned}$$

Uwzględniając relacje (2.2) i (2.4) możemy napisać krócej

$$(\mu V, \bar{V}) = \int_{S_1} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial N_1} \phi dS + \int_{S_2} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial N_2} \phi dS + \dots + \int_{S_{M+1}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial N_{M+1}} \phi dS = \int_S \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial N_S} dS$$

Wykorzystując w ostatniej zależności wzory Greena dla operatora Laplace'a, otrzymamy

$$(\mu V, \bar{V}) = \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \bar{\phi} d\Omega.$$

Z powyższego wynika, że $(\mu V, \bar{V}) = (\mu \bar{V}, V)$, czyli operator μ jest symetryczny. Dla $V = \bar{V}$ otrzymuje się

$$(2.18) \quad (\mu V, V) = \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial N_S} dS = \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 dS \geq 0.$$

Tak więc operator μ jest dodatni i symetryczny.

Jeśli przyjmiemy, że $M = \bar{M} + \mu$, to ze wzoru (2.16) wynika

$$(2.19) \quad M\ddot{W} + KW = 0.$$

Pamiętamy, że K , \bar{M} , μ i M są symetryczne i dodatnie. Ponieważ drgania są harmoniczne, poszukujemy rozwiązania w postaci $W = ue^{i\sigma t}$, gdzie skalar σ i wektor u należy dopiero wyznaczyć. Po podstawieniu powyższego do (2.19) otrzymujemy

$$(2.20) \quad Ku - \sigma^2 Mu = 0.$$

W zapisie naszym zakładamy z góry, że σ^2 nie powinno być ujemne i tak jest rzeczywiście, ponieważ

$$\sigma^2 = \frac{(u, Ku)}{(u, Mu)}, \quad (u, Ku) > 0 \quad \text{i} \quad (u, Mu) > 0.$$

Właściwości spektralne rozwiązania można zbadać wykorzystując istniejące operatory $M^{1/2}$ i $M^{-1/2}$, choć przy rozwiązaniu tego problemu nie będzie konieczne ich obliczenie.

Ze wzoru (2.20) wynika, że

$$M^{-1/2}Ku = \sigma^2 M^{1/2}u.$$

Ponieważ $M^{-1/2}M^{1/2} = I$, więc $M^{-1/2}KM^{-1/2}M^{1/2}U = \sigma^2 M^{1/2}u$,

Jeśli przyjmiemy

$$(2.21) \quad V = M^{1/2}u, \quad D = M^{-1/2}KM^{-1/2},$$

to otrzymamy

$$(2.22) \quad DV = \sigma^2 V.$$

$M^{-1/2}$ będzie symetryczny, gdy M jest symetryczny i dodatnio określony. Zatem skoro K jest symetryczny, D jest także symetryczny. D posiada n wartości własnych σ_i i n rzeczywistych ortogonalnych wektorów własnych $V^{(i)}$ oraz

$$(V^{(i)}, V^{(j)}) = \delta_{ij}.$$

Mając dane $V^{(i)}$ obliczamy $u^{(i)}$ będące rozwiązaniem wzoru (2.20). Z relacji (2.12) wynika

$$(V^{(i)}, V^{(j)}) = (M^{+1/2}u^{(i)}, M^{1/2}u^{(j)}) = (u^{(i)}, Mu^{(j)})$$

a więc $(u^{(i)}, Mu^{(j)}) = \delta_{ij}$.

Zatem zgodnie z pracą S. G. MICHLINA [15], wektory własne $u^{(i)}$ i $u^{(j)}$ są ortogonalne według energii operatora M . Mając dane σ , $u^{(i)}$ otrzymujemy rozwiązanie równania (2.16)

$$(2.23) \quad w^{(i)} = u^{(i)}e^{i\sigma t}.$$

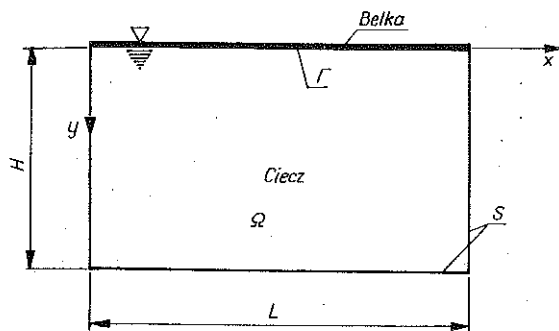
3. DRGANIA WŁASNE BELKI KONTAKTUJĄCEJ SIĘ Z CIECZĄ

Rozpatrzmy przypadek drgań własnych belki sprężonej z cieczą wypełniającą zbiornik o przekroju prostokątnym (rys. 2). W dalszych rozważaniach wygodniej będzie operować zamiast potencjałem prędkości ϕ , potencjałem przemieszczeń \bar{X} określonym zależnością

$$(3.1) \quad \phi = -\frac{\partial \bar{X}}{\partial t}.$$

\bar{X} jest funkcją harmoniczną

$$(3.2) \quad \Delta \bar{X} = 0.$$



Rys. 2. Belka sprężona z cieczą

Powinna ona spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(3.3) \quad \left. \frac{\partial \bar{X}}{\partial N_s} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{X}}{\partial Y} \right|_{\Gamma} = W,$$

gdzie N_s oznacza normalną brzegu S oraz Γ — powierzchnię swobodną cieczy, na której znajduje się belka.

Na podstawie wzoru (2.6) można określić ciśnienie dynamiczne cieczy na belkę

$$(3.4) \quad P = \rho_{cz} \left. \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial t^2} \right|_{y=0}$$

Równanie drgań belki ma następującą postać:

$$(3.5) \quad EJ \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \rho_k F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\rho_{cz} \left. \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial t^2} \right|_{y=0},$$

gdzie E oznacza moduł Younga, F — pole przekroju belki, J — moment bezwładności przekroju oraz ρ_k — masę właściwą materiału belki.

Dla drgań harmonicznycch przyjmuje się $W = e^{i\omega t} u$, $\bar{X} = e^{i\omega t} X$. Stąd ze wzoru (3.5) wynika

$$(3.6) \quad EJ \frac{d^4 u}{dx^4} - \left(\rho_k F + \frac{\rho_{cz} X|_{y=0}}{u} \right) \sigma^2 u = 0.$$

Na podstawie zależności (3.2) i (3.3) określamy zagadnienie brzegowe dla funkcji X

$$(3.2) \quad \Delta X = 0 \quad \text{w } \Omega,$$

$$(3.3) \quad \left. \frac{\partial X}{\partial N_s} \right|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_{y=0} = u.$$

Biorąc pod uwagę twierdzenie zbieżności [9], mamy warunek

$$(3.7) \quad \int_0^L u(x) dx = 0,$$

czyli warunek konieczny istnienia rozwiązania zagadnienia Neumanna dla funkcji harmonicznej X . Warunek ten wynika z faktu, że belka spoczywa na nieściśliwej cieczy; średnie ugięcie musi więc być równe zeru [10].

Na podstawie wzoru (2.7) możemy napisać rozwiązanie zagadnienia brzegowego w następującej postaci:

$$(3.8) \quad X(P) = H \frac{\partial X(Q)}{\partial y} = \int_{S+\Gamma} N(P, Q) \frac{\partial X(Q)}{\partial y} d(S+\Gamma).$$

$N(P, Q)$ jest funkcją Neumanna, którą można wyznaczyć rozwiązując zagadnienie

$$(3.9)_1 \quad \Delta N(P, Q) = -\delta(P, Q) \quad (P, Q) \in \Omega,$$

przy warunku brzegowym zaś

$$(3.9)_2 \quad \left. \frac{\partial N(PQ)}{\partial N} \right|_{S+\Gamma} = 0 \quad (P \in \Omega; q \in S+\Gamma),$$

gdzie $\delta(P, Q)$ jest funkcją Diraca.

Rozwiązanie zagadnienia (3.9) ma następującą postać:

$$(3.10) \quad N(P, Q) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sum_{m=1} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{L} \operatorname{ch} \frac{m\pi(H-y')}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x'}{L}}{m \operatorname{sh} \frac{m\pi H}{L}}, & 0 \leq y < y', \\ \frac{2}{\pi} \sum_{m=1} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y'}{L} \operatorname{ch} \frac{m\pi(H-y)}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x'}{L}}{m \operatorname{sh} \frac{m\pi H}{L}}, & y' < y \leq H, \end{cases}$$

przy czym $P = P(x, y)$ i $Q = Q(x', y') \in \Omega$.

Uwzględniając warunek brzegowy (3.3) i podstawiając (3.10) do (3.8), otrzymamy

$$(3.11) \quad X(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^L \sum_m \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi(H-y)}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}}{m \operatorname{sh} \frac{m\pi H}{L}} \cos \frac{m\pi x'}{L} u(x') dx,$$

gdzie $u(x')$ oznacza postacie drgań belki.

Założmy, że postaci drgań belki stykającej się i nie stykającej się z cieczą są jednakowe [8, 13, 14 i 16]. Założenie to było już stosowane przez wielu eksperymentatorów i badaczy teoretycznych, np. przez W. S. GONTKIEWICZA [13], [8] i innych. Dla K postaci drgań $U_k(x') = A_k \sin \frac{K\pi x'}{L}$. Podstawiając tę zależność do (3.11) i całkując według zmiany x' , otrzymuje się

$$(3.12) \quad X(x, y) = \frac{4LA_k}{\pi^2} \sum_m \frac{K \operatorname{ch} \frac{m\pi(H-y)}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}}{m(K^2 - m^2) \operatorname{sh} \frac{m\pi H}{L}}$$

Na podstawie warunku (3.7) ograniczymy analizę do postaci parzystej drgań (tj. $K = 2, 4, 6, \dots$). Np. dla drugiej postaci ($K = 2$), z (3.12) otrzymamy

$$(3.12') \quad X(x, y) = \frac{8LA_2}{\pi^2} \sum_m \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi(H-y)}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}}{m(4 - m^2) \operatorname{sh} \frac{m\pi H}{L}}$$

Opierając się na wzorach (3.5) i (3.6) i oznaczając

$$\mu(x) = \varrho_{cz} \frac{\left. \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial t^2} \right|_{y=0}}{\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}},$$

otrzymujemy

$$(3.13) \quad \mu(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \varrho_{cz} \left. \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial t^2} \right|_{y=0} = p(x).$$

Z zależności (3.13) wynika, że $\mu(x)$ może być interpretowane jako gęstość masy cieczy, którą trzeba dodać do gęstości masy belki $\varrho_k F$ [5]. Obliczenie rozkładu masy towarzyszącej $\mu(x)$ jest bardzo żmudne. Niektórzy badacze [5, 16] stosując różne metody przybliżone (m. in. metodę Galerkiną, Ritza, Rayleigha...) otrzymali prosty wzór na masę towarzyszącą dla podstawowych postaci drgań. W pracy nie stosowano tej metody. Masa towarzysząca jest wyznaczona jako funkcja zmiany x . Zagadnienie rozwiązano metodą elementów skończonych za pomocą programu SAP-IV. Biorąc pod uwagę (3.6), (3.12') i (3.13) otrzymujemy wzór na masę towarzyszącą dla drugiej postaci drgań

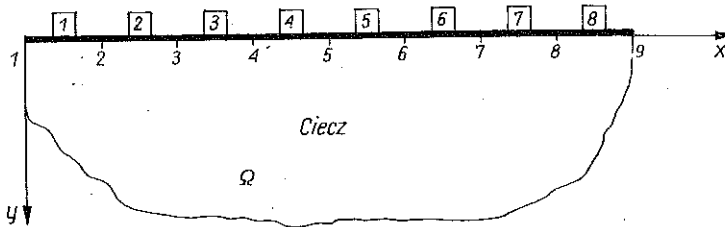
$$(3.14) \quad \mu(x) = \varrho_{cz} \frac{X|_{y=0}}{u(x)} = \frac{8L}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{\operatorname{cth} \frac{m\pi H}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}}{m(4 - m^2) \sin \frac{2\pi x}{L}}$$

Można łatwo sprawdzić, że funkcja $\mu(x)$ jest symetryczna względem $x = L/2$ i szereg jest zbieżny.

4. ZASTOSOWANIE PROGRAMU SAP-IV DO ANALIZY DRGAŃ BELKI STYKAJĄCEJ SIĘ Z CIECZĄ. OCENA WYNIKÓW NUMERYCZNYCH

Program SAP-IV (Structural analysis for static and dynamic response of linear systems) [1, 4, 6], powstał w roku 1973 na Uniwersytecie Kalifornijskim jako kolejna wersja programu SAP z roku 1970. Zrealizowany na maszynach cyfrowych (serie CDC 6400, 6600, 7600) stał się efektywnym narzędziem statycznej i dynamicznej analizy konstrukcji metodą elementów skończonych. Program pozwala modelować i obliczać konstrukcje za pomocą 9 typów elementów. Dzięki strukturze, która zapewnia dużą elastyczność i możliwość modyfikacji, wykorzystywany jest i rozwijany w wielu ośrodkach uniwersyteckich i naukowo-badawczych — głównie w USA, RFN i we Francji. W połowie lat 70-tych pojawił się również w Polsce.

Niżej podany został przykład obliczeń drgań własnych belki stykającej się z cieczą (rys. 3).



Rys. 3. Dyskretyzacja belki sprzężonej z cieczą na elementy belkowe

Długość $L = 2$ m,

masa właściwa cieczy

$$\rho_{cz} = 1020 \text{ NS}^2/\text{m}^4,$$

masa właściwa belki

$$\rho_K = 7800 \text{ NS}^2/\text{m}^4,$$

moduł Younga

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2,$$

momenty bezwładności

$$I_0 = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$I_{yy} = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4,$$

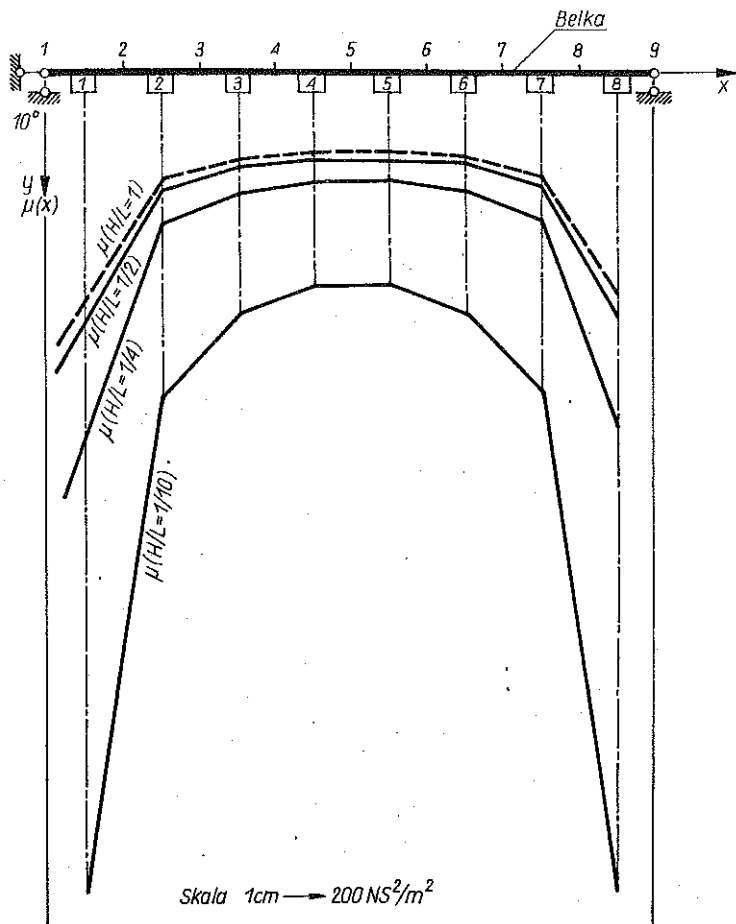
$$I_{zz} = 5,76 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4,$$

pole przekroju

$$F = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Belkę zdyskretyzowano na elementy belkowe; liczba węzłów — 10, liczba elementów — 8.

Rozkład masy towarzyszącej $\mu(x)$ dla różnych stosunków H/L obliczono za pomocą wzoru (3.14); wykres został przedstawiony na rys. 4. Jeśli oznaczymy



Rys. 4. Rozkład masy towarzyszącej cieczy $\mu(x)$ dla różnych stosunków H/L , H – głębokość wypełnienia cieczy, L – długość belki

masę właściwą zastępczą układu „ciecz–belka” przez q_{KZ} , to z zależności (3.6) wynika

$$q_K F + q_{cz} \frac{X|_{y=0}}{U} = q_{KZ} F, \quad (4.1)$$

$$q_{KZ} = q_K + \frac{q_{cz} X|_{y=0}}{UF} = q_K + \frac{\mu(x)}{F},$$

W tabelicy 1 zestawiono wartości $\mu(x)$ i q_{KZ} odpowiadające różnym stosunkom H/L dla elementów belkowych.

W tabelicy 2 zestawiono otrzymane wyniki obliczone za pomocą komputera IBM PC-AT.

Na rys. 5 przedstawiono postacie drgań własnych odpowiednio dla układu sprzężonego „ciecz–belka” i samej belki ($H/L = 0$).

Tablica 1

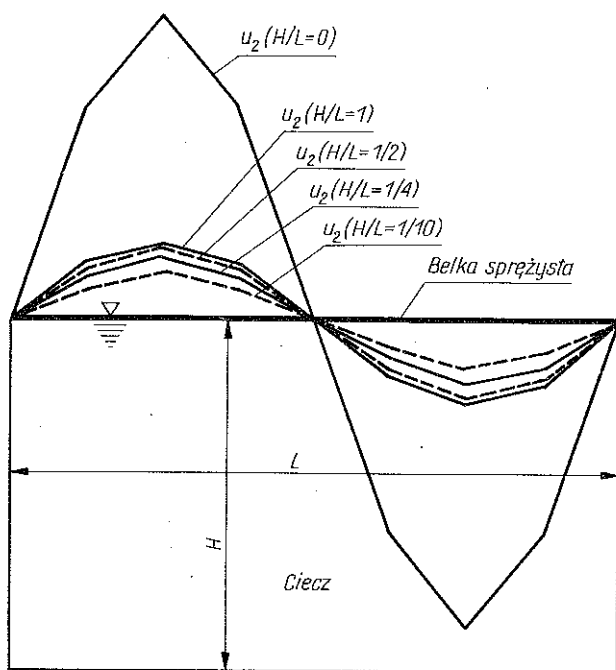
H/L		Element 1	Element 2	Element 3	Element 4	Element 5	Element 6	Element 7	Element 8
0 (bez cie- czy)	$\mu(x)$	$X = L/16$	$X = 3L/16$	$X = 5L/16$	$X = 7L/16$	$X = 9L/16$	$X = 11L/16$	$X = 13L/16$	$X = 17L/16$
	$q_{kz} = q_k + \frac{q_{cz} X}{FU}$	7800	7800	7800	7800	7800	7800	7800	7800
$\frac{1}{10}$	$\mu(x)$	4302,01336	1683,88224	1244,47582	1115,77798	1115,77798	1244,47852	1683,88224	4302,01336
	q_{kz}	868202	344576	256694	230954	230954	256694	344576	868202
$\frac{1}{4}$	$\mu(x)$	1891,1876	798,491182	619,832502	568,034595	568,034595	619,832502	798,491182	1891,1876
	q_{kz}	386036	167498	131766	121406	121406	131766	167498	386036
$\frac{1}{2}$	$\mu(x)$	1280,24646	582,014065	473,38605	442,834059	442,834059	473,38605	582,014065	1280,24646
	q_{kz}	263848	124202	102476	96366	96366	102476	124202	263848
1	$\mu(x)$	1175,660	540,290	444,310	415,65	415,65	444,310	540,290	1175,660
	q_{kz}	238932	115858	96662	90930	90930	96662	115858	238932

$$[\mu(x)] = NS^2/m^2$$

$$[q_{kz}] = NS^2/m^4$$

Tablica 2

H/L	Częstość kątowna $\left(\frac{\text{rad}}{\text{S}}\right)$	Częstość (1/S)	Okres (S)
0 (bez cieczy)	1738,00	276,60	0,003616
1/10	253,60	40,37	0,02477
1/4	365,00	58,09	0,01722
1/2	424,60	67,57	0,01480
1	440,40	70,09	0,01427

Rys. 5. Postać drgań własnych $\mu_2(x)$ belki stykającej się z cieczą dla różnych stosunków H/L

5. PORÓWNANIE WYNIKÓW OTRZYMANÝCH ZA POMOCĄ PROGRAMU SAP-IV Z WYNIKAMI UZYSKANÝMI INNĄ METODĄ PRZYBLIŻONĄ

Jak stwierdzono w p. 1, częstości własne można obliczyć różnymi metodami (m. in. metodą Rayleigha, Ritz'a i Galerkińa). Opierając się na pracach [5, 16]

częstości układu sprzężonego można określić za pomocą wzoru

$$(5.1) \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + \frac{\mu}{\rho_K F}}}$$

gdzie σ_0 oznacza częstość własną belki nie kontaktującej się z cieczą oraz μ – masę towarzyszącą cieczy (odpowiada każdej postaci drgań). Zamiast (3.14) możemy napisać prosty wzór na μ

$$(5.2) \quad \mu = \rho_{cz} \frac{\int_0^L X|_{y=0} u(x) dx}{\int_0^L u^2(x) dx} = \rho_{cz} \frac{\int_0^L \left(X \frac{\partial X}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx}{\int_0^L u^2(x) dx}$$

Podstawiając funkcję $X_{y=0}$ z (3.12) i $u(x) = A_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$ do (5.2), otrzymamy masę towarzyszącą cieczy dla drugiej postaci drgań

$$(5.3) \quad \mu = \frac{64\rho_{cz}L}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\operatorname{cth} \frac{n\pi H}{L}}{n(4-n^2)^2}$$

Wartości μ dla różnych stosunków H/L zestawiono w tabelicy 3. Przedstawiono tam także wartości częstości drgań otrzymane metodą elementów skończonych (program SAP-IV) lub inną metodą przybliżoną. Podano również różnicę procentową między tymi wynikami.

Tablica 3

H/L	Gęstość masy towarzyszącej μ (NS^2/m^4)	Częstość własna otrzymana metodą Ritza (1/S) $\sigma_R = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + \frac{\mu}{\rho_K F}}}$	Częstość własna otrzymana metodą elementów skończonych (Program SAP-IV) σ_{El} (1/S)	Różnica procentowa (%) $\varepsilon = \left \frac{\sigma_R - \sigma_{El}}{\sigma_R} \right \cdot 100$
0 (bez cieczy)	0	1736,3926	1738,0	0,0009
1/10	1619,8821	266,23949	253,60	4,7479
1/4	774,331409	380,23006	365,00	4,0054
1/2	569,527214	439,58232	424,60	3,4083
1	535,6690	452,34660	440,40	2,6410

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono ogólną teorię drgań konstrukcji tworzonych z M różnych części i kontaktujących się częściowo z cieczą idealną, która ma powierzchnię swobodną.

Równania różniczkowe ruchu zawierają składnik obciążenia (ciśnienia cieczy), który wyznaczono za pomocą całki Cauchyego–Lagrange’a. Stąd w równaniu różniczkowym ruchu występują ugięcia w_m i potencjał prędkości cieczy. Wpływ ciśnienia hydrodynamicznego jest uwzględniony przez wyznaczenie masy towarzyszącej cieczy. Wprowadzamy przestrzenie A_m funkcji mierzalnych, całkownych z iloczynem skalarnym (2.12) i normą (2.11), sumę prostą z iloczynem skalarnym (2.13) oraz operatory w postaci (2.14), (2.15). Stosując te oznaczenia można napisać równania ruchu układu „konstrukcja sprężysta–ciecz” w postaci równania operatorowego w przestrzeni A . Otrzymano w ten sposób zagadnienie na wartości własne. Badano operatory i wykazano, że istnieje spektrum dyskretne, a w przestrzeni A istnieje układ funkcji własnych ortogonalnych w sensie wprowadzonego iloczynu. Można obrać do celów obliczeniowych szereg znanych metod zarówno w matematyce, jak i teorii drgań – dla uzyskania wyników liczbowych. Do analizy drgań belki stykającej się z cieczą stosowano metodę elementów skończonych (program SAP–IV). W pracy przedstawiono również wyniki otrzymane metodą Ritza.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. J. BATHE, E. L. WILSON and F. E. PETERSON, SAP–IV a structural analysis program for static and dynamic response of linear systems, A report of the NSF, California, Berkeley 1973.
2. H. BERGER, I. BOUJOT and R. OHAYON, On a spectral problem in vibration mechanics. Computation of elastic tanks partially filled with liquid, J. Math. Anal. and Applic., 51, 2, pp. 272–298, 1975.
3. F. W. BYRON, i R. W. FULLER, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, T. 1, 2, PWN, Warszawa 1975.
4. J. CHRÓŚCIELEWSKI i I. KREJA, Zastosowanie do analizy konstrukcji programu SAP–IV w wersji adaptowanej na EMC ODRA–1305, Zesz. Nauk. Politech. Gdańskiej, Bud. Lądowe, 38, 361, 128–140, 1983.
5. H. DO TRONG, *Dynamika zbiornika o kształcie prostopadłościanu częściowo wypełnionego cieczą idealną*, Praca doktorska, Politechnika Gdańska 1982.
6. W. GAWROŃSKI, W. UZIĘBŁO i A. SOWIAK, *Instrukcja użytkownika programu „PASSAD-MOSU”. Program statycznych i dynamicznych obliczeń konstrukcji metodą elementów skończonych*, Gdańsk 1978.
7. W. KOŁODZIEJ, *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
8. T. S. MIXSON and R. W. HERR, An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid, Tech. Report, R-145, NAASA, 1962.
9. G. F. ROACH, *Green's functions. Introductory theory with applications*, London 1970.
10. A. SAWICKI, Z zagadnień hydrosprężystości płyt, Mech. Teor. i Stos., 114, 1, 3–17, 1976.

11. T. WOLSKA-BOCHEREK i inni, *Zarys teorii i równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, Warszawa 1962.
12. Л. И. БАЛАБУХ, *Об одной краевой задаче теории колебаний с условиями зависящими от параметра*, П. М. М., **30**, 6, 1098-1102, 1966.
13. В. Ц. ГОНТКЕВИЧ, *Собственные колебания оболочек в жидкости*, Москва 1964.
14. П. К. ИШКОВ, *Определение частот колебаний упругих стержней в жидкости*, П. М. М., **1**, 1, 1937.
15. С. Г. МИХЛИН, *Вариационные методы в математической физике*, Москва 1970.
16. С. Г. ШУЛЬМАН, *Некоторые случаи свободных колебаний упругих стенок, соприкасающихся с жидкостью*, Изв. БНИИГ, **79**, 80-89, 1965.

РЕЗЮМЕ

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ, КОНТАКТИРУЮЩИХСЯ С ЖИДКОСТЬЮ, ПРОВЕДЕННЫЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОГРАММЫ САП-IV

В работе представлены аналитические и численные решения колебаний некоторых упругих конструкций (балочных, плиточных, контейнеров), контактирующих с жидкостью. После построения математической модели, построено линейное пространство, описывающее сопряжение колебаний конструкции и свободной поверхности. Проблема сведена к линейному операторному уравнению, проведен анализ свойств оператора, показывая, что он является симметричным и положительным, из чего следует, что спектр является дискретным и положительным. Благодаря этому можно провести выбор метода для определения частоты колебаний. В численном примере рассмотрена задача собственных колебаний балки, сопряженной с жидкостью, заполняющей контейнер с прямоугольным сечением. Эта задача решена двумя способами: методом конечных элементов (при помощи программы САП-IV) и методом Рунге, а также сравнены полученные результаты.

SUMMARY

APPLICATION OF THE SAP-IV PROGRAM TO THE ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF STRUCTURES IMMERSSED IN FLUIDS

Analytical and numerical solutions are presented, concerning the vibration of certain elastic structures (beams, plates, containers) remaining in contact with fluids. Mathematical model is constructed and a linear space is proposed describing the coupling of structure vibrations with the free surface. The problem is reduced to a linear operator equation; the operator is proved to be symmetric and positive what implies that the vibration spectrum is discrete and positive. This makes it possible to select a proper method of determination of the vibration frequencies. A numerical example presents free vibrations of a beam immersed in a fluid tank. Two methods of solution are applied: the FEM (SAP-IV Program) and the Ritz method; the results are compared.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA, WROCLAW

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 maja 1988 r.