

# STRUKTURY UKŁADÓW LINII NIECIĄGŁOŚCI NAPRĘŻEŃ W POLACH GRANICZNYCH, SPEŁNIAJĄCYCH WARUNEK HUBERA-MISESA CZĘŚĆ II. STRUKTURALNE WARUNKI ISTNIENIA PÓŁ ELEMENTARNYCH. ZEWNĘTRZNE OSZACOWANIA OBSZARÓW ISTNIENIA

WITOLD BODASZEWSKI (KIELCE)

W części II stosowany jest konsekwentnie parametryczny opis pól elementarnych. Rozważono problem istnienia rozwiązań tych pól dla warunków brzegowych określonych na zbiorze parametrów, który jest równoważny zbiorowi współrzędnych naprężeń przyjmowanych w obszarach skrajnych. Wyznaczono obszary istnienia rozwiązań dla pól o 2, 3 i 4 obszarach jednorodnych oraz nieosobliwych strukturach. Pokazano, że problem daje się wówczas sprowadzić do rozwiązania odpowiednich ciągów zadań optymalizacji z nieliniowymi funkcjami kryterialnymi oraz zespołem liniowych i wypukłych ograniczeń. Zadania te są formułowane na przestrzeniach parametrycznych, zdefiniowanych w części I [10]. Otrzymane zależności pozwoliły m. in. na zbudowanie algorytmu komputerowego, który umożliwia rozwiązywanie dowolnych pól elementarnych; jest to pierwszy algorytm o takim stopniu uniwersalności. Analizy pól o strukturach osobliwych (zdegenerowanych) umieszczono w części III; natomiast wspomniany algorytm — w osobnej pracy.

## OZNACZENIA

- $\mathcal{L}$  linia nieciągłości naprężeń,  
 $y^i$  współrzędne punktu w ortonormalnym układzie globalnym ( $i = 1, 2$ ),  
 $x^i$  współrzędne w układzie lokalnym, związanym z kierunkami naprężeń głównych ( $i = 1, 2$ ); baza:  $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\}$ ,  
 $\omega$  parametr naprężeń;  
 $\Omega$  iloczyn kartezyjski  $\Omega \equiv \{(\omega, \omega) : \omega \in [0, \pi], \omega \in [0, \pi]\}$ ,  
 $\sigma_{ij}$  współrzędne tensora naprężenia ( $i, j = 1, 2$ ),  
 $\sigma_i$  naprężenia główne ( $i = 1, 2$ ),  
 $\mathbf{p}$  wektor naprężenia  
 $\sigma_{pt}$  granica plastyczności materiału,  
 $k$   
$$k = \frac{\sigma_{pt}}{\sqrt{3}},$$
  
 $\mathbf{e}$  wektor jednostkowy normalny do  $\mathcal{L}$ .  
 $\gamma$  parametr o znaczeniu kąta pomiędzy  $x^1$  i normalną do  $\mathcal{L}$ ,  
 $\phi$  parametr oznaczający kąt pomiędzy osią  $x^1$  układu lokalnego w obszarze poprzednim, a kierunkiem większego naprężenia głównego w obszarze następnym,

- $\Theta$  parametr o znaczeniu kąta pomiędzy dwiema kolejnymi liniami nieciągłości naprężeń;  
 $Q$  parametr rodziny linii  $\mathcal{L}$  ( $Q = 1, 2$ ),  
 $q$  parametr podrodziny linii  $\mathcal{L}$  ( $q = 1, 2, 3, 4$ ),  
 $l$  liczba obszarów jednorodnego stanu naprężenia,  
 $T$  macierz transformacji współrzędnych ( $T_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2$ ),  
 $R$  obiekt przesunięcia równoległego układu współrzędnych,  
 $P$  obraz linii  $\mathcal{L}$  w  $\Omega$ ,  
 $S$  zbiór parametrów linii  $\mathcal{L}$  (określony na  $\Omega$ ),  
 $F$  zbiór parametrów linii  $\mathcal{L}$  (określony na  $Y$ ),  
 $A$  dopuszczalny obszar obrazów  $P$ ,  
 $\Gamma$  przedział parametrów  $\omega$  ( $\Gamma \subset [0, \pi]$ ),  
 $c$  ustalony parametr naprężeń;  
 $\wedge$  „daszek” nad symbolem — wielkość, której jednoznaczne określenie wymaga podania warunków dodatkowych.

### Oznaczenia specjalne

$n$  — bieżący wskaźnik (numer) obszaru jednorodnego stanu naprężenia.

Wielkości związane z obszarem  $n$ :

$$\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_i^{(n)}, p_i^{(n)}, \omega^{(n)}, \phi^{(n)}, \gamma^{(n)}, \Theta^{(n)}, x_i^{(n)}, X^{(n)}, c, c_{gr}^{(n)}, Q, q, e_i^{(n)}, i_1^{(n)}, i_2^{(n)}$$

dla oznaczenia numerów obszarów jednorodnych używa się także indeksu  $m$ ;

Wielkości związane z dwoma sąsiednimi obszarami:  $n$  i  $n+1$ :

$$\mathcal{L}^{n,n+1}, P^{n,n+1}, S^{n,n+1}, F^{n,n+1};$$

Podobszary i przedziały dopuszczalne związane z liniami  $\mathcal{L}^{n,n+1}$ :

$\Gamma_m^{(n)}$  dopuszczalny przedział zmienności  $\omega$ , zależny od  $\omega$  w obszarze  $m$ ,

$\Gamma_{1,i}^{(n)}$  dopuszczalny przedział zmienności  $\omega$  w obszarze jednorodnym  $n$ ,

wyznaczony przy ustalonych  $\omega^{(1)}$  i  $\omega^{(0)}$  ( $\omega = c$ ,  $\omega = c$ ),

$A_m^{n,n+1}$  podobszar dopuszczalny obrazów  $P^{n,n+1} \in A \subset \Omega$ , które odwzorowują w  $\Omega$  dopuszczalną linię  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  określoną na  $Y$ , podobszar ten jest zmienny, zależny od  $\omega$  w obszarze  $m$ ,

$A_{1,i}^{n,n+1}$  podobszar dopuszczalny obrazów  $P^{(n), (n+1)}$  ( $\omega, \omega$ ) wyznaczony przy ustalonych  $\omega^{(1)}$  i  $\omega^{(0)}$  ( $\omega = c$ ,  $\omega = c$ ),

$(A_{1,i}^{n,n+1})^*$  podobszar analogiczny do  $A_{1,i}^{n,n+1}$ , zdefiniowany następująco:

$$(A_{1,i}^{n,n+1})^* \equiv A_{1,i}^{n,n+1} + \left\{ (\omega, \omega) : \omega = \omega, \omega \in \left[ \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \right] \right\} \cap A_{1,i}^{n,n+1};$$

## Oznaczenia pozostałe

**K** produkt kartezjański:

$$\mathbf{K} \equiv \{(\omega, \omega, |\kappa|): \omega \in [0, \pi] \quad \omega \in [0, \pi], \quad |\kappa| \leq 2\pi, \quad l = 2, 3, \dots\};$$

w sensie fizycznym: przestrzeń warunków brzegowych pola elementarnego o  $l$  obszarach jednorodnego stanu naprężenia,

$\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|)$  punkt, który odwzorowuje w **K** ciąg wartości parametrów brzegowych,

$\mathcal{K}$  obszar istnienia rozwiązań pola o  $l$  obszarach jednorodnego stanu naprężenia (określony na **K**),

$(\mathcal{K})^*$  górne (zewnątrzne) oszacowanie obszaru  $\mathcal{K}$ , otrzymane jako rezultat rozwiązania zadań określonych na przestrzeni  $\Omega$ :

$\delta\mathcal{K}$  brzeg obszaru  $\mathcal{K}$  (analogicznie:  $\delta(\mathcal{K})^*$ ),

$\tilde{\phi}$  czynnik funkcji  $\phi(\omega, \omega, q)$  określony wyłącznie na  $\Omega$ , definiowany w celu rozdzielenia zmiennych w tej funkcji ((10.9)),

$\kappa$   $i$ -ta funkcja kryterialna,

$\Omega'$  produkt kartezjański  $\Omega' \equiv \{(\omega, \omega): \omega \in [0, \pi], \quad \omega \in [0, \pi]\}$

$m$  krzywa na powierzchni zewnętrznej obszaru  $\mathcal{K}$ , której rzut  $m'$  na płaszczyznę  $|\kappa| = \text{const}$  ogranicza obszar płaski **A**; obszar **A** jest określony na  $\Omega'$ .

## 9. MIEJSCE ZADANIA I STAN JEGO ROZWIĄZANIA<sup>(1)</sup>

Rozwiązując statycznie dopuszczalne, nieciągłe i graniczne pola naprężeń, w tym także pola elementarne, dochodzi się do bardzo złożonego, nieliniowego układu równań i nierówności, dla którego należy rozwiązać odpowiednie zagadnienie brzegowe.

W podejściu klasycznym, układ ów buduje się zestawiając następujące warunki:

a) równania równowagi na każdej linii nieciągłości naprężeń  $\mathcal{L}^{n, n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots, (l-1)$ );

b) warunek plastyczności w każdym obszarze jednorodnym  $n$  ( $n = 1, 2, \dots, l$ );

c) warunki nierównościowe, których spełnienie zabezpiecza możliwość konstrukcji pola w płaszczyźnie fizycznej  $Y$ ;

<sup>(1)</sup> We wszystkich częściach pracy zachowuje się ciągłość numeracji rozdziałów.

d) warunki brzegowe; warunki te mogą być formułowane w różnorodny sposób; dla pól elementarnych ustala się na przykład graniczne stany naprężeń w obszarach skrajnych 1 i  $l$  oraz kąt  $\varkappa$  pomiędzy głównymi kierunkami naprężeń w tych obszarach (warunki równościowe); niekiedy żąda się także fizycznej zawartości pola w półpłaszczyźnie ograniczonej danym z góry kątem  $\delta$  (warunek nierównościowy).

Postacie związków a), b), d) są powszechnie znane. Zostały one podane przez W. SZCZEPIŃSKIEGO w pracy [1] i były stosowane we wszystkich pracach późniejszych. Związki te, w ogólności nieliniowe, łatwo jest przedstawić w formie rekurencyjnej, by następnie całość układu zestawiać z gotowych podukładów.

Konstrukcja takiego układu nie jest jednak prosta. Nie znamy bowiem nawet liczby wspomnianych podukładów, której określenie wymaga założenia struktury układu linii nieciągłości naprężeń w przestrzeni fizycznej  $Y$ . Z góry nie jest zatem określona ani liczba niewiadomych, ani struktura układu równań i nierówności, które dla wyznaczenia pola należy ułożyć.

Trafny dobór struktury jest najtrudniejszym momentem zadania. W ogólności, gdy przyjmować ją dowolnie — poszukiwane rozwiązanie pola może nie istnieć.

W części I ([10]) pokazano, że liczba obszarów jednorodnych  $l$  zależy zarówno od postaci warunków brzegowych, jak i konkretnych wartości, które przyjmują dane na brzegach parametry. Kluczowym dla możliwości badań obszarów istnienia rozwiązań było wprowadzenie parametrycznego opisu nieciągłości pól elementarnych, za pomocą elementów zbioru ((5.1)):

$$\{ \overset{(1)}{\omega}, \overset{(2)}{\omega}, \dots, \overset{(l)}{\omega}, \overset{(1)}{q}, \overset{(2)}{q}, \dots, \overset{(l-1)}{q} \}$$

i funkcji określonych na jego podzbiorach:

$$\overset{(n+1)}{\phi} = \overset{(n)}{\phi}(\overset{(n+1)}{\omega}, \overset{(n)}{\omega}, \overset{(n)}{q}), \quad \overset{(n)}{\gamma} = \overset{(n)}{\gamma}(\overset{(n)}{\omega}, \overset{(n+1)}{\omega}, \overset{(n)}{q}) \quad (n = 1..(l-1)),$$

gdzie  $\overset{(n)}{\omega}$  oznacza parametr naprężenia w obszarze jednorodnym  $n$  ( $\overset{(n)}{\omega} \in [0, \pi]$ );

$\overset{(n)}{q}$  — parametr podrodziny linii nieciągłości naprężeń  $\mathcal{L}^{n,n+1}$ , rozdzielającej

obszary jednorodne  $n$  i  $n+1$  ( $q = 1, 2, 3, 4$ ),  $\overset{(n+1)}{\phi}, \overset{(n)}{\gamma}$  ( $n = 1..(l-1)$ ) — funkcje określone wzorami (3.5) (por. także rys. 13.).

W ramach tego opisu udaje się spełnić tożsamościowo warunki typu a), b) i zredukować w ten sposób klasyczny układ równań do jednego tylko równania typu (5.2)<sub>1</sub> w postaci:

$$(9.1) \quad \varkappa = \sum_{n=2}^{l-1} \overset{(n)}{\phi}.$$

Odpowiada ono warunkowi d).

Równanie (5.2)<sub>1</sub> zacytowano raz jeszcze by ułatwić czytanie części II i III. Nadano mu równocześnie nowy numer wzoru. Fakt powtórzenia zaznaczać będziemy za pomocą znaku  $\rightarrow$ , na przykład: (5.2)<sub>1</sub>  $\rightarrow$  (9.1). W tym samym celu powtórzymy dalej kilka innych, ważniejszych wzorów z części I.

Warto zauważyć, że wspomniana redukcja liczby równań, a także zmiennych — charakterystyczna dla opisu parametrycznego — nie dotyczy tylko pól elementarnych, które są w pracy rozważane. Jej znaczenie staje się najbardziej istotne podczas rozwiązywania pól o dużym stopniu złożoności, gdzie wymiar klasycznego układu równań i nierówności ulega wielokrotnemu zmniejszeniu. Podkreślamy, że efekt ów powstaje w bardzo złożonym układzie nieliniowym.

Korzystną własnością opisu parametrycznego jest także i to, że w przypadku pól elementarnych można prosto i właściwie w jeden tylko sposób wyspecyfikować elementy zbioru parametrów brzegowych. Pozwala to badać istnienie rozwiązań, analizując zależność funkcyjną:  $\eta^{(1) (l)}(\omega, \omega, \kappa, \delta, l) = 0$  (por. 5.2). Zależność tę można interpretować jako pewien związek pomiędzy zbiorem wartości danych na brzegach parametrów, a fizyczną strukturą pola i równocześnie strukturą związków, które to pole opisują.

Warunki związane z zawartością pola w półpłaszczyźnie określonej kątem  $\delta$  ((5.2)<sub>2</sub>, rys. 5) nie są w pracy analizowane. Są to warunki nierównościowe, aktywne dopiero w zadaniach formułowanych dla pól złożonych. Takich pól nie rozpatrujemy.

W części I wyprowadzono m.in. warunki istnienia rozwiązań dla przypadku, gdy w skrajnych obszarach jednorodnych pola 1 i  $l$  zakłada się tylko parametry naprężeniowe  $\omega = c$ ,  $\omega = c$ . Wyjściowa zależność strukturalna typu  $\eta^{(1) (l)}(\omega, \omega, \kappa, \delta, l) = 0$  została zatem uproszczona do postaci  $\eta_1^{(1) (l)}(\omega, \omega, l) = 0$  i dotyczyła zadań, które określono wówczas jako zadania bez ograniczeń geometrycznych. W części II dołączamy jeszcze ograniczenie na kąt  $\kappa$  pomiędzy kierunkami głównych naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_1$ ; uwzględniamy zatem warunek równościowy (9.1) i rozpatrujemy zależność:

$$\eta_2^{(1) (l)}(\omega, \omega, \kappa, l) = 0.$$

Rozszerzenie zbioru ograniczeń nie zmienia ogólnej koncepcji rozwiązania omówionej w części I. Jest jednak przyczyną znacznej komplikacji analiz. Między innymi:

wyznaczanie obszarów istnienia rozwiązań nie daje się już sprowadzić do ciągów liniowych zadań optymalizacji, analogicznych do omówionych w punkcie 5 (por. (9.5)) dla  $\eta_1^{(1) (l)}(\omega, \omega, l) = 0$ ;

nawet w przypadkach pól o niewielkiej liczbie obszarów  $l$ , odpowiednie funkcje kryterialne (nieliniowe) przyjmują formy bardzo złożone;

podobne własności posiada zespół ograniczeń; ponadto, w określonych przez nie obszarach stwierdza się m.in. istnienie zbiorów punktów osobliwych; struktury pól, które tym punktom odpowiadają są odmienne od struktur, jakie otrzymuje się dla danych z otoczenia punktów osobliwych; mamy tu do czynienia z efektem zapaści strukturalnej: znika jedna lub równocześnie kilka linii nieciągłości naprężeń; (bliższe wyjaśnienie sensu tej osobliwości podano w rozdziale 12, natomiast sprawę korzystania z terminologii teorii optymalizacji poruszono w punkcie 10.4.).

W tej sytuacji zrezygnowano z poszukiwania ogólnych (analitycznych) formuł rozwoju obszarów istnienia, które byłyby analogiczne do odwzorowań typu (5.7) ( $\rightarrow$ (9.3)). Postawione zadanie rozwiązujemy głównie metodami numerycznymi. Tylko w przypadkach szczególnych — na przykład w badaniach otoczeń punktów i zbiorów punktów osobliwych — korzysta się także z odpowiednio przekształconych wyrażeń analitycznych.

Kwestię istnienia rozwiązań przyjęto badać indywidualnie dla pól o kolejno wzrastającej liczbie obszarów jednorodnych. Założenie to dotyczy jednak wyłącznie warunków nakładanych na  $\omega$ , ponieważ dla warunków związanych

z  $\omega = c$ ,  $\omega = c$  ważne są nadal ogólne zależności (5.5)–(5.7) ((5.5) $\rightarrow$ (9.2), (5.6) $\rightarrow$ (9.5), (5.7) $\rightarrow$ (9.3)), które przedstawiają odwzorowania opisujące ewolucję dopuszczalnych przedziałów zmienności parametrów  $\omega$  (oznaczono  $\Gamma_m^{(n)}$ ) i dopuszczalnych podobszarów obrazów  $P^{n,n\pm 1}$  linii  $\mathcal{L}^{n,n\pm 1}$  w  $\Omega$  (oznaczono  $A_m^{n,n\pm 1}$ ), towarzyszącą wzrostowi  $|n \pm m|$  i związaną z ustaleniem wartości  $\omega = c$  w obszarze jednorodnym „ $m$ ”

$$(9.2) \quad \Gamma_m^{(n\pm 1)} = f(\Gamma_m^{(n)}),$$

$$(9.3) \quad A_m^{n,n\pm 1} \equiv \{(\omega, \omega): \omega \in \Gamma_m^{(n)}, \omega \in \Gamma_m^{(n\pm 1)}, \omega = c\} \cap A,$$

gdzie

$$n = m \pm 1, m \pm 2, \dots \quad (\text{dla } \omega = c \Rightarrow m = 1, \quad n = l..1,$$

$$\text{dla } \omega = c \Rightarrow m = l, \quad n = l..1);$$

$$(9.4) \quad \Gamma_m^{(n)} \equiv \{(\omega): \omega \in [\omega_{\min}^{(n)}, \omega_{\max}^{(n)}], \omega = c\},$$

$$\Gamma_m^{(n\pm 1)} \equiv \{(\omega): \omega \in [\omega_{\min}^{(n\pm 1)}, \omega_{\max}^{(n\pm 1)}], \omega = c\};$$

$$\omega_{\max}^{(n \pm 1)} = \max \left\{ \arccos \left[ \sin \left( \frac{\pi}{6} - \omega^{(n)} \right) \right] : \omega = \omega_{\min}^{(n)}, \omega_{\max}^{(n)}, \left( \frac{2}{3} \pi, \text{ gdy } \frac{2}{3} \pi \in \Gamma_m^{(n)} \right) \right\},$$

(9.5)

$$\omega_{\min}^{(n \pm 1)} = \min \left\{ \arccos \left[ \sin \left( \frac{\pi}{6} + \omega^{(n)} \right) \right] : \omega = \omega_{\min}^{(n)}, \omega_{\max}^{(n)}, \left( \frac{1}{3} \pi, \text{ gdy } \frac{1}{3} \pi \in \Gamma_m^{(n)} \right) \right\}.$$

W zadaniach z kompletnym zespołem równań i nierówności, warunki (4.1)

$$(9.6) \quad P^{n, n \pm 1} \in A$$

((4.1) → (9.6)) są wprowadzicie tylko warunkami koniecznymi istnienia rozwiązań, nie mniej zachowują najwyższy priorytet.

Ze względu na potrzebę ujęcia w miarę kompletnego materiału, którego zakres okazał się dość znaczny, w pracy ograniczamy się tylko do przedstawiania sformułowań poszczególnych zadań, szkicowego omówienia metod ich rozwiązywania oraz otrzymanych rezultatów. Podajemy ponadto jedynie wyniki, które mają większe znaczenie praktyczne. Mimo to, a nawet mimo prezentacji wyników głównie za pomocą rysunków, zaszła jeszcze konieczność wydzielenia części III, w której analizowane są warunki brzegowe odpowiadające wspomnianym osobliwościom strukturalnym. Okazało się bowiem, że wyniki tych analiz prowadzą do ważnych wniosków odnoszących się do struktur linii nieciągłości naprężeń wokół wewnętrznych węzłów tych linii w polach złożonych.

Należy podkreślić, że wprowadzenie opisu parametrycznego i uzyskanie za jego pomocą wielu nowych wyników odnosi się do rozwiązywania nieciągłych pól granicznych. Pozostaje jednak w całości w ramach idei metody, którą zaproponował W. SZCZEPIŃSKI w pracy [1].

## 10. ZADANIA Z DOŁĄCZONYM WARUNKIEM NA $\varkappa$

### 10.1. Algorytm rozwoju podobszarów $A_{1,i}^{n, n+1}$ .

W części I (p. 5.3, (5.7) → (9.3)) przedstawiono algorytm rozwoju podobszarów  $A_{1,i}^{n, n+1}$  przy ustalonym  $\omega = c$  w obszarze jednorodnym 1. Dla potrzeb analiz zadań z rozszerzonym zespołem warunków rozważymy teraz przypadek rozwoju analogicznych podobszarów, który odpowiada sytuacji, gdy z góry ustalane są równocześnie  $\omega = c$  i  $\omega = c$ . W tym celu wychodzimy ponownie od odwzorowań typu (5.5) → (9.2) z tą tylko różnicą, że obecnie wyznaczamy dwa ciągi przedziałów:

$$\{ \overset{(2)}{\Gamma_1}, \overset{(3)}{\Gamma_1}, \dots, \overset{(l)}{\Gamma_1} \} \text{ oraz } \{ \overset{(l-1)}{\Gamma_l}, \overset{(l-2)}{\Gamma_l}, \dots, \overset{(1)}{\Gamma_l} \}.$$

Pierwszy wiąże się z ustalonym  $\omega^{(1)}$  (rozwój „w przód”), a drugi –  $\omega^{(l)}$  (rozwój „wstecz”).

Części wspólne:

$$(10.1) \quad \Gamma_{1,l}^{(2)} = \Gamma_1^{(2)} \cap \Gamma_l^{(2)}, \quad \Gamma_{1,l}^{(3)} = \Gamma_l^{(3)} \cap \Gamma_l^{(3)} \dots$$

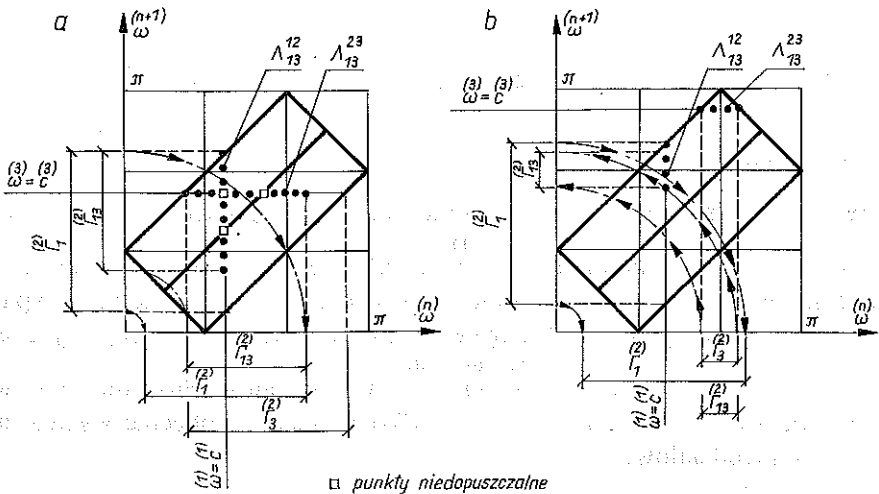
określają wówczas dopuszczalne przedziały zmienności parametrów  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega^{(3)}$ , ...,  $\omega^{(l-1)}$  przy danych  $\omega = c$  i  $\omega = c$ .

Analogicznie do (5.7) → (9.3) definiujemy także dopuszczalne podobszary  $A_{1,l}^{n,n+1} \subset A \subset \Omega$ . Podobszary te są funkcjami  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(l)}$  określonymi następująco:

$$(10.2) \quad A_{1,l}^{n,n+1} \equiv \Gamma_{1,l}^{(n)} \times \Gamma_{1,l}^{(n+1)} \cap A.$$

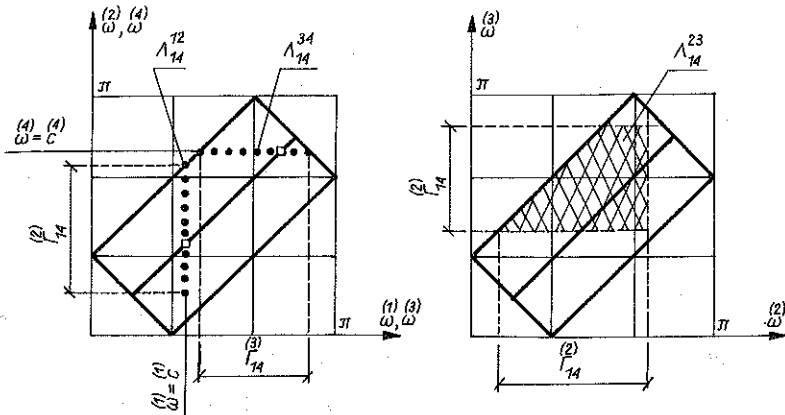
Żądanie zawartości  $P(\omega, \omega \in A_{1,l}^{n,n+1})$  dla  $n = 1, 2, \dots, (l-1)$  interpretuje się jako zespół warunków na to, aby wszystkie funkcje:  $\gamma(\omega, \omega, q)$ ,  $\phi(\omega, \omega, q)$ , przy danych na brzegach  $\omega = c$ ,  $\omega = c$ , były określone na swoich dziedzinach. Są to zatem także warunki istotne dla konstrukcji sprawnego algorytmu komputerowego, w którym wartości funkcji  $\gamma$  i  $\phi$  będą obliczane.

Przedziały  $\Gamma_{1,l}^{(n)}$  lub podobszary  $A_{1,l}^{n,n+1}$  w przypadkach pól o 2 i 3 obszarach można dość łatwo wyznaczać geometrycznie (por. rys. 9). Ze wzrostem liczby



Rys. 9. Przykłady podobszarów  $A_{1,3}^{n,n+1}$  ( $n = 1, 2$ )





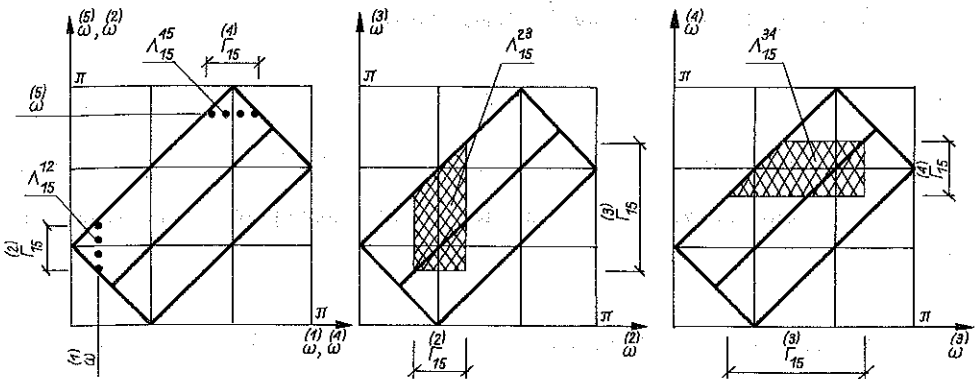
□ punkty niedopuszczalne

Rys. 10. Przykład podobszarów  $\Lambda_{1,4}^{n,n+1}$  ( $n = 1, 2, 3$ )

$l$  sposób ten jednak znacznie się komplikuje. Korzystamy wtedy z pomocy komputera. Przykłady edycji wyników pokazano na rys. 10 i 11 (rysunki opracowano na podstawie wydruków komputerowych). W konstrukcji z rys.

10 założono:  $l = 4$ ,  $\omega^{(1)} = c = 70^\circ$ ,  $\omega^{(4)} = c = 160^\circ$ , natomiast w konstrukcji z rys. 11 —  $l = 5$ ,  $\omega^{(1)} = c = 20^\circ$ ,  $\omega^{(4)} = c = 160^\circ$ .

Sens geometryczny zdefiniowanych obiektów oraz „działanie” formuł (10.1) pokazano na dwóch przykładach rozwiązań (rys. 9a i 9b) otrzymanych dla pól o 3 obszarach jednorodnych. Obok przedziałów  $\Gamma_{1,l}^{(n)}$  i podobszarów  $\Lambda_{1,l}^{n,n+1}$ , naniesiono tu dodatkowo przedziały  $\Gamma_1^{(n)}$  i  $\Gamma_l^{(n)}$  znane z części I.



Rys. 11. Przykład podobszarów  $\Lambda_{1,5}^{n,n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ )

Przyczyny szczególnego wyróżniania pól o trzech, czterech i pięciu obszarach zostaną wyjaśnione w dalszej części pracy.

W uzupełnieniu podanego omówienia warto odnotować cztery następujące uwagi dodatkowe:

1. Podobszary  $A_{1,l}^{n,n+1}$  wyznaczają pola zmienności parametrów  $\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}$  ( $n = 2, 3, \dots, (l-1)$ ), w których funkcje  $\hat{\gamma}(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)})$ ,  $\hat{\phi}(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)})$  są określone i rzeczywiste. Zgodnie z definicją obszaru  $A$  (wzory (3.6)),  $A_{1,l}^{n,n+1}$  nie zawierają wierzchołków tego obszaru, mimo że dla tych punktów rozwiązania istnieją, chociaż mogą nie być określone<sup>(2)</sup>. Tak więc pola, w których choćby jeden z parametrów naprężeniowych przyjmuje wartości:  $\omega^{(n)} = 0$  lub  $\omega^{(n)} = \pi$ , nie są uwzględniane. Przypadki te badamy osobno (część III) i rozważamy tylko w sytuacjach wyjątkowych: gdy nieokreślony układ linii  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  jest jedynym rozwiązaniem dopuszczalnym. Odpowiednikiem obszaru  $A$  jest wówczas obszar

$$\bar{A} \equiv A + \left\{ 0, \frac{\pi}{3} \right\} + \left\{ \frac{2}{3}\pi, \pi \right\} + \left\{ \frac{\pi}{3}, 0 \right\} + \left\{ \pi, \frac{2}{3}\pi \right\}.$$

2. Podane definicje przedziałów i podobszarów dopuszczalnych są dogodnie dla analiz numerycznych, gdzie nieokreśloności nie są akceptowane. Dysponowanie algorytmem wyznaczania  $A_{1,l}^{n,n+1}$  pozwala od razu generować ciągi wartości:  $\omega^{(2)}, \omega^{(3)}, \dots, \omega^{(l-1)}$  z dziedzin funkcji  $\hat{\gamma}(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)})$  i  $\hat{\phi}(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)})$  ( $n = 1, 2, \dots, (l-1)$ ).

3. Praktyczna potrzeba wyznaczania  $A_{1,l}^{n,n+1}$  powstaje dla pól elementarnych, które zawierają  $l > 2$  obszarów jednorodnego stanu naprężenia. W przypadku pojedynczej linii  $\mathcal{L}^{12}$ , która rozdziela obszary „1” i „2”, dziedziną funkcji  $\hat{\gamma}(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$ ,  $\hat{\phi}(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$  jest cały obszar  $A$ .

4. Najmniejsza liczba  $l$ , dla której zachodzi

$$(10.3) \quad \Gamma_{1,l}^{(1)} \neq \emptyset$$

jest najmniejszą liczbą obszarów jednorodnych, przy której — i przy danych  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$  — są spełnione warunki konieczne istnienia rozwiązania pola elementarnego.

<sup>(2)</sup> Dokładniej: linia  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  jest określona, gdy  $\omega = \frac{\pi}{3}$  i  $\omega^{(n+1)} = 0$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$ ; nie jest natomiast określona dla  $\omega = 0$  i  $\omega^{(n+1)} = \frac{\pi}{3}$ ; analogicznie dla przeciwległych naroży obszaru  $A$ .

Warunek (10.3) jest równoważny (5.8) i także dotyczy zadania bez warunków geometrycznych. Można go również napisać w postaci (symetria):

$$\Gamma_{1,l}^{(l)} \neq \emptyset.$$

### 10.2. Warunki formułowane w celu rozwiązania pól elementarnych

W opisie parametrycznym, cały klasyczny układ warunków równościowych sprowadza się do jednego tylko równania typu (5.2)<sub>1</sub> → (9.1). Własność ta jest niezależna od liczby zakładanych w polu obszarów  $l$ .

W celu rozwiązania pola przy danych na brzegach  $\{\omega, \omega, \kappa\}$ , równanie typu (5.2)<sub>1</sub> → (9.1) wyrażamy za pomocą parametrów podrodzin  $q$  i zapisujemy w postaci:

$$(10.4) \quad \kappa = \phi^{(1)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(2)}(\omega, \omega, q) + \dots + \phi^{(l-1)}(\omega, \omega, q).$$

Funkcje  $\phi^{(n)}(\omega, \omega, q)$  są tu określone wzorami (3.5)<sub>2</sub>.

W równaniu (10.4) niewiadomymi są:

a) parametry naprężeniowe w obszarach pośrednich  $\omega, \omega, \dots, \omega$   
 $(\omega \in (0, \pi));$

b) parametry podrodzin  $q, q, \dots, q$ ; mogą one przyjmować wartości:  
 $q = 1, 2, 3, 4.$

Pokreślamy, że nieznaną jest również liczba obszarów jednorodnych  $l$ , także więc i liczba niewiadomych parametrów:  $\omega, q$ .

Rozwiązanie równania (10.4) poszukuje się w obszarze ograniczonym, który opisują dwa zespoły warunków. Przede wszystkim żądamy, aby funkcje  $\phi^{(n)}(\omega, \omega, q)$  i  $\gamma^{(n)}(\omega, \omega, q)$  były określone w swoich dziedzinach. Przy ustalonych  $\omega = c, \omega = c$  ( $\omega \in (0, \pi)$ ) prowadzi to do warunków (por. 10.1):

$$(10.5) \quad (\omega, \omega) \in A_{1,l}^{n,n+1} \neq \emptyset \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots, (l-1);$$

Drugi zespół tworzą geometryczne warunki konstrukcji pola na płaszczyźnie fizycznej  $Y$ :

$$\Theta = \gamma^{(n+1)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(n)}(\omega, \omega, q) - \gamma^{(n)}(\omega, \omega, q) > 0$$

$$((n = 1, 2, \dots, (l-2)),$$

$$(10.6) \quad \sum_{j=2}^{l-1} \Theta^{(j)} < 2\pi,$$

$$\Theta^{(n+1)} \neq \pi \quad (\text{wyłącznie dla } l=3).$$

10

Wielkość  $\Theta^{(n+1)}$  jest kątem pomiędzy dwiema sąsiednimi liniami nieciągłości naprężeń  $\mathcal{L}^{n,n+1}$  i  $\mathcal{L}^{n+1,n+2}$  ( $n = 1, 2, \dots, (l-2)$ , rys. 13, rys. 15). Spełnienie  $(10.6)_1$  i  $(10.6)_2$  wyklucza rozwiązania, które by się realizowały w kilku warstwach tej samej płaszczyzny fizycznej  $Y$ . Warunek  $(10.6)_3$  obowiązuje tylko w przypadkach pól o 3 obszarach (bliższe uzasadnienie podano w p. 11.1).

Fakt, iż wszystkie zależności zostały wyrażone przez parametry podrodzin

$q^{(n)}$  ma swoje uzasadnienie w potrzebie konsekwentnej interpretacji parametrów  $\phi$  i  $\gamma$ , jaka powstaje w sytuacji, gdy nakładane są związki na geometrię pola.

Zapisy  $\phi$  i  $\gamma$  za pomocą  $q^{(n)}$  i  $Q^{(n)}$  są równoważne w przypadku pojedynczej linii  $\mathcal{L}$  (por. rys. 1): określają tę samą reprezentację prostych, chociaż parametr  $\gamma$  jest w obu wypadkach inaczej definiowany. W przypadku układów linii  $\mathcal{L}$  równoważna jest tylko interpretacja parametru  $\phi$ . Sposób mierzenia  $\gamma$  wprowadzony dla rodzin linii  $\mathcal{L}$  wymagałby wprowadzenia dodatkowych założeń.

### 10.3. Obszary istnienia rozwiązań $\mathcal{K}^{(l)}$

Przyjmujemy następujące kryterium istnienia rozwiązania: jeśli dla przyjętych na brzegach  $\{\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, \kappa\}$  oraz liczby  $l$  istnieje chociaż jeden taki ciąg:

$$\{\omega^{(2)}, \omega^{(3)}, \dots, \omega^{(l-1)}, \omega^{(l)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \dots, q^{(l-1)}\},$$

który spełnia warunki (10.4)–(10.6), to mówimy, że na płaszczyźnie fizycznej  $Y$  rozwiązanie pola istnieje.

Ogólnie są to rozwiązania niejednoznaczne. Nawet w przypadku  $l=3$ , gdzie nieznanym jest tylko jeden parametr naprężeniowy  $\omega$ , na płaszczyźnie fizycznej  $Y$  mogą istnieć różne rozwiązania, odpowiadające różnym kombinacjom wartości parametrów  $q^{(1)}, q^{(2)}$  (por. przykład z p. 5.1). Możliwe są też sytuacje, gdy dla danych  $\{\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, \kappa, l\}$  istnieje tylko jedno rozwiązanie, gdy rozwiązanie nie jest określone, lub gdy w ogóle nie istnieje. Istnieje ono wówczas dla innej liczby  $l$ , a więc w ramach pola o innej strukturze fizycznej

i innej strukturze warunków, jakie dla rozwiązania tego pola należy ułożyć.

Przyjęte kryterium rozstrzygania o istnieniu, bądź nie istnieniu rozwiązań sugeruje, by obszary istnienia  $\mathcal{K}$  definiować na zbiorze możliwych warunków brzegowych:

$$\mathbf{K} \equiv \{(\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, |\kappa|): \omega^{(1)} \in [0, \pi], \omega^{(l)} \in [0, \pi], |\kappa| \leq 2\pi, l = 2, 3, \dots\}.$$

$\mathbf{K}$  wypełnia zbiór punktów  $\mathbf{B}(\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, |\kappa|)$ , których współrzędnymi są wartości przyjętych na brzegach parametrów.

Obszar  $\mathcal{K}$  jest zbiorem punktów  $\mathbf{B}(\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, |\kappa|) \in \mathbf{K}$ , dla których rozwiązanie pola istnieje w ramach struktury o  $l$  obszarach stanów jednorodnych.

W pracy przyjmujemy, że dysponowanie ciągiem obszarów  $\mathcal{K}$  ( $l = 2, 3, \dots$ ) jest podstawą analiz zachowania się rozwiązań przy różnorodnie przyjmowanych warunkach brzegowych. Wyznaczanie  $\mathcal{K}$  sprowadzamy do poszukiwania zespołów powierzchni, które te obszary ograniczają.

#### 10.4. Zadania sformułowane na przestrzeni $\Omega$

10.4.1. *Zadania z osłabionym zespołem warunków. Obszary  $(\mathcal{K})^*$ .* Ogólnie wszystkie warunki składowe układu: (10.4), (10.5), (10.6) są nieliniowe i bardzo złożone oraz dogodnie do przedstawienia tylko w postaci algorytmów. Z góry nie można zakładać, że funkcje  $\gamma(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}, q)$ ,  $\phi(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}, q)$ , z których układ ten jest budowany, są różniczkowalne, ani nawet, że są ciągłe (por. (3.5), rys. 2).

Jedynie warunki (10.5), ale tylko przy ustalonych  $\omega^{(1)}, \omega^{(l)}$ , są liniowe. Własność ta jest jednak trudna do zdyskontowania, ponieważ wyznaczone przez nią podobszary  $A_{1,1}^{n,n+1}$  są w ogólności wielospójne (por. rys. 9, 10, 11). Warunki (10.5) wyróżnia także i to, że są określone wyłącznie na przestrzeni  $\Omega$ . Funkcje (10.4) i warunki (10.6) są określone na płaszczyźnie fizycznej  $Y$ .

Podane własności, łącznie z brakiem jakichkolwiek informacji o poszukiwanych powierzchniach granicznych obszarów  $\mathcal{K}$  (dla  $l = 3, 4, \dots$ , dla  $l = 2$  — rys. 2c) stały się powodem, że najpierw koncentrowano się na znalezieniu odpowiednich sformułowań okrojonych — z osłabionym zespołem warunków. Najbardziej dogodny wariant takiego zadania udało się znaleźć przy założeniach: a) braku warunków (10.6); b) osłabieniu (10.5) poprzez nie uwzględnianie warunków:

$$(10.7) \quad \omega^{(n)} \neq \omega^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots, (l-1));$$

zamiast (10.5) otrzymuje się wtedy:

$$(10.5)^* \quad (\omega, \omega) \in (A_{1,l}^{n,n+1})^* \neq \emptyset, \quad (n = 1, 2, \dots, (l-1));$$

gdzie (por. rys. 2, 9, 10, 11):

$$(A_{1,l}^{n,n+1})^* = A_{1,l}^{n,n+1} + \left\{ (\omega, \omega) : \omega = \omega, \omega \in \left[ \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \right] \right\} \cap A_{1,l}^{n,n+1}.$$

Uprzedzając, podamy od razu, że przy tych założeniach otrzymuje się nie tylko istotne uproszczenie zadania. Najważniejsze jest to, że w ramach przyjętych uproszczeń otrzymuje się rozwiązania takich obszarów  $(\mathcal{K})^*$ , które różnią się od obszarów  $\mathcal{K}$  ( $\mathcal{K} \subset (\mathcal{K})^*$  tylko na zbiorach o wymiarze mniejszym od wymiaru przestrzeni  $\mathbf{K}$  (dokładniej, dla  $l = 3, 4, \dots$ ).

Istotny jest także fakt, że w sformułowaniu uproszczonym, zadania na wyznaczenie powierzchni ograniczających  $(\mathcal{K})^*$  dają się sprowadzić do poszukiwania zbioru parametrycznych ekstremów odpowiednio przekształconego wyrażenia (10.4) (przy lokalnie ustalonych parametrach:  $\omega = c, \omega = c$ ). Dlatego, chociaż zadanie tylko lokalnie może być traktowane jako problem ekstremum, w tej części pracy posługujemy się terminologią zaczerpniętą z teorii optymalizacji. Mówimy więc, że funkcją kryterialną jest wyrażenie typu (10.4), natomiast warunki typu (10.5\*) tworzą zespół ograniczeń. W konsekwencji określenia te odnosimy także do warunków (10.5) i (10.6).

*10.4.2. Uproszczenia związane z eliminacją parametrów podrodzin.* W celu rozwiązania zadań z ograniczeniami (10.5)\*, zamiast jednej, dyskretnej funkcji kryterialnej (10.4) — tworzymy ciąg takich funkcji dla wszystkich możliwych  $q = 1, 2, 3, 4$  ( $n = 1, 2, \dots, (l-1)$ ). W każdej z nich parametry  $q$  uważamy za ustalone. Dzięki temu oraz dopuszczeniu równości:  $(\omega = \omega, \omega = \omega)$ , funkcje kryterialne mogą być określone tylko na zbiorze parametrów naprężeniowych, które zmieniają się w sposób ciągły. Z postaci (3.5)<sub>2</sub> i (3.4)<sub>2</sub> wnioskujemy, że w funkcjach tych powtarzają się znaki składników, a nawet całe sekwencje znaków (parametry  $q$  oddziałują tylko na znaki  $\phi = \phi(\omega, \omega, q)$ ). Prawidłowość ta ma zresztą proste uzasadnienie w równoważności opisu  $\phi$  za pomocą rodzin  $Q$  i podrodzin  $q$  ( $Q = 1, 2; q = 1, 2, 3, 4$ ).

Eliminując powtarzające się wyrażenia dochodzimy do  $2^{l-1}$  funkcji typu:

$$(10.8) \quad \kappa = \pm \tilde{\phi}^{(1)}(\omega, \omega) \pm \tilde{\phi}^{(2)}(\omega, \omega) \pm \dots \pm \tilde{\phi}^{(l-1)}(\omega, \omega),$$

które układa się dla wszystkich kombinacji znaków.

W (10.8) oznaczono (por. (3.5)<sub>2</sub>):

$$(10.9) \quad \tilde{\phi}(\omega, \omega) = \text{sign}(\omega - \omega) \hat{\phi}(\omega, \omega).$$

Wzory (10.8) można też napisać za pomocą  $\hat{\phi}(\omega, \omega)$  (por. (3.2), ponieważ znaki  $\tilde{\phi}(\omega, \omega)$  w zbiorze  $2^{l-1}$  równań (10.8) zostaną uwzględnione automatycznie.

Pośród wymienionych  $2^{l-1}$  funkcji mamy jeszcze odpowiednie pary funkcji, które różnią się jedynie znakiem  $\varkappa$ . Istotnie różnych z punktu widzenia poszukiwania powierzchni ograniczających obszary  $(\mathcal{K})^*$  jest zatem  $2^{l-2}$  funkcji:

$$(10.10) \quad \varkappa_i = \left| \sum_{n=1}^{l-1} \pm \tilde{\phi}(\omega, \omega) \right|,$$

układanych tylko dla tych kombinacji znaków, które wiążą się z różnymi modułami  $\varkappa$ .

Przedstawiony sposób konstruowania funkcji  $\varkappa_i$  polega na prostym zastąpieniu jednej funkcji dyskretniej — ciągiem  $2^{l-2}$  funkcji określonych na zbiorze parametrów  $\omega$ , zmieniających się w sposób ciągły. Sens tej zamiany nie sprowadza się jednak tylko do uproszczenia funkcji kryterialnych (10.4).

Zauważmy, że: a) ciągłość zmian argumentów  $\omega$ , którą otrzymano dzięki dopuszczeniu równości  $\omega = \omega$ , łączy się z równoczesnym uproszczeniem własności ograniczeń (10.5); w postaci (10.5)\* są to ograniczenia liniowe i wypukłe (określają teraz obszary jednopójne); b) zarówno ciągi funkcji kryterialnych (10.10), jak i ograniczenia (10.5)\* są określone wyłącznie na przestrzeni  $\Omega$ ; wymiar tej przestrzeni jest mniejszy od wymiaru przestrzeni (płaszczyzny)  $Y$ .

Rezultatem rozwiązania zadań (10.10), (10.5)\* są powierzchnie ograniczające obszary  $(\mathcal{K})^*$  takie, że  $\mathcal{K} \subseteq (\mathcal{K})^*$  (obszary  $(\mathcal{K})^*$  są zewnętrznymi oszacowaniami obszarów  $\mathcal{K}$ ). Wyznaczeniu obszarów  $(\mathcal{K})^*$  dla kolejno wzrastających liczb naturalnych  $l$  poświęcony jest rozdział 11.

**10.4.3. Metoda rozwiązania.** Funkcje kryterialne typu (10.10), dla  $\omega \in (0, \pi)$  i  $P(\omega, \omega) \in (\mathcal{A}_{1,l}^{n,n+1})^*$  ( $n = 1, 2, \dots, (l-1)$ ) są funkcjami ciągłymi. Nie mniej kumulują w sobie własności każdej ze swoich funkcji składowych  $\tilde{\phi}(\omega, \omega)$ , w tym nieciągłości pochodnych (por. rys. 2), a także obszary gwałtownych zmian gradientu. Nie pozwala to na dostatecznie dokładną jego estymację, która byłaby ewentualnie niezbędna, gdyby zadanie rozwiązywać metodami

gradientowymi; funkcje (10.10) są bowiem ogólnie dane tylko w postaci algorytmu.

Podane własności zawężają dość silnie wybór metody rozwiązania ([7]). Najbardziej istotne dla tego wyboru są jednak nie tyle własności zadania uproszczonego, ile zadania z kompletnym zespołem warunków. By zlokalizować zbiory, na których aktywne są pozostałe ograniczenia i badać otoczenia tych zbiorów, rozwiązania obu wspomnianych zadań muszą być porównywane. Jest to główna przyczyna, dla której nawet do zadań (10.10), (10.5)\* był stosowany m.in. algorytm będący w istocie pewnym wariantem metody systematycznego przeszukiwania. W sytuacji, gdy dysponujemy ogólnymi

formułami generowania zbioru punktów dopuszczalnych  $(\omega, \omega) \in (A_{1,1}^{n,n+1})^*$  (wzory: (5.6) → (9.5), (10.1), (10.2)), konstrukcja takiego algorytmu staje się względnie prosta, a nakład pracy obliczeniowej – możliwy do zaakceptowania. Ogólny szkic algorytmu przedstawiono w części III łącznie z analizami zadań z kompletnym zespołem warunków.

W celu sprawdzenia dokładności otrzymanych w ten sposób wyników zbudowano dodatkowy algorytm oparty na założeniach metody Complex ([8]). Stosowana wersja algorytmu różniła się dość znacznie od źródłowej. Wprowadzone modyfikacje nie były jednak ukierunkowane na rozwiązywanie pól elementarnych. Algorytm testowano z myślą o zastosowaniu do rozwiązywania pól bardziej złożonych. Implementacje algorytmów podanych w [9], nie są jeszcze powszechnie dostępne.

*10.4.4. Dalsze skutki uproszczeń.* Niekorzystnym efektem eliminacji parametrów  $q$  jest m.in. utrata sprzężenia pomiędzy poszczególnymi funkcjami kryterialnymi (10.10) i ograniczeniami (10.6). Z kolei dopuszczenie równości  $\omega = \omega$  powoduje, że nie są ujawniane rozwiązania o osobliwych strukturach. Rozwiązania te odpowiadają sytuacji, gdy jedna lub kilka linii nieciągłości naprężeń znika, ponieważ rozdzielałyby obszary jednorodne, w których panują stany naprężeń o identycznych wartościach głównych.

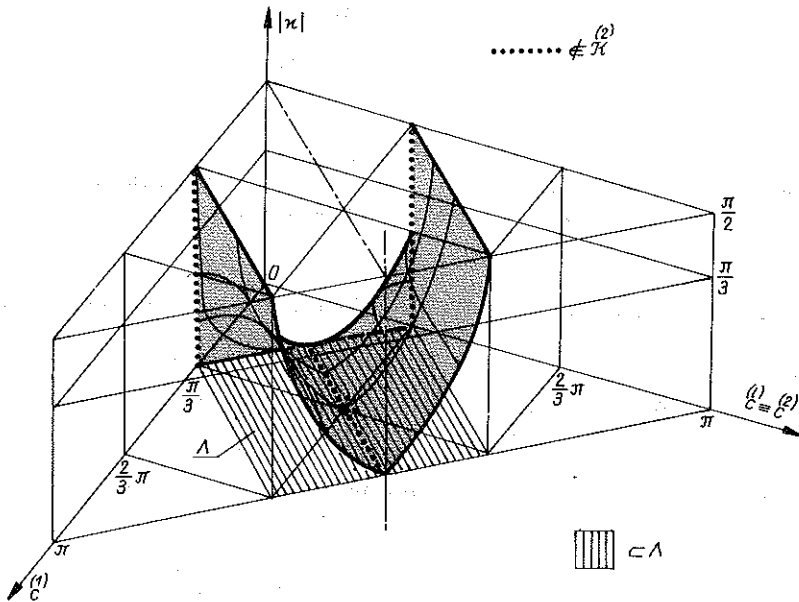
Należy też zauważyć, że w zadaniach (10.10), (10.5)\*, osobliwości rozwiązań nie są „widoczne” już za przyczyną wzorów (3.2) i (3.3). Funkcjom  $\hat{\phi}(\omega, \omega)$  i  $\hat{\gamma}(\omega, \omega)$  wzory te przypisują wartości, jakie wynikają z danych  $\omega, \omega$ . W przypadku  $\omega = \omega$  otrzymujemy na przykład:  $\hat{\phi} = 0$  i pewną konkretną wartość parametru  $\hat{\gamma}$  (por. rys. 2c). Tymczasem przy  $\omega = \omega$  obie funkcje są w istocie nieokreślone: w przekształceniach, które doprowadziły do (3.2), (3.3) dokonano m.in. skrócenia ułamka, który dla  $\omega = \omega$  przyjmuje formę  $\frac{0}{0}$ ; było



to wówczas dopuszczalne ponieważ spełnienie  $\omega^{(n)} \neq \omega^{(n+1)}$  zabezpiecza warunek  $(\omega, \omega^{(n+1)}) \in A_{1,l}^{n,n+1}$ .

11. OBSZARY  $(\mathcal{K})^{(1)}$ \* DLA PÓL ELEMENTARNYCH. ZADANIA SZCZEGÓLOWE

Poniżej pokazano rozwiązania obszarów  $(\mathcal{K})^{(1)}$ \* otrzymane dla pól elementarnych, które zawierają  $l = 3$  i  $l = 4$  obszary stanów jednorodnych.



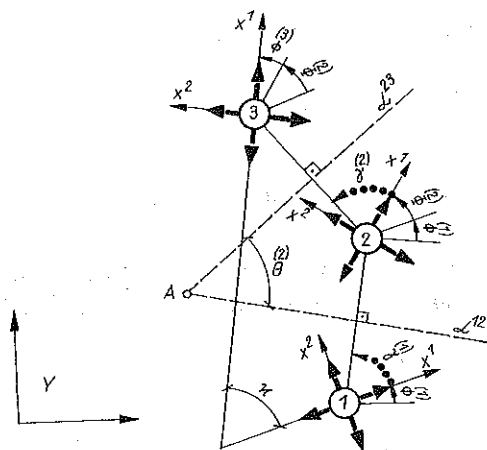
Rys. 12. Symetryczna połowa obszaru  $(\mathcal{K})^{(2)}$  (zbiór powierzchniowy)

W przypadku  $l = 1$  otrzymuje się jednorodne pole naprężeń, natomiast obszar  $(\mathcal{K})^{(2)}$  ( $l = 2$ ) przedstawiono w części I na rys. 2c. Jego powierzchnia została tam przedstawiona za pomocą warstwic.

Obszar  $(\mathcal{K})^{(2)}$  odgrywa ważną rolę w analizach rozwoju obszarów  $(\mathcal{K})^{(1)}$ , szczególnie w odniesieniu do  $(\mathcal{K})^{(3)}$ . Dlatego na rys. 12 pokazano go ponownie, tym razem w postaci rysunku przestrzennego.

11.1. Pola o 3 obszarach jednorodnego stanu naprężenia

11.1.1. Warunki formułowane w celu rozwiązania pola. Odpowiedni szkic pola pokazano na rys. 13. Ustalone są parametry naprężeniowe  $\omega = c \in (0, \pi)$ ,



Rys. 13. Szkic pola o 3 obszarach jednorodnego stanu naprężenia.

(Uwaga: we wszystkich częściach pracy parametr  $\phi$  jest na rysunkach przedstawiany za pomocą łuków ciągłych,  $\gamma$  – kropkowych)

$\omega = c \in (0, \pi)$  w obszarach skrajnych 1 i 3 oraz kąt  $\alpha$  pomiędzy kierunkami  $\sigma_1^{(1)}$  i  $\sigma_1^{(3)}$ . Pomiedzy obszarami 1 i 3 istnieje obszar pośredni 2, który jest wydzielony za pomocą dwóch linii nieciągłości naprężeń  $\mathcal{L}^{12}$  i  $\mathcal{L}^{23}$ . Geometria tych linii oraz parametr  $\omega$  nie są dane. W celu rozwiązania takiego pola formułujemy następujący zespół warunków (por. (10.4)÷(10.6):

$$(11.1) \quad \alpha = \phi^{(1) (2) (1)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(2) (3) (2)}(\omega, \omega, q) = \phi + \phi,$$

$$(11.2) \quad (\omega, \omega) \in \Lambda_{1,3}^{12} \neq \emptyset, \quad (\omega, \omega) \in \Lambda_{1,3}^{23} \neq \emptyset,$$

$$\Theta = \gamma^{(2) (2) (3) (2)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(2) (3) (2)}(\omega, \omega, q) - \gamma^{(1) (2) (1)}(\omega, \omega, q) > 0,$$

$$(11.3) \quad \Theta < 2\pi, \quad \Theta \neq \pi.$$

Niewiadomymi są  $\omega$ ,  $q$ ,  $q$ , przy czym parametry  $q$ ,  $q$  przebiegają zbiór  $q = 1, 2, 3, 4$  i decydują jedynie o znakach  $\phi^{(2) (3) (2)}$ ,  $\phi^{(n+1)}$   $\left( \phi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], n = 1, 2 \right)$ .  
Jeśli przy danych  $\{\omega, \omega, \alpha\}$  można dobrać ciąg wartości  $\{\omega, q, q\}$ , który

spełnia warunki (11.1)÷(11.3), to mówimy, że dla przyjętych warunków brzegowych rozwiązanie pola o 3 obszarach istnieje.

Warunek (11.3)<sub>3</sub> wyklucza rozwiązanie dla  $\Theta = \pi$ . W rzeczywistości powstaje wtedy tylko jedna linia nieciągłości naprężeń, utworzona przez dwie współliniowe półproste  $\mathcal{L}^{12}$ ,  $\mathcal{L}^{23}$ ; pole, w którym z góry przyjęto 3 obszary staje się polem o 2 obszarach; pierwotna struktura pola ulega degeneracji (część III). Warunek  $\Theta \neq \pi$  jest charakterystyczny dla pola elementarnego o 3 obszarach i stanowi tu uzupełnienie warunku  $\Theta > 0$ . W przypadku pól o 4 obszarach jednorodnych nie jest on nakładany.

11.1.2. *Obszar* ( $\mathcal{K}$ )<sup>\*</sup>. Eliminując z (11.1) parametry  $q \notin \Omega$  – otrzymamy ciąg czterech funkcji:

$$\begin{aligned} \kappa &= \tilde{\phi}^{(1) (2)}(\omega, \omega) + \tilde{\phi}^{(2) (3)}(\omega, \omega), & \kappa &= \tilde{\phi}^{(1) (2)}(\omega, \omega) - \tilde{\phi}^{(2) (3)}(\omega, \omega), \\ (11.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= -\tilde{\phi}^{(1) (2)}(\omega, \omega) - \tilde{\phi}^{(2) (3)}(\omega, \omega), & \kappa &= -\tilde{\phi}^{(1) (2)}(\omega, \omega) + \tilde{\phi}^{(2) (3)}(\omega, \omega). \end{aligned}$$

Widoczne jest, że odpowiednie pary funkcji (11.4) mają identyczne moduły.

Aby wyznaczyć ( $\mathcal{K}$ )<sup>\*</sup> wystarczy więc rozważyć dwie funkcje:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= |\tilde{\phi}^{(1) (2)}(\omega, \omega) + \tilde{\phi}^{(2) (3)}(\omega, \omega)|, \\ (11.5) \end{aligned}$$

$$\kappa_2 = |\tilde{\phi}^{(1) (2)}(\omega, \omega) - \tilde{\phi}^{(2) (3)}(\omega, \omega)|.$$

Powierzchnie ograniczające ( $\mathcal{K}$ )<sup>\*</sup> wyznaczamy numerycznie rozwiązując następujące zadania:

$$\begin{aligned} \kappa_{i \max}(\omega, \omega) &= \max \{ \kappa_i(\omega, \omega, \omega) : (\omega, \omega) \in (\mathcal{A}_{1,3}^{12})^*, (\omega, \omega) \in (\mathcal{A}_{1,3}^{23})^* \}; \\ (11.6) \end{aligned}$$

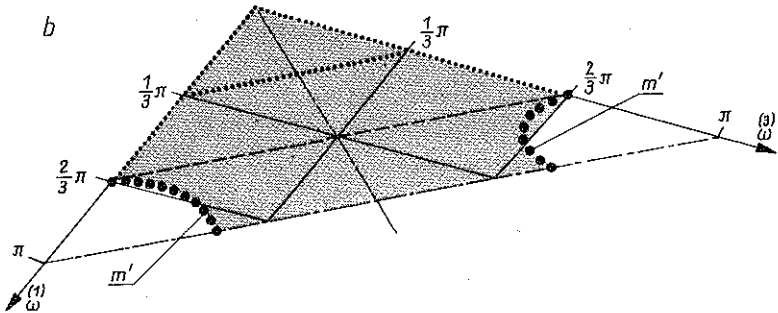
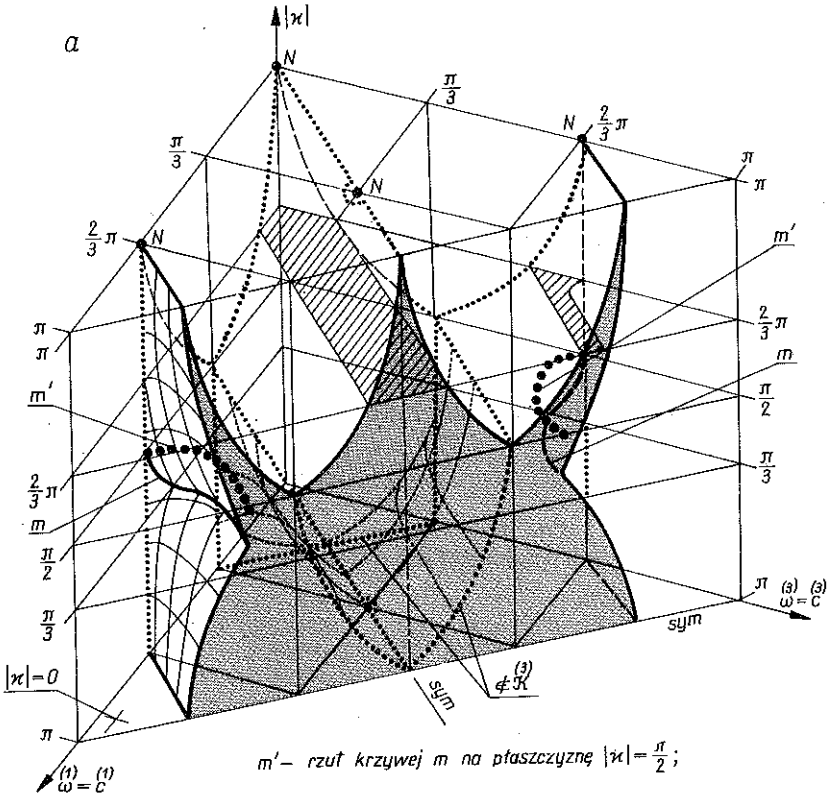
$$\kappa_{i \min}(\omega, \omega) = \min \{ \kappa_i(\omega, \omega, \omega) : (\omega, \omega) \in (\mathcal{A}_{1,2}^{12})^*, (\omega, \omega) \in (\mathcal{A}_{1,3}^{23})^* \},$$

$$i = 1, 2,$$

w których wartości  $\omega = c \in (0, \pi), \omega = c \in (0, \pi)$  są lokalnie (na kroku) zamrażane. W każdym z takich zadań mamy nieliniowe funkcje kryterialne (por. (11.6)), liniowe ograniczenia (11.2)<sup>\*</sup> oraz jedną tylko zmienną  $\omega$ .

Rezultatem rozwiązania zadań (11.6) są powierzchnie ekstremalne:  $\varkappa_{i\max}^{(1)}(\omega, \omega)$ ,  $\varkappa_{i\min}^{(1)}(\omega, \omega)$  ( $i = 1, 2$ ) określone w **K**. Wyznaczają one obszary

$$(11.7) \quad (\mathcal{K}^i)^* \equiv \{(\omega, \omega, |\varkappa|): \omega, \in (0, \pi), \omega \in (0, \pi), |\varkappa| \in [\varkappa_{i\min}, \varkappa_{i\max}], i = 1, 2\}.$$



Rys. 14. a) Symetryczna połowa obszaru  $\mathcal{K}$ , b) Symetryczna połowa obszaru płaskiego **A**;  $m'$  - rzut krzywej  $m$  na płaszczyznę  $|\varkappa| = \pi/2$

Ich suma

$$(11.8) \quad (\mathcal{K})^* = (\mathcal{K}_1)^* \cup (\mathcal{K}_2)^*$$

jest poszukiwanym obszarem  $(\mathcal{K})^*$ .

Przypominamy, że warunek  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|) \in (\mathcal{K})^*$  gwarantuje istnienie rozwiązania pola tylko wtedy, gdy spełnione są jeszcze warunki (11.3) oraz gdy dla każdego  $n = 1, 2$  zachodzi  $\omega \neq \omega^{(n)}$ .

Graficzną postać obszaru  $(\mathcal{K})^*$  przedstawiono na rys. 14a. W istocie jest to już kompletny obszar  $\mathcal{K}$ , ponieważ na tym rysunku zaznaczono miejsca (cienkie linie kropkowe), gdzie warunki (11.3) oraz  $\omega \neq \omega^{(n)}$  nie są spełnione.

Tworzą one zbiory punktów  $\mathbf{B}(\omega, \omega, |\kappa|) \notin \mathcal{K}$ . Dla takich  $\mathbf{B}$ , struktury pól o 3 obszarach ulegają degeneracji (część III). Cienkimi liniami kropkowymi zaznaczono również zbiory punktów  $\mathbf{B}$ , dla których rozwiązania nie są określone. Punkty (izolowane), dla których rozwiązanie nieokreślone jest jedynym możliwym oznaczono pojedynczą grubą kropką oraz literą  $N$ .

Własności otrzymanego obszaru  $\mathcal{K}$  wykorzystamy między innymi w części III do wyznaczenia dolnego oszacowania powierzchni  $\max |\kappa(\omega, \omega)|$  ograniczającej od góry obszar rozwiązań dopuszczalnych pola zawierającego 5 obszarów jednorodnych  $(\mathcal{K})$ . Uczynimy to za pomocą geometrycznej konstrukcji obszaru płaskiego  $\mathbf{A}$ , pokazanego na rys. 14b, ograniczonego krzywymi typu  $m'$  (rys. 14a, grube linie kropkowe) i określonego na produkcie

$$(11.9) \quad \Omega' \equiv \{(\omega, \omega): \omega \in [0, \pi], \omega \in [0, \pi]\}.$$

Krzywe  $m'$ , są krzywymi płaskimi, utworzonymi przez rzutowanie na płaszczyznę  $|\kappa| = \text{const}$  (na rys. 14b —  $|\kappa| = \frac{\pi}{2}$ ) krzywej przestrzennej  $m$  (rys. 14a),

poprowadzonej na powierzchni zewnętrznej obszaru  $(\mathcal{K})$ . Wyróżniając krzywą  $m$ , jej rzut  $m'$  oraz tworząc obszar  $\mathbf{A}$  przyjęto następującą jego własność, dobrze widoczną na rys. 14a:

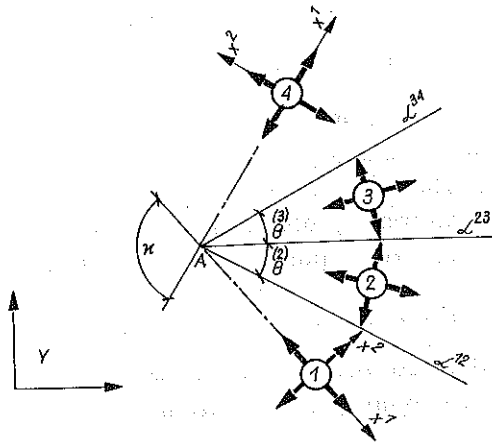
jeśli spełnione są warunki:

$$(11.10) \quad (\omega, \omega) \in \mathbf{A}, \quad |\kappa| \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (\omega, \omega, |\kappa|) \notin \mathcal{K},$$

to dla wszystkich zbiorów wartości warunków brzegowych, które te warunki spełniają, rozwiązania pól o 3 obszarach jednorodnych na pewno istnieją.

### 11.2. Pola o 4 obszarach jednorodnych

Szkic pola pokazano na rys. 15. Danymi są parametry naprężeniowe  $\omega = c \in (0, \pi)$ ,  $\omega = \omega \in (0, \pi)$  w obszarach skrajnych 1 i 4 oraz kąt  $\kappa$  pomiędzy kierunkami  $\sigma_1^{(1)}$  i  $\sigma_1^{(4)}$ . Pole zawiera dwa obszary pośrednie 2 i 3 oraz linie  $\mathcal{L}^{12}$ ,  $\mathcal{L}^{23}$ ,  $\mathcal{L}^{34}$ . Geometria tych linii oraz parametry naprężeniowe  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega^{(3)}$  w obu obszarach wewnętrznych nie są dane.



Rys. 15. Szkic pola o 4 obszarach jednorodnego stanu naprężenia

Zgodnie z (10.4)–(10.6), w celu rozwiązania tego pola należy ułożyć następujący zespół warunków:

$$(11.11) \quad \kappa = \phi^{(1)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(2)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(3)}(\omega, \omega, q) = \phi^{(2)} + \phi^{(3)} + \phi^{(4)}$$

$$(11.12) \quad (\omega, \omega) \in A_{1,4}^{(1)(2)}, \quad (\omega, \omega) \in A_{1,4}^{(2)(3)} \neq \emptyset, \quad (\omega, \omega) \in A_{1,4}^{(3)(4)} \neq \emptyset;$$

$$\Theta = \gamma^{(2)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(2)}(\omega, \omega, q) - \gamma^{(1)}(\omega, \omega, q) > 0;$$

$$(11.13) \quad \Theta = \gamma^{(3)}(\omega, \omega, q) + \phi^{(3)}(\omega, \omega, q) - \gamma^{(2)}(\omega, \omega, q) > 0;$$

$$\Theta^{(2)} + \Theta^{(3)} < 2\pi.$$

Niewiadomymi są  $\omega^{(2)}, \omega^{(3)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \omega^{(3)}$ , przy czym  $q^{(n)}$  mogą przyjmować wartości  $q^{(n)} = 1, 2, 3, 4$  i decydują tylko o znakach  $\phi(\omega^{(n)}, \omega^{(n+1)}, q^{(n)})$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

Dalsze postępowanie jest analogiczne do opisanego w punkcie poprzednim.

W celu wyznaczenia obszaru  $(\mathcal{K})^{(4)*}$  formułuje się cztery funkcje analogiczne do (11.5). Wynikają z nich odpowiednie postacie funkcji kryterialnych  $\kappa_i^{(1)(2)(3)(4)}(\omega, \omega, \omega, \omega)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Przytaczanie rozwiniętych postaci  $\kappa_i$  pomijamy; dodamy tylko, że są one funkcjami ciągłymi swoich argumentów i określonymi wyłącznie na przestrzeni  $\Omega$ .

Powierzchnie ograniczające  $(\mathcal{K})^{(4)*}$  wyznacza się rozwiązując ciąg ośmiu zadań typu:

$$(11.14) \quad \begin{aligned} \kappa_{i\max}^{(1)(4)}(\omega, \omega) &= \max \{ \kappa_i^{(1)(2)(3)(4)}(\omega, \omega, \omega, \omega) : (\omega, \omega) \in (A_{1,4}^{n,n+1})^*, n = 1, 2, 3 \}, \\ \kappa_{i\min}^{(1)(4)}(\omega, \omega) &= \min \{ \kappa_i^{(1)(2)(3)(4)}(\omega, \omega, \omega, \omega) : (\omega, \omega) \in (A_{1,4}^{n,n+1})^*, n = 1, 2, 3 \}, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3, 4.$

Zmiennymi są tutaj  $\omega^{(2)}$  i  $\omega^{(3)}$ , natomiast  $\omega^{(1)} = c \in (0, \pi)$ ,  $\omega^{(4)} = c \in (0, \pi)$  są lokalnie (na kroku) zamrażane. Własności funkcji kryterialnych (por. (11.14)) i ograniczeń ((11.12)\*) są takie same jak dla pola o 3 obszarach jednorodnych.

Rezultatem rozwiązywania są powierzchnie

$$\kappa_{i\max}^{(1)(4)}(\omega, \omega), \quad \kappa_{i\min}^{(1)(4)}(\omega, \omega) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

określone w **K**. Wyznaczają one obszary

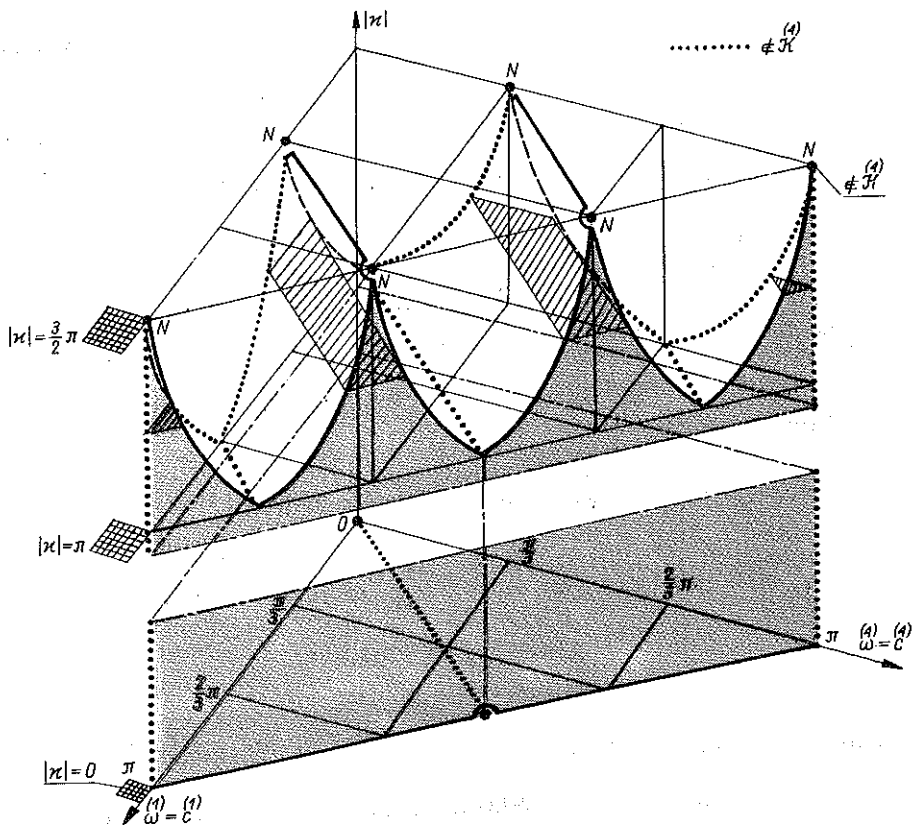
$$(\mathcal{K}_i)^* \equiv \{ (\omega, \omega, |\kappa|) : \omega \in (0, \pi), \omega \in (0, \pi), |\kappa| \in [\kappa_{i\min}, \kappa_{i\max}], i = 1, 2, 3, 4 \}.$$

Suma

$$(11.15) \quad (\mathcal{K})^* = \bigcup_{i=1}^{i=4} (\mathcal{K}_i)^*$$

wyznacza poszukiwany obszar  $(\mathcal{K})^{(4)*}$ .

Warunek  $B(\omega, \omega, |\kappa|) \in (\mathcal{K})^*$  oznacza, że przy danych wartościach parametrów brzegowych rozwiązanie pola o 4 obszarach istnieje, gdy dodatkowo



Rys. 16. Symetryczna połowa obszaru  $\mathcal{K}$ .

jeszcze są spełnione warunki (11.13) oraz  $\omega^{(n)} \neq \omega^{(n+1)}$ ; zawartość  $\mathbf{B} \in (\mathcal{K})^*$  jest tylko warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania na płaszczyźnie  $Y$ . Graficzną postać obszaru  $(\mathcal{K})^*$  (właściwie  $\mathcal{K}$ ) przedstawiono na rys. 16.

### 11.3. Ogólna charakterystyka form geometrycznych obszarów $(\mathcal{K})^*$

Przedstawienie obszarów  $(\mathcal{K})^*$  w postaci rysunkowej wyczerpuje w zasadzie całość opisowych informacji o charakterystycznych własnościach ich geometrii. Ograniczymy się zatem do omówienia tylko tych własności, które były oczekiwane i w związku z tym mogą stanowić pewien sprawdzian poprawności otrzymanych rozwiązań, a także własności, które na rysunkach mogą być ewentualnie mniej czytelne. Naturalnie, mając na razie tylko rozwiązania zadań z osłabionym zespołem ograniczeń, nie będziemy szerzej



poruszali kwestii, jakie wiążą się z zaznaczonymi na rysunkach zbiorami punktów osobliwych. Punkty te należą do  $(\mathcal{K})^*$ , ale nie należą do  $\mathcal{K}$ . Odpowiednie analizy rozwiązań wykazujących osobliwości strukturalne zostaną przedstawione w części III.

Przed wszystkim zwróćmy uwagę, że wszystkie obszary  $(\mathcal{K})^*$   $(\mathcal{K})$  – rys. 12, 14a, 16) są symetryczne względem płaszczyzn  $\omega - \omega = 0$  i  $\omega + \omega = \pi$ . Płaszczyzny  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi$ ,  $\omega = 0$ ,  $\omega = \pi$  nie zostały z założenia zaliczone do żadnego  $(\mathcal{K})^*$  (por. 10.1). Dla warunków brzegowych reprezentowanych punktami, które leżą na tych płaszczyznach, rozwiązania pól nie są określone.

Obszar  $\mathcal{K}$  pokazany na rys. 12 jest przestrzennym przedstawieniem tej samej powierzchni, którą na rys. 2c pokazano za pomocą warstwic. Jest to powierzchnia  $|\kappa| = \hat{\phi}(\omega, \omega)$ , a więc także i geometryczna forma każdej ze składowych funkcji  $\hat{\phi}(\omega, \omega)$  równania typu (10.4) ((10.10)). Za pomocą rysunku 12 można zatem pogładowo analizować własności wspomnianych równań.

Powierzchnia obszaru  $\mathcal{K}$  jest rozpięta nad obszarem płaskim  $\Lambda$ . Idąc od przekroju centralnego  $\omega + \omega = \pi$  w kierunku początku układu współrzędnych stwierdzamy, że powierzchnia ta ma najpierw charakter zbliżony do powierzchni walcowej. Większe, a następnie gwałtowne odchylenie od powierzchni walca notujemy w pobliżu przekroju  $\omega + \omega = \frac{\pi}{3}$ . Krzywa powstała z przecięcia tą płaszczyzną powierzchni  $\mathcal{K}$  staje się łamaną o kształcie litery U. Jej pionowe krawędzie nie są zaliczane do  $\mathcal{K}$  mimo, że dla położonych na nich punktów  $\mathbf{B}$  rozwiązania pól istnieją; nie są jednak określone. Analogiczne sytuacje powstają po symetrycznej stronie przekroju  $\omega + \omega = \pi$ .

Do  $\mathcal{K}$  nie zaliczamy także odcinka prostej

$$\{(\omega, \omega, \kappa): \omega = \omega, \omega \in \left[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right], \kappa = 0\}.$$

Dla warunków brzegowych określonych na tym odcinku rozwiązania pól o 2 obszarach nie istnieją (wzór (3.6)<sub>2</sub>): niedopuszczalne jest rozdzielanie jedną linią  $\mathcal{L}$  dwóch obszarów, w których naprężenia mają te same wartości główne.

Odcinek ten jest zbiorem punktów nieciągłości powierzchni  $\mathcal{K}$ <sup>(2)</sup>. Oczywiście, zbiory punktów o takich własnościach posiada każda funkcja składowa równania (10.4), a więc nieciągłości mogą również powstawać w obszarach  $\mathcal{K}$ <sup>(3)</sup> i  $\mathcal{K}$ <sup>(4)</sup>. W ramach zadań z okrojonym zespołem warunków są one jednak niewykrywalne.

Najbardziej skomplikowane powierzchnie graniczne ma obszar  $\mathcal{K}$ <sup>(3)</sup> (rys. 14a). Jego górna powierzchnia składa się z czterech płatów walcowych. Walce, które przecinają się w płaszczyźnie  $|\kappa| = \frac{\pi}{2}$ , posiadają tamże nieciągłości pochodnych. Nieciągłości te powstają w rezultacie przecinania się powierzchni zewnętrznych obszarów  $(\mathcal{K}_1)^*$ <sup>(3)</sup> i  $(\mathcal{K}_2)^*$ <sup>(3)</sup> (por. (11.8)). Jeszcze bardziej złożone są powierzchnie boczne obszarów  $\mathcal{K}$ <sup>(3)</sup>. Każda z nich składa się z dwóch różnych powierzchni, które przecinają się wzdłuż krzywej przestrzennej  $m$ . Charakterystyczne jest, że krzywizny Gaussa obu tych powierzchni, odpowiednio w przekrojach  $\kappa = 0$  i  $|\kappa| = \pi$ , przyjmują wartości zerowe. Sąsiednie powierzchnie, które sięgają  $|\kappa| = \pi$  mają tam wspólne płaszczyzny styczne. Wokół utworzonych tu ostrzy, nawet małe zmiany  $\omega$ ,  $\omega$  powodują znaczne zmiany zakresu dopuszczalnych wartości parametru  $\kappa$ <sup>(1)</sup>  $\omega$ <sup>(3)</sup>.

Walcowy charakter mają także powierzchnie  $\max |\kappa(\omega, \omega)|$ <sup>(1)</sup>  $\omega$ <sup>(4)</sup> ograniczające od góry obszar  $(\mathcal{K})^*$ <sup>(4)</sup>  $(\mathcal{K})^*$ <sup>(4)</sup> (rys. 16). Spotykane tutaj ostrza  $\left(|\kappa| = \frac{3}{2}\pi\right)$  i nieciągłości pochodnych ( $|\kappa| = \pi$ ) mają podobne znaczenie, jak w przypadku obszarów  $\mathcal{K}$ <sup>(3)</sup>.

Zestawiając wyznaczone obszary  $(\mathcal{K})^*$ <sup>(3)</sup> i  $(\mathcal{K})^*$ <sup>(4)</sup> w jednej przestrzeni  $\mathbf{K}$  łatwo zauważyć, że maksima powierzchni ograniczającej od góry obszar  $(\mathcal{K})^*$ <sup>(3)</sup> pokrywają się ze zbiorami punktów minimalnych analogicznej powierzchni obszaru  $(\mathcal{K})^*$ <sup>(4)</sup>. Podobna właściwość daje się również zauważyć dla obszarów  $\mathcal{K}$ <sup>(2)</sup> i  $\mathcal{K}$ <sup>(3)</sup>, jakkolwiek sens porównywania globalnych ekstremów jest tu nieco inny; obszar  $\mathcal{K}$ <sup>(3)</sup> jest bowiem obszarem przestrzennym, natomiast  $\mathcal{K}$ <sup>(2)</sup> — powierzchniowym. W tej samej przestrzeni  $\mathbf{K}$  można również tworzyć poglądowe ilustracje przyrostów  $\Delta\mathcal{K}$ <sup>(1)</sup>, które odpowiadają przyrostom liczby obszarów  $l$ .

Podane informacje o obszarach  $\mathcal{K}$ <sup>(1)</sup>, jakkolwiek tylko uzupełniają ilustrację

rysunkową i daleko nie wyczerpują różnorodności możliwych wniosków, mogą już być bezpośrednio wykorzystywane, m.in. w praktycznym doborze struktur do konkretnie przyjętych warunków brzegowych. Podkreślić jednak należy, że pole zastosowań dotąd przedstawionych wyników obejmuje tylko pola elementarne i tylko takie ich przypadki, w których punkty reprezentujące zbiory przyjętych na brzegach parametrów nie należą do zbiorów punktów osobliwych, zaznaczonych na rysunkach drobnymi liniami kropkowymi. Zbiory te

nie należą do  $\mathcal{K}^{(0)}$  bądź za przyczyną osobliwości rozwiązań w przestrzeni  $\Omega^{(2)}(\omega = \omega^{(n+1)})$ , bądź w rezultacie aktywności ograniczeń typu (10.6). Często ma także miejsce sytuacja, gdy obie przyczyny równocześnie wykluczają istnienie rozwiązań.

Fakt, iż wymiar zbiorów punktów osobliwych (por. rys. 14a, 16) jest mniejszy od wymiaru przestrzeni  $\mathbf{K}$  mógłby ewentualnie sugerować niewielkie znaczenie tych zbiorów. Istotnie, w ramach struktur zawierających 2, 3 lub 4 obszary jednorodne można otrzymać rozwiązania dla prawie każdego warunków brzegowych  $\{\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, \kappa\}$ , gdy wartości parametrów  $\omega^{(1)}, \omega^{(l)}, \kappa$  zawarte są w przedziale  $[0, \pi]$ . Wniosek ten pozostaje ważny dla prawie każdego przypadku warunków brzegowych, jakie spotyka się w zewnętrznych (brzegowych) węzłach linii  $\mathcal{L}$  w polach złożonych.

Zupełnie odmienna sytuacja powstaje natomiast w przypadku, gdy mamy do czynienia z wewnętrznymi węzłami linii  $\mathcal{L}$ . Okazuje się, że dla analiz struktur linii  $\mathcal{L}$ , które tworzą się wokół takich węzłów, najbardziej istotnymi są akurat własności rozwiązań, jakie otrzymuje się dla warunków brzegowych określonych na zbiorach punktów osobliwych. Jak już stwierdzono, rozwiązania te wyróżniają się m.in. powstawaniem efektu degeneracji pierwotnie przyjętej struktury: znika co najmniej jedna linia nieciągłości naprężeń.

Potrzeba znajdowania zbiorów punktów, których wymiar jest mniejszy od wymiaru przestrzeni  $\mathbf{K}$ , a następnie konieczność badań zachowania się rozwiązań w otoczeniach takich punktów powodują, że analizy struktur linii  $\mathcal{L}$  stają się jeszcze bardziej złożone.

Tej grupie problemów poświęcono część III pracy.

## РЕЗЮМЕ

СТРУКТУРЫ СИСТЕМ ЛИНИЙ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ В ГРАНИЧНЫХ ПОЛЯХ,  
 УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ГУБЕРА-МИЗЕСА  
 ЧАСТЬ II. СТРУКТУРНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ  
 ПОЛЕЙ.  
 ВНЕШНИЕ ОЦЕНКИ ОБЛАСТЕЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Во II части применяется последовательно параметрическое описание элементарных полей. Рассмотрена задача существования решений этих полей для граничных условий, определенных на множестве параметров, которое эквивалентно множеству составляющих напряжений, задаваемых в крайних областях. Определены области существования решений для полей с 2, 3 и 4 областями однородности и с неособыми структурами. Показано, что задача дается тогда свести к решению соответствующих последовательностей задач оптимизации с нелинейными критериальными функциями и системой линейных и выпуклых ограничений. Эти задачи формулированы на параметрических пространствах, определенных в I части. Полученные зависимости позволили, между прочим, построить компьютерный алгоритм, который дает возможность решать произвольные элементарные поля; это первый алгоритм с такой степенью универсальности. Анализ полей с особыми структурами (вырожденных) помещен в III части, упомянутый же алгоритм — в отдельной работе.

## SUMMARY

STRUCTURE OF STRESS DISCONTINUITY LINES IN LIMITING FIELDS  
 WHICH SATISFY THE HUBER-MISES CONDITIONS  
 PART II. EXTERNAL EXISTENCE CONDITIONS OF ELEMENTARY FIELDS  
 EXTERNAL ESTIMATES OF THE REGIONS OF EXISTENCE

Parametric description of elementary fields is used throughout Part II of the paper. Problem of existence of solutions of such fields is considered for the boundary conditions determined in the set of parameters which is equivalent to the set of coordinates prescribed in the boundary regions. Regions of existence of solutions are given for fields consisting of 2, 3 and 4 homogeneous regions and non-singular structures. It is shown that the problem may then be reduced to the solution of corresponding sequences of optimization problems with nonlinear criterion functions and a system of linear and convex constraints. The problems are formulated in parametric spaces defined in Part I. The results obtained allow for a construction of a computer algorithm which makes it possible to solve arbitrary fields; it is the first algorithm of this degree of universality. Fields of singular (degenerate) structures are discussed in Part III, and the algorithm mentioned above — in a separate paper.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 maja 1988 r.*