

## TEORETYCZNA ANALIZA PROCESU OSIOWO-SYMETRYCZNEGO WYCISKANIA MATERIAŁÓW WIELOWARSTWOWYCH Z SILNĄ NIEJEDNORODNOŚCIĄ PLASTYCZNĄ

JAN PIWNIK (BIAŁYSTOK)

W pracy przedstawiono nowe, uproszczone rozwiązanie teoretyczne pól naprężeń dla procesu wyciskania materiału wielowarstwowego w warunkach osiowej symetrii. Rozwiązanie oparto na modelu ciała idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Treski i założeniem A. Haara-Th. Kármána dla każdej warstwy. Warstwy mają różne wartości granicy plastyczności. Deformowany plastycznie materiał odznacza się silną niejednorodnością plastyczną. W małym otoczeniu linii styku warstw założono ciągły rozkład granicy plastyczności. Założono także kształt obszaru uplastycznienia i położenie powierzchni styku warstw. Naprężenia styczne i średnie ciśnienie w przekroju wzdłużnym wyciskanego pręta wyrażono funkcjami względem osiowej współrzędnej  $z$ . Nieznane funkcje zależne tylko od jednej zmiennej  $z$ , wyznaczono z równań stanu plastycznego na linii konturu matrycy. W rezultacie otrzymano ściśle związki analityczne określające rozkład naprężeń normalnych na powierzchni styku materiału z matrycą. Na podstawie znanego rozkładu naprężeń normalnych i naprężeń stycznych od tarcia na powierzchni kontaktu materiału z narzędziem wyznaczono ścisłą, dolną charakterystykę sił wyciskania. Przedstawione rozwiązanie nie określa ograniczeń na liczbę warstw i kształt matrycy. Może ono posłużyć do racjonalnej, technicznej analizy cylindrycznych prętów złożonych z kilku metalowych warstw.

### 1. WPROWADZENIE

Jednym z ważnych kierunków w technologiach obróbek bezwiórowych jest rozwój procesów wyciskania materiałów wielowarstwowych. Wstępniak jest wtedy przygotowany w formie kilku warstw, z których każdą wykonano z innego materiału. Warstwy różnią się własnościami mechanicznymi; stąd rozkład granicy plastyczności w obszarze uplastycznienia odznacza się silną niejednorodnością.

Obecnie nie istnieje rozwinięta teoria takich procesów. Znane rozwiązania odnoszą się do procesów wyciskania jednorodnych plastycznie materiałów [1, 2, 3, 4]. Nawet w tych przypadkach nie ma kompletnych rozwiązań opartych na teorii plastyczności. Trudności wynikają ze sprzężenia równań statyki i kinematyki oraz braku warunków brzegowych.

Trudności te wzrastają, gdy w obszarze uplastycznienia rozkład granic plastyczności jest silnie niejednorodny. W pracach [5, 6, 7, 8] dominują różne,

uproszczone opisy procesów wyciskania wielowarstwowego. Przedmiotem wymienionych prac jest wyznaczenie sił realizujących wyciskanie wielowarstwowego cylindrycznego pręta [5, 7]. Uproszczenia te najczęściej polegają na określeniu obszarów uplastycznionych ze znanym rozkładem granicy plastyczności, a następnie rozwiązaniu uproszczonych równań równowagi z uwzględnieniem zlinearyzowanego warunku plastyczności [5, 8]. W pracy [6] do uproszczonego opisu osiowo-symetrycznego wyciskania trójwarstwowego wykorzystano związek płaskiego stanu odkształcenia, natomiast w pracy [7] zastosowano metodę oceny górnej.

Analiza skromnych danych literatury na omawiany temat prowadzi do wniosku, że teoria procesu wyciskania wielowarstwowego znajduje się w początkowej fazie swego rozwoju [5, 6, 7, 8]. Jednocześnie atrakcyjność tego rodzaju technologii, jak też rozwój teorii plastyczności ciał niejednorodnych [9, 10, 11] wymagają poszukiwania nowych, bardziej zaawansowanych rozwiązań teoretycznych.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie nowego rozwiązania problemu osiowo-symetrycznego wyciskania współbieżnego wielowarstwowego pręta cylindrycznego przez matrycę ze stożkowym otworem. Rozwiązanie oparto na modelu ciała idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Treski. Przedstawiono nowe, analityczne wyrażenia na siły wyciskania oraz związki określające rozkłady naprężeń kontaktowych na powierzchni styku zdeformowanej, zewnętrznej warstwy materiału z matrycą.

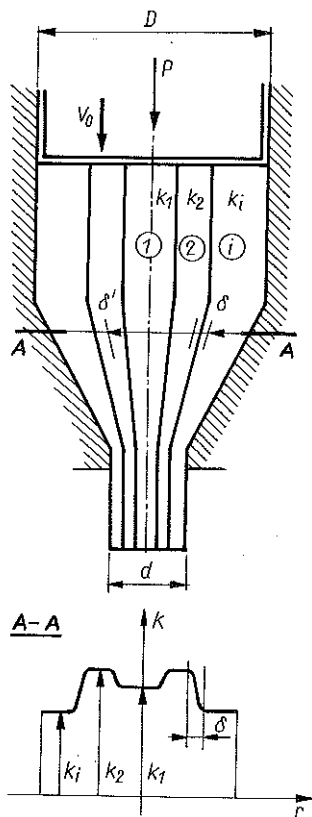
Wobec obszernego przedstawienia wyników teoretycznych nie podano przykładów liczbowych.

## 2. ZAŁOŻENIA I ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

Przyjmujemy, że podczas wyciskania materiał deformowany plastycznie w obrębie jednej warstwy ma cechy ciała idealnie sztywno-plastycznego z granicą plastyczności na ścianie  $k_i$ . W najbliższym otoczeniu powierzchni styku dwóch warstw zakładamy ciągłą zmianę wartości granicy plastyczności. Wyjaśnia to rys. 1, na którym pokazano dwa warianty ciągłego rozkładu funkcji  $k_i(r)$  w dowolnym przekroju  $A-A$ . Zmiana wielkości  $k_i(r)$  lokalizuje się w bardzo cienkiej warstwie o grubości  $\delta$  lub  $\delta'$  (rys. 1) dążącej do zera.

Zakładamy, że trajektorie ruchu cząsteczek w każdej warstwie odpowiadają przepływowi plastycznemu opisanemu funkcją płynięcia:

$$(2.1) \quad \Phi^F = \Pi \frac{r^2}{R_b^2(z)} R_0^2 V_0.$$



Rys. 1

Funkcja płynięcia  $\Phi^F$  posiada interpretację fizyczną wydatku przepływu [2]. Jej wartość wzdłuż  $i$ -tej linii prądu jest stała i wynosi (rys 2):

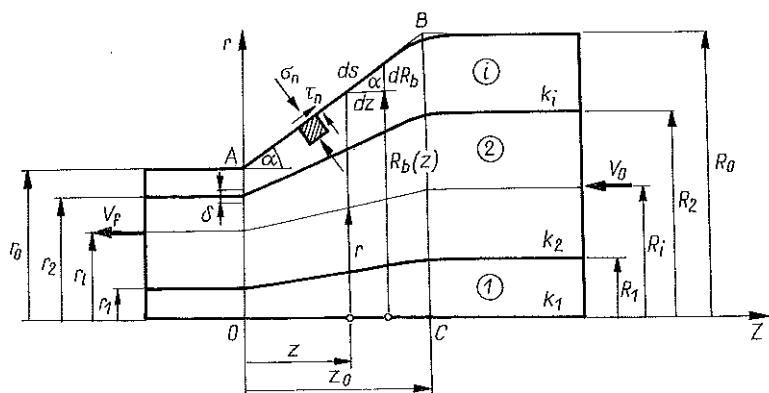
$$(2.2) \quad \Phi^F = \Pi R_i^2 V_0 = \Pi r_i^2 V_f,$$

gdzie  $R_i$  oznacza współrzędną promieniową  $i$ -tej linii prądu na wejściu do obszaru uplastycznienia,  $r_i$  jest współrzędną promieniową  $i$ -tej linii prądu na wyjściu z obszaru płynięcia plastycznego oraz  $V_0$  — modułem wektora prędkości stępła.

Stała wartość  $\Phi^F$  wzdłuż linii prądu utożsamionej z trajektorią określa jej postać w sposób następujący:

$$(2.3) \quad r_n(r, z) = \frac{r}{R_b(z)},$$

gdzie na trajektorii  $r_n(r, z) = \text{const}$ . Funkcja  $r_n(r, z)$  jest znormalizowaną, promieniową współrzędną bezwymiarową. Funkcja  $R_b(z)$  opisuje kształt konturu matrycy (rys. 2). Zakładamy dalej, że  $R_b(z)$  jest funkcją ciągłą i co najmniej



Rys. 2.

dwukrotnie różniczkowalną w każdym punkcie współrzędnej osiowej z obszaru uplastycznienia  $OABC$ .

Zatem położenie każdego punktu z dowolnej warstwy materiału w obszarze  $OABC$  jest znane z założenia i określone początkowymi współrzędnymi promieniowymi:  $R_1, R_2, \dots, R_i, R_0$  warstw (rys. 2) i równaniem (2.3).

Trajektorie wyznaczone ze związku (2.3) i funkcja  $\Phi^F$  odpowiadają hipotezie płaskich przekrojów poprzecznych  $A-A$  (rys. 1) podczas ruchu. Zachowane są nieściśliwość materiału i kinematycznie dopuszczalny schemat płynięcia warstw.

Powyższe założenia są dyskusyjne przy analizie pól kinematycznych przepływu wielowarstwowego, ponieważ w znanych doświadczeniach [5, 12] obserwuje się złożony obraz ruchu warstw. Zależy to od wielu czynników, do których należą stosunki  $R_1/R_0, R_2/R_0, \dots, k_1/k_2, k_2/k_3, \dots$ , stopień redukcji (rys. 2)

$$(2.4) \quad \lambda = 1 - \frac{r_0^2}{R_0^2},$$

wartość naprężeń  $\tau_n(z)$  na linii konturu  $A-B$ , funkcja  $R_b(z)$  i inne.

Zakładamy, że naprężenia tarcia  $\tau_n(z)$  na powierzchni kontaktu materiału z matrycą są częścią granicy plastyczności i wynoszą

$$(2.5) \quad \tau_n(z) = \mu k_i |r_n = 1|,$$

gdzie współczynnik szorstkości  $\mu$  przybiera następujące wartości:

$$(2.6) \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Rysunek 2 przedstawia schemat deformacji próbki złożonej z trzech warstw, ale dalsze rozważania odnośnie metody wyznaczania pól naprężeń są słuszne dla dowolnej liczby warstw.

Przedstawione uproszczenia geometryczne przepływu plastycznego są dość drastyczne w przypadku analizy pól odkształceń, jednak nie wnoszą one zbyt wielu błędów przy obliczaniu sił wyciskania.

Zaproponowany dalej sposób obliczania pól naprężeń i siły wyciskania polega na zastąpieniu równań statyki, warunku plastyczności Treski i założenia A. Haara-Th. Kármána jednym równaniem stanu plastycznego, z którego następnie na linii konturu  $r = R_b(z)$  gdzie  $r_n = 1$  wyznaczmy składowe tensora naprężenia. Rozkład granicy plastyczności  $k_i = k(r, z)$  w obszarze OABC traktujemy jako znany na podstawie poczynionych założeń. Jednocześnie w celu uproszczenia obliczeń przyjmujemy funkcję  $R_b(z)$  jako linię prostą

$$(2.7) \quad R_b(z) = r_0 + mz,$$

gdzie

$$(2.8) \quad m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Kąt  $\alpha$  oznacza nachylenie tworzącej stożka matrycy do osi symetrii  $z$ . W narożach matrycy  $A$  i  $B$  ( $z = 0$  i  $z = z_0$ ) zakładamy zerowe wartości pochodnych:

$$(2.9) \quad \frac{dR_b(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d^2 R_b(z)}{dz^2} \Big|_{z=z_0} = 0.$$

Założenie (2.9) jest szczególnie przydatne do analizy pól odkształceń. Przyjęcie prostoliniowego konturu matrycy nie ogranicza ogólności dalszych rozważań i stanowi tylko ułatwienie ilustracji proponowanej metody obliczeń pól naprężeń.

Aby wyznaczyć składowe tensora naprężenia i na ich podstawie siły wyciskania, sformułujemy równania podstawowe. W osiowo-symetrycznych zagadnieniach plastycznego płynięcia w walcowym układzie współrzędnych  $r, \vartheta, z$  z osią  $z$  pokrywającą się z osią symetrii występują jedynie składowe naprężenia  $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{rz}$ . Pozostałe składowe, to  $\tau_{\vartheta z} = \tau_{\vartheta r} = 0$ .

W każdym punkcie obszaru uplastycznienia należy zatem wyznaczyć cztery składowe naprężenia. Żadna z nich nie zależy od współrzędnej  $\vartheta$ . Zagadnienie rozpatrzmy jako problem quasi-statyczny dla materiału idealnie plastycznego bez wzmocnienia.

Równania równowagi mają teraz następującą postać:

$$(2.10) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0,$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.$$

Zakładając warunek plastyczności Treski, otrzymujemy

$$(2.12) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k_i = 2k(r, z).$$

Czwartym równaniem zamykającym układ (2.10), (2.11), (2.12) jest hipoteza A Haara-Th. Kármána o równości dwóch naprężeń głównych.

$$(2.13) \quad \sigma_3 = \sigma_2.$$

Po wyrażeniu głównych składowych naprężenia za pomocą składowych  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ , warunek plastyczności (2.12) przyjmuje następującą postać:

$$(2.14) \quad (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k(r, z).$$

Mamy więc cztery równania: (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) i cztery nieznanne funkcje:  $\sigma_r(r, z)$ ,  $\sigma_\theta(r, z)$ ,  $\sigma_z(r, z)$ ,  $\tau_{rz}(r, z)$ . Powyższe równania dotyczą każdej warstwy wyciskanego materiału. Równania te w problemach osiowo-symetrycznych rozwiązuje się najczęściej metodą charakterystyk [3, 4].

Podstawy teorii procesu wyciskania osiowo-symetrycznego materiałów jednorodnych oparte na metodzie charakterystyk przedstawiono w pracach [1, 3, 4]. Analizę historyczną tego problemu zawierają prace [1, 2]. Jednak bezpośrednie przeniesienie metody charakterystyk do analizy zagadnień osiowo-symetrycznego wyciskania materiałów wielowarstwowych nie daje efektywnych wyników. Składa się to na brak mieszanych warunków brzegowych na styku warstw; stąd zadanie staje się statycznie niewyznaczalne.

Uwzględnienie w teorii wyciskania zmienności granicy plastyczności w sąsiadujących warstwach wymaga innej realizacji uproszczeń przy rozwiązywaniu układu czterech równań stanu plastycznego dla naprężeń.

Warunki brzegowe, oprócz związku (2.5) wyrażonego obecnie jako

$$(2.15) \quad \tau_n(z)|_{r_n=1} = \tau_{rz}(z)|_{r_n=1} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + [\sigma_r(z) - \sigma_z(z)]|_{r_n=1} \sin \alpha \cos \alpha = \mu k_i|_{r_n=1},$$

obejmują również zależności

$$(2.16) \quad \tau_{rz}(r, z)|_{r_n=0} = 0,$$

$$(2.17) \quad P|_{z_n=0} = 0.$$

Warunek (2.7) oznacza zerową wartość wypadkowej siły  $P$  na wyjściu materiału z obszaru uplastycznienia ( $z_n = 0$ ). Wielkość  $z_n$  jest osiową współrzędną znormalizowaną, określoną bezwymiarowo jako

$$(2.18) \quad z_n = \frac{z}{z_0}.$$

Wielkość  $z_0$  (rys. 2) jest ustaloną wartością współrzędnej osiowej  $z$  określającej zasięg obszaru uplastycznienia. Wielkość  $z_0$  obliczamy ze związków geometrycznych wynikających z kształtu konturu matrycy  $R_b(z)$ .

## 3. METODA WYZNACZANIA STANU NAPRĘŻENIA

Opierając się na metodzie analogicznej do metody Levy'ego, stosowanej przy badaniu równań płaskiego stanu odkształcenia [4, 5], wprowadzimy zamiast czterech niewiadomych dwie nieznanne funkcje  $\sigma(r, z)$  i  $F(r, z)$ .

Funkcję  $\sigma(r, z)$  przyjmiemy jako połowę sumy naprężeń głównych

$$(3.1) \quad \sigma(r, z) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Funkcja  $F(r, z)$  jest sinusem kąta, jaki tworzy normalna do płaszczyzny maksymalnych naprężeń stycznych z osią  $r$  [4].

Z koła Mohra, którego promień zgodnie z warunkiem plastyczności (2.14) musi być równy  $k$ , bezpośrednio wynika:

$$(3.2) \quad \sigma_r(r, z) = \sigma(r, z) - k(r, z)F(r, z),$$

$$(3.3) \quad \sigma_z(r, z) = \sigma(r, z) + k(r, z)F(r, z),$$

$$(3.4) \quad \tau_{rz}(r, z) = k(r, z)\sqrt{1 - F^2(r, z)},$$

gdzie

$$(3.5) \quad 1 - F^2(r, z) \geq 0$$

oraz

$$(3.6) \quad \sigma_s(r, z) = \sigma(r, z) - k(r, z).$$

Wyrażenia (3.2)–(3.6) spełniają tożsamościowo zarówno warunek plastyczności (2.14) jak i równość (2.13).

Podstawiając tak określone naprężenia do równań równowagi otrzymujemy układ równań różniczkowych z dwiema poszukiwanymi funkcjami  $\delta(r, z)$  i  $F(r, z)$ .

$$(3.7) \quad \frac{\partial(\sigma - kF)}{\partial r} + \frac{\partial(k\sqrt{1 - F^2})}{\partial z} + \frac{k(1 - F)}{r} = 0,$$

$$(3.8) \quad \frac{\partial(\sigma + kF)}{\partial z} + \frac{\partial(k\sqrt{1 - F^2})}{\partial r} + \frac{k\sqrt{1 - F^2}}{r} = 0.$$

Wykonując różniczkowanie tego układu równań otrzymujemy

$$(3.9) \quad \frac{\partial\sigma}{\partial r} - \frac{\partial k}{\partial r}F - k\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial k}{\partial z}\sqrt{1 - F^2} + k\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{1 - F^2} + \frac{k(1 - F)}{r} = 0,$$

$$(3.10) \quad \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial z}F + k\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial r}\sqrt{1 - F^2} + k\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1 - F^2} + \frac{k\sqrt{1 - F^2}}{r} = 0.$$

Układ ten jest hiperboliczny, nieliniowy, niejednorodny i nie da się sprowadzić do postaci liniowej. Człony zawierające pochodne funkcji  $k(r, z)$  po współrzędnych w istotny sposób utrudniają zbudowanie prostej metody obliczeniowej.

W następnej kolejności zastąpimy układ dwóch równań (3.9), (3.10) jednym równaniem z niewiadomą  $F(r, z)$ . W tym celu różniczkujemy najpierw równanie (3.9) po zmiennej  $z$ , a równanie (3.10) po zmiennej  $r$ . Odejmując stronami tak zróżniczkowane równania (3.9) i (3.10) otrzymujemy jedno wyjściowe równanie stanu plastycznego.

Przedstawmy to równanie w odniesieniu do linii konturu matrycy ( $r_n = 1$ ). Ma ono następującą postać:

$$(3.11) \quad \left| -2k \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} + k \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sqrt{1-F^2}) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sqrt{1-F^2}) \right] + \right. \\ \left. + k \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1-F}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sqrt{1-F^2}}{r} \right) \right] \right|_{r_n=1} = 0.$$

Funkcje  $k(r, z)$ ,  $F(r, z)$  i ich pochodne w równaniu (3.11) mają wartości odpowiadające warstwie materiału, leżącej na styku z powierzchnią matrycy ( $r_n = 1$ ).

Brak pochodnych funkcji  $k(r, z)$  w równaniu (3.11) wynika z faktu, że granica plastyczności warstwy przylegającej do matrycy jest z założenia stała (rys. 2).

Nieobecność pochodnych funkcji  $k(r, z)$  w równaniu (3.11) w istotny sposób ułatwia rozwiązanie omawianego zadania. Nasuwa to pomysł wprowadzenia niewiadomych w postaci funkcji jednej zmiennej  $z$ .

Realizujemy to przez założenie dla każdej warstwy materiału nieznannej funkcji  $F(r, z)$  jako następującego szeregu:

$$(3.12) \quad F(r, z) = 1 + f_1(z_n)r_n + f_2(z_n)(r_n - r_n^2) + \dots,$$

gdzie  $r_n$  i  $z_n$  są dane odpowiednio wzorami (2.3) i (2.18). Funkcja  $F(r, z)$  musi spełniać warunki brzegowe (2.15) i (2.16). Z równań (3.4) i (3.12) otrzymujemy wówczas:

$$(3.13) \quad \text{w } r_n = 1 \quad F(r, z) = 1 + f_1(z_n),$$

$$(3.14) \quad \text{w } r_n = 0 \quad F(r, z) = 1.$$

Niewiadoma funkcja  $f_1(z_n)$  w szeregu  $F(r, z)$  jest dana jako związek na tarcie (2.14) i może być uważana za znaną.

Pozostaje do wyznaczenia z równania (3.11) niewiadoma funkcja  $f_2(z_n)$ . Uwzględniamy przy tym związki (3.12) i (3.13) oraz obcięcie szeregu (3.12) do dwóch członów.

Konstrukcja funkcji  $F(r, z)$  w formie szeregu (3.12) w istotny sposób ułatwia rozwiązanie równania (3.11). Przyjęcie wspólnej funkcji  $F(r, z)$ , (3.12),



dla wszystkich warstw materiału pozwala przewidzieć przebieg naprężeń stycznych  $\tau_{rz}(r, z)$  w całym obszarze uplastycznienia.

Naprężenia  $\tau_{rz}(r, z)$  mają obecnie formę następującą:

$$(3.15) \quad \tau_{rz}(r, z) = k(r, z) \sqrt{1 - [1 + f_1(z_n)r_n + f_2(z_n)(r_n - r_n^2)]}.$$

W wyrażeniu (3.15) współczynniki funkcyjne szeregu (3.12), to jest  $f_1(z_n)$  i  $f_2(z_n)$  są niezależne od wartości granicy plastyczności  $k(r, z)$ . Naprężenia  $\tau_{rz}$  obliczone z (3.15) są ciągle w całym obszarze uplastycznienia, ponieważ założyliśmy wcześniej ciągłość i różniczkowalność funkcji  $k(r, z)$  w otoczeniu styku dwóch warstw.

Po otrzymaniu  $F(r, z)$  z równania (3.11), niewiadomą funkcję  $\delta(r, z)$  obliczymy z równań statyki (3.9) i (3.10) w  $r_n = 1$ . Składowe stanu naprężenia  $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$  obliczymy ze związków (3.2), (3.3), (3.5).

Następnie, zamiast  $k(r, z)$  będziemy używać alternatywnego zapisu  $k_i$ , co oznacza stałą wartość granicy plastyczności dla  $i$ -tej warstwy wyciskanego materiału.

Przejdźmy teraz do szczegółowego przedstawienia proponowanego algorytmu obliczania naprężeń.

#### 4. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH $\tau_{rz}(r, z)$

We wzorze (3.15) występują nieznane funkcje  $f_1(z_n)$  i  $f_2(z_n)$ , które należy wyznaczyć. Funkcja  $k(r, z)$  jest znana z założenia.

##### 4.1. Wyznaczanie funkcji $f_1(z_n)$

Aby wyznaczyć funkcję  $f_1(z_n)$ , podstawiamy zależności (3.2), (3.3), (3.4) do wyrażenia (2.15) określającego założony rozkład naprężeń stycznych na powierzchni kontaktu deformowanego materiału z matrycą.

Mamy wówczas

$$(4.1) \quad k(r, z)|_{r_n=1} \sqrt{1 - F^2(r, z)} \cos 2\alpha - 2k(r, z)|_{r_n=1} F(r, z)|_{r_n=1} \times \\ \times \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \mu k(r, z)|_{r_n=1}.$$

Współczynnik szorstkości  $\mu$  ma stałą wartość w każdym punkcie linii konturu matrycy. Funkcje  $k(r, z)$  i  $F(r, z)$  we wzorze (4.1) mają ustalone wartości w  $r_n = 1$ . Stąd

$$(4.2) \quad k(r, z)|_{r_n=1} = k_i,$$

$$(4.3) \quad F(r, z)|_{r_n=1} = 1 + f_1(z_n).$$

Indeks  $i$  przy  $k_i$  w (4.2) oznacza stałą wartość granicy plastyczności dla  $i$ -tej zewnętrznej warstwy. Widzimy, że funkcja  $f_2(z_n)$  nie występuje w (4.3). Umożliwia to bezpośrednie obliczenie funkcji  $f_1(z_n)$  z warunku na tarcie wyrażonego związkami (2.15) i (4.1).

Przekształcając (4.1) otrzymujemy równanie kwadratowe względem  $F$ :

$$(4.4) \quad F^2 [1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha] + F \frac{2\mu \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} + \frac{\mu^2}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 0.$$

Wyróżnik  $\Delta$  równania kwadratowego (4.4) ma postać

$$(4.5) \quad \Delta = \frac{4(1 - \mu^2)}{\cos^2 2\alpha},$$

natomiast

$$(4.6) \quad \sqrt{\Delta} = \frac{2\sqrt{1 - \mu^2}}{\cos 2\alpha}$$

Związki (4.5) i (4.6) są słuszne przy  $\cos 2\alpha \neq 0$ . Po uwzględnieniu (4.3), (4.5), (4.6) niewiadoma funkcja  $f_1$  przybiera dwie wartości

$$(4.7) \quad f_1^I = \frac{-\mu \sin 2\alpha - \sqrt{1 - \mu^2} \cos 2\alpha}{2(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) \cos^2 2\alpha} - 1,$$

$$(4.8) \quad f_1^{II} = \frac{-\mu \sin 2\alpha + \sqrt{1 - \mu^2} \cos 2\alpha}{2(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) \cos^2 2\alpha}.$$

Do obliczeń wybieramy tę wartość  $f_1$ , która spełnia warunek

$$(4.9) \quad \sqrt{1 - F^2}|_{r_n=1} \geq 0.$$

Z zależności (4.9) wynika ograniczenie na wartości funkcji  $f_1$ , które ma formę słabej nierówności:

$$(4.10) \quad -2 \leq f_1 \leq 0.$$

W przypadku gdy kąt nachylenia tworzącej stożka matrycy  $\alpha = 45^\circ$ , ( $\cos 2\alpha = 0$ ), funkcję  $f_1$  wyznaczamy z ogólnej postaci wyrażenia (2.15) w  $r_n = 1$  jako

$$(4.11) \quad (\sigma_r - \sigma_z)|_{r_n=1} \sin \alpha \cos \alpha = \mu k_i|_{r_n=1}.$$

Po podstawieniu (3.2), (3.3) i (4.3) do (4.11) otrzymujemy

$$(4.12) \quad f_1 = \mu - 1.$$

Warunek dodatności wyrażenia (4.9) jest spełniony.

4.2. Wyznaczanie funkcji  $f_2(z_n)$

Pozostałą do wyznaczenia funkcję  $f_2(z_n)$  występującą w (3.15) otrzymamy rozwiązując względem niej równanie (3.11) w  $r_n = 1$ .

Po podstawieniu do (3.11) w  $r_n = 1$  wyrażenia (4.3) i wykonaniu wszystkich działań, otrzymujemy nieliniowe różniczkowo-algebraiczne równanie względem poszukiwanej funkcji  $f_2(z_n)$ . Ma ono następującą postać:

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad & \underbrace{f_2^2(1-m^2)}_A \\
 & + f_2 \left[ \underbrace{f_1(m^2-2) + (-1-4m^2)(-2f_1-f_1^2)\sqrt{-2f_1-f_1^2} + (1+f_1)(1+4m^2)}_B \right. \\
 & \left. - (-2f_1-f_1^2)7m\sqrt{-2f_1-f_1^2} \right] \\
 & + f_1 \left[ m^2(1+f_1) - m^2(1+f_1)^3 + m(-2f_1-f_1^2)\sqrt{-2f_1-f_1^2} \right. \\
 & \left. + (1+3f_1+f_1^2)(-2f_1-f_1^2) + 2m(-2f_1-f_1^2)\sqrt{-2f_1-f_1^2} + f_1^2(1-m^2) \right] \\
 & + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \left[ \frac{2R_b(z)}{z_0} + \frac{2mR_b(z)}{z_0} \frac{(1+f_1)}{\sqrt{-2f_1-f_1^2}} \right] (-2f_1-2f_1^2)\sqrt{-2f_1-f_1^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Równanie (4.13) można przedstawić jako

$$(4.14) \quad f_2^2 A + f_2 B + C + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} D = 0,$$

gdzie współczynniki  $A, B, C, D$  oznaczają odpowiednie wyrażenia w nawiasach kwadratowych i wyraz wolny w równaniu (4.13).

Równanie (4.14) posiada szczególne rozwiązanie. Wynika ono z równania

$$(4.15) \quad f_2^2 A + f_2 B + C = 0$$

Jest tak, ponieważ rozwiązanie równania (4.15) mające postać

$$(4.16) \quad f_2^I = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

$$f_2^{II} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

nie zależy od współrzędnej  $z_n$ . Zatem pochodna  $\partial f_2 / \partial z_n$  jest równa zero.

Równanie (4.13) jest ściśle spełnione, gdy poszukiwana funkcja  $f_2(z_n)$  jest liczbą wyrażoną wzorami (4.16).

W przypadku  $\alpha = 45^\circ$  ( $m = 1$ ), równanie (4.15) upraszcza się do postaci

$$(4.17) \quad f_2 B + C = 0.$$

Niewiadoma  $f_2$  wynosi wówczas

$$(4.18) \quad f_2 = \frac{-C}{B}.$$

Wielkości  $C$  i  $B$  w (4.13) nie zależą od zmiennej  $z_n$ . Tak obliczona niewiadoma funkcja  $f_2$  spełnia ściśle równanie różniczkowo-algebraiczne (4.13) lub (4.14), będąc jego rozwiązaniem szczególnym.

Analizując równanie (4.13) względem niewiadomej  $f_2(z_n)$  można zauważyć, że jego ściśle, szczególne rozwiązanie w postaci (4.16) lub (4.18) obowiązuje wówczas, gdy współczynniki  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są liczbami. Wynika to z założenia o stałości współczynnika szorstkości  $\mu$  wzdłuż linii konturu matrycy. Jeżeli  $\mu = \mu(z_n)$ , to wielkości  $A$ ,  $B$ ,  $C$  w (4.13) są funkcjami zależnymi od  $z_n$  i rozwiązanie (4.13) wymaga innego podejścia.

Mając dane  $f_1$  i  $f_2$ , przy  $\mu = \text{const}$ , obliczamy w każdym punkcie obszaru uplastycznienia składowe naprężenia  $\tau_{rz}$ . Spełnione są przy tym ściśle warunki brzegowe odnośnie tarcia i równanie stanu plastycznego (4.13) na linii konturu matrycy.

Równanie stanu plastycznego (4.13) w  $r_n = 1$  zapewnia spełnienie warunków równowagi, warunku plastyczności Treski i założenia A. Haara-Th. Kármána. Zatem obliczona z (4.13) wielkość  $f_2$  spełnia ściśle powyższe warunki.

## 5. WYZNACZANIE FUNKCJI $\sigma(r, z)$ , NAPRĘŻEŃ KONTAKTOWYCH $\sigma_n(z)$ I SIŁ WYCISKANIA

Określenie składowych  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$  tensora naprężenia ze związków (3.2), (3.3), (3.6), niezbędnych przy wyprowadzaniu wyrażeń na naprężenia kontaktowe i siły wyciskania, wymaga wyznaczenia funkcji  $\sigma(r, z)$ . Oznacza ona średnie ciśnienie na płaszczyźnie  $r-z$ .

Funkcję  $\sigma(r, z)$  otrzymamy rozwiązując względem niej równania zawierają-

ce związku równowagi, warunek plastyczności i założenie A. Haara-Th. Kármána. Równania te na linii konturu matrycy w  $r_n = 1$  mają następującą postać:

$$(5.1) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right|_{r_n=1} = k \frac{\partial F}{\partial r} - k \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{1-F^2}) - k \frac{(1-F)}{r} \Big|_{r_n=1},$$

$$(5.2) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right|_{r_n=1} = -k \frac{\partial F}{\partial z} - k \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{1-F^2}) - k \sqrt{1-F^2} \Big|_{r_n=1}.$$

Po podstawieniu do (5.1) i (5.2) wyrażenia (3.12) otrzymujemy

$$(5.3) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right|_{r_n=1} = \frac{k_i}{R_b(z)} \underbrace{\left[ \frac{\sqrt{-2f_1 - f_1^2} (2f_1 - f_2) - m(1+f_1)(f_1 - f_2)}{\sqrt{-2f_1 - f_1^2}} \right]}_{\Sigma_1},$$

$$(5.4) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right|_{r_n=1} = \frac{k_i}{R_b(z)} \underbrace{\left[ \frac{m(f_2 - f_1) \sqrt{-2f_1 - f_1^2} + (1+f_1)(f_1 - f_2) - 2f_1 - f_1^2}{\sqrt{-2f_1 - f_1^2}} \right]}_{\Sigma_2}.$$

Równania (5.1), (5.2) można więc przedstawić w następującej postaci:

$$(5.5) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right|_{r_n=1} = \frac{k_i(r_n=1)}{R_b(z)} \Sigma_1,$$

$$(5.6) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right|_{r_n=1} = -\frac{k_i(r_n=1)}{R_b(z)} \Sigma_2.$$

Wielkości  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  oblicza się z wyrażen w nawiasach kwadratowych związków (5.3) i (5.4)

Funkcję  $\sigma(r, z)$  przedstawiamy w następującej formie:

$$(5.7) \quad \sigma(r, z) = \alpha_1 \left( \frac{z}{z_0} \right) + \left( \frac{r}{R_b(z)} + \frac{r_2}{R_b^2(z)} \right) \alpha_2(k_i) = \alpha_1(z_n) + (r_n + r_n^2) \alpha_2(k_i).$$

We wzorze (5.7) występuje niewiadoma funkcja  $\alpha_1(z_n)$  zależna od współrzędnej znormalizowanej  $z_n$  i nieznaną stałą wartość  $\alpha_2$ . Niewiadome  $\alpha_1(z_n)$  i  $\alpha_2$  należy wyznaczyć ze związków (5.5), (5.6) i statycznego warunku brzegowego (2.17) wymagającego zerowania się siły w przekroju  $z_n = 0$ .

Wykonując różniczkowanie (5.7) odpowiednio po  $r$  i  $z$  i uwzględniając (2.3)

otrzymujemy

$$(5.8) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right|_{r_n=1} = \alpha_2 \cdot \frac{3}{R_b(z)},$$

$$(5.9) \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right|_{r_n=1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z} + \alpha_2 \cdot \left[ \frac{-3m}{R_b(z)} \right].$$

Porównując prawe strony równań (5.5) i (5.8) otrzymujemy

$$(5.10) \quad \alpha_2 = \frac{\Sigma_1}{3}.$$

Z porównania prawych stron równań (5.6) i (5.9), z uwzględnieniem (5.10) i (2.18), otrzymujemy zależność na  $\alpha_1(z_n)$

$$(5.11) \quad \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_n} \right|_{z_n=1} = k_i \Big|_{r_n=1} (\Sigma_1 m - \Sigma_2) \frac{1}{\frac{r_0}{z_0} + m \frac{z}{z_0}}.$$

Całkując wyrażenie (5.11) otrzymujemy

$$(5.12) \quad \alpha_1 = k_i \Big|_{r_n=1} \left( \Sigma_1 - \frac{\Sigma_2}{m} \right) \ln \left( \frac{r_0}{z_0} + m \frac{z}{z_0} \right) + \sigma_0.$$

Stałą całkowania  $\sigma_0$  w (5.12) obliczymy z warunku zerowania się siły wyciskania na wyjściu z obszaru uplastycznienia dla każdej warstwy osobno. Po porównaniu odpowiednich równań otrzymujemy następującą postać funkcji  $\sigma(r, z)$ :

$$(5.13) \quad \sigma(r, z) = \sigma_0 + k_i \Big|_{r_n=1} \left( \Sigma_1 - \frac{\Sigma_2}{m} \right) \ln \left( \frac{r_0}{z_0} + m \frac{z}{z_0} \right) + \left[ \frac{r}{R_b(z)} + \frac{r^2}{R_b^2(z)} \right] \frac{\Sigma_1}{3} \cdot k(r, z).$$

Określmy z kolei stałą całkowania  $\sigma_0$  we wzorze (5.13) dla wyciskania materiału jednorodnego ( $k = k_1 = \text{const}$ ). W przekroju  $z = 0$  (rys. 2) siła wyciskania

$$(5.14) \quad P = \int_0^{r_0} \sigma_z 2\pi r dr = 0.$$

Podstawiając wzory (5.13), (3.3) do wyrażenia (5.14) i wykonując całkowanie otrzymujemy

$$(5.14a) \quad \sigma_0 = -k_1 \left[ \left( \Sigma_1 - \frac{\Sigma_2}{m} \right) \ln \frac{r_0}{z_0} + 1 + \frac{7}{18} \Sigma_1 + \frac{2}{3} f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right].$$

Stała całkowania (5.14a) odnosi się do materiału jednowarstwowego ( $k = \text{const}$ ). Przy wyciskaniu materiału wielowarstwowego podczas obliczania stałej całkowania  $\sigma_0$ , należy uwzględnić położenie  $i$ -tej warstwy na wyjściu z obszaru uplastycznienia. Dotyczy to wartości promieni  $r_1, r_2, \dots, r_i, r_0$  w  $z_n = 0$ , przy danych położeniach promieni  $R_1, R_2, \dots, R_i, R_0$  odpowiadających tym samym warstwom przed wyciskaniem (rys. 2).

Położenie promieni  $r_1, r_2, \dots, r_i, r_0$  określimy na podstawie danego stopnia redukcji  $\lambda$ , wyrażonego wzorem (2.4), i założenia o stałym wydatku wzdłuż linii rozgraniczającej sąsiednie warstwy. Mamy wówczas

$$(5.15) \quad \frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2} = \dots = \frac{r_i}{R_i} = \frac{r_0}{R_0} = \sqrt{1-\lambda}.$$

Stałą całkowania  $\sigma_0$  obliczymy z równania (5.14), które dla materiału, wielowarstwowego przyjmuje następującą postać

$$(5.16) \quad \int_0^{r_1} \sigma_{z_1} 2\pi r dr \Big|_{z_n=0} + \int_0^{r_2} \sigma_{z_2} 2\pi r dr \Big|_{z_n=0} + \dots + \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma_{z_i} 2\pi r dr \Big|_{z_n=0} + \int_{r_i}^{r_0} \sigma_{z_0} 2\pi r dr \Big|_{z_n=0} = 0.$$

Indeksy „ $i$ ” w (5.16) oznaczają numer warstwy wzdłuż przekroju  $z_n = 0$  (w kierunku osi  $r$ ). Przedstawia to rys. 2.

Funkcje  $\sigma_{z_i}(r) \Big|_{z_n=0}$  opisujące rozkład naprężeń osiowych  $i$ -tej warstwy w przekroju wyjściowym  $z_n = 0$ , mają na podstawie (3.3), (3.12) i (5.13) postać następującą:

$$(5.17) \quad \sigma_{z_i}(r) \Big|_{z_n=0} = \sigma_0 + k(r_n = 1) \left( \Sigma_1 - \frac{\Sigma_2}{m} \right) \ln \frac{r_0}{z_0} + \left[ \frac{r}{r_0} + \frac{r^2}{r_0^2} \right] \frac{\Sigma_1}{3} k_i(r) \Big|_{z_n=0} + k_i(r) \Big|_{z_n=0} \left[ 1 + f_1 \frac{r}{r_0} + f_2 \left( \frac{r}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right].$$

Wyrażenie na stałą całkowania  $\sigma_0$ , z uwzględnieniem dowolnej liczby warstw, wyznaczamy z równania (5.16) po podstawieniu do niego wzoru (5.17) na  $\sigma_{z_i}(r)$  w  $z_n = 0$ . Całkując związek (5.16) otrzymujemy zamkniętą postać wyrażenia na  $\sigma_0$  dla dowolnej liczby warstw.

Dodajmy, że pominięto przy tym (w  $z_n = 0$ ) wkład naprężeń osiowych do bilansu sił od bardzo cienkich warstw  $\delta(r) \rightarrow 0$ , wzdłuż których następuje założona, ciągła zmiana funkcji  $k_i(r)$ .

Naprężenia normalne na powierzchni kontaktu materiału z matrycą  $\sigma_n(z)$  (rys. 2) obliczamy z warunku równowagi

$$(5.18) \quad \sigma_n(z) \Big|_{r_n=1} = \sigma_z \Big|_{r_n=1} \sin^2 \alpha + \sigma_r \Big|_{r_n=1} \cos^2 \alpha + 2\tau_{rz} \Big|_{r_n=1} \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Podstawiając do (5.18) wzory na składowe naprężenia  $\sigma_z, \sigma_r, \tau_{rz}$  otrzymane

z (3.2), (3.3), (3.4) oraz (3.12), (3.15) i (5.13), w  $r_n = 1$  mamy następujące równania:

$$(5.19) \quad \sigma_n(z)|_{r_n=1} = \sigma_0 + k_{i(r_n=1)} \left( \Sigma_1 - \frac{\Sigma_2}{m} \right) \ln \left( \frac{r_0}{z_0} + m \frac{z}{z_0} \right) + \frac{2}{3} k_{i(r_n=1)} \Sigma_1 + \\ + k_{i(r_n=1)} (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \sqrt{-2f_1 - f_1^2}).$$

Średni nacisk na stemplu  $q$  w procesach wyciskania materiałów wielowarstwowych obliczamy ze znanego rozkładu naprężeń  $\sigma_n(z)$  wyrażonego wzorem (5.18) i założonych naprężeń tarcia  $\tau_n(z)$  określonych zależnością (2.5).

Mając na uwadze warunek równowagi i porównując siłę na stemplu  $P$  z odpowiednimi rzutami naprężeń  $\sigma_n(z)$  i  $\tau_n(z)$  w  $r_n = 1$  na kierunek osi  $z$ , otrzymujemy (rys. 2).

$$(5.20) \quad P = \pi R_0^2 q = \int_{S_{R_b(z)}} [(\sigma_n) \sin \alpha + (\tau_n) \cos \alpha] 2\pi R_b(z) ds.$$

Po przekształceniu (5.20) otrzymujemy:

$$(5.21) \quad q = \frac{2}{R_0^2} \int_{S_{R_b(z)}} [(\sigma_n) \sin \alpha + (\tau_n) \cos \alpha] R_b(z) ds.$$

Z rys. 2 wynika, że

$$(5.22) \quad ds = \frac{dR_b(z)}{\sin \alpha}.$$

Po podstawieniu do (5.21) zależności (2.5), (5.19), (5.22) oraz wykonaniu całkowania, otrzymujemy analityczne wyrażenie na obciążenie stempla  $q$  w następującej postaci:

$$(5.23) \quad q = \frac{2}{R_0^2 \sin \alpha} \int_{r_0}^{R_0} [(\sigma_n) \sin \alpha + \mu k_{i(r_n=1)} \cos \alpha] R_b(z) dR_b = \\ = \left[ \sigma_0 + k_{i(r_n=1)} \left( \frac{2}{3} \Sigma_1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \sqrt{-2f_1^2 - f_1^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \operatorname{ctg} \alpha \right) \right] \left( 1 - \frac{r_0^2}{R_0^2} \right) + \\ + \frac{2}{R_0^2 \sin \alpha} k_{i(r_n=1)} \left( \Sigma_1 - \frac{\Sigma_2}{m} \right) \left[ \frac{R_0^2}{2} \left( \ln \frac{R_0}{z_0} - \frac{1}{2} \right) - \frac{r_0^2}{2} \left( \ln \frac{r_0}{z_0} - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Istotny wpływ na wartość nacisku  $q$  ma wartość stałej całkowania  $\sigma_0$  i granicą plastyczności  $k_{i(r_n=1)}$  warstwy stykającej się z matrycą. Następne ważne czynniki, to stopień redukcji, współczynnik szorstkości  $\mu$  i kąt nachylenia tworzącej matrycy  $\alpha$ .



Wzór (5.23) na średni nacisk na stemplu  $q$  przy wyciskaniu wielowarstwowym uwzględnia podstawowe własności mechaniczne niejednorodnego plastycznie materiału, jak też ujmuje wpływ takich czynników technologicznych, jak kształt matrycy i stan jej powierzchni.

## 6 Dyskusja wyników i wnioski

Wyżej przedstawione, nowe rozwiązanie teoretyczne problemu wyciskania wielowarstwowego charakteryzuje efektywność wyrażająca się analitycznymi postaciami związków określających rozkład naprężeń normalnych na powierzchni styku matrycy z materiałem oraz sił wyciskania.

Obliczone z zależności (5.19) naprężenia normalne wzdłuż linii konturu matrycy spełniają ściśle równania równowagi, warunek plastyczności Treski i założenie A. Haara–Th. Kármána o równości dwóch naprężeń głównych. Jednocześnie obliczony z rozkładu naprężeń normalnych średni nacisk na stemplu  $q$ , podany wzorem (5.23) daje z punktu widzenia twierdzeń ekstremalnych teorii plastyczności dolną ocenę obciążenia.

Rozwiązanie nie nakłada ograniczeń na ilość warstw i jest z konieczności uproszczone.

Najważniejsze uproszczenia obok założeń geometrycznych o kształcie obszaru uplastycznienia, to warunek A. Haara–Th. Kármána oraz postać funkcji  $F(r, z)$  we wzorze (3.15), która określa przebieg naprężeń stycznych i warunek na tarcie.

Funkcja  $F(r, z)$  nie zależy bowiem od wartości granicy plastyczności i ilości warstw. Struktura wzoru (3.15) na naprężenia styczne zakłada ich ciągłość i różniczkowalność w całym obszarze uplastycznienia. Oznacza to, że przyjmujemy w najbliższym otoczeniu styku warstw ciągły rozkład granicy plastyczności. Zatem podane rozwiązanie dotyczy przypadku ciągłej zmiany niejednorodności plastycznej.

Rzeczywiste rozkłady granicy plastyczności w obszarze styku dwóch wyciskanych warstw zależą niewątpliwie od ich cech materiałowych i wielu nierozpoznanych dotąd zjawisk zachodzących w procesie deformacji plastycznej [13, 14, 15, 16].

Wydaje się, że założenie o ciągłym rozkładzie granicy plastyczności w otoczeniu styku dwóch warstw może być poprawnym przybliżeniem realnej sytuacji w niektórych procesach otrzymywania złożonych układów. Przykładem są szeroko stosowane w przemyśle metody łączenia eksplozyjnego i implozyjnego [13, 14, 15, 16].

Występujący w procesie wyciskania stan naprężenia charakteryzuje się w większości obszaru uplastycznionego trójosiowym, nierównomiernym ściskaniem. Ten fakt przemawia również na korzyść założenia o ciągłości granicy plastyczności w najbliższym otoczeniu kontaktu dwóch warstw.

W wielu układach dwu i trójwymiarowych, ze względu na znaczne różnice własności mechanicznych warstw, występuje skokowa niejednorodność plastyczna. Wówczas analiza teoretyczna rozpatrywanego problemu może być także oparta na prezentowanej metodzie obliczeń. Zmieni się jedynie podejście przy określaniu struktury funkcji  $F(r, z)$ . Powinna być również zapewniona ciągłość naprężeń stycznych. Można tego dokonać przez porównanie wartości naprężeń stycznych z obu stron powierzchni podziału sąsiednich warstw. Procedura taka, możliwa do realizacji w ramach prezentowanej metodyki obliczeń, w istotny sposób skomplikuje związki na składowe tensora naprężenia.

Możliwe są także różne uproszczone warianty omawianej metody obliczeń pól naprężeń w procesach wielowarstwowego wyciskania. Można na przykład ograniczyć się przy obliczaniu  $\tau_{rz}$  tylko do jednej niewiadomej  $f_1$ . Wtedy naprężenia styczne będą spełniały jedynie warunki brzegowe i warunek plastyczności.

Rozwiązywanie osiowo-symetrycznych zagadnień brzegowych teorii niejednorodnej plastyczności napotyka trudności podstawowe. Stąd poszukuje się różnych uproszczeń prowadzących do efektywnych wyników. Przedstawiona próba rozwoju teorii wyciskania materiałów wielowarstwowch z silną niejednorodnością plastyczną może posłużyć do racjonalnej, technicznej analizy osiowo-symetrycznych procesów obróbki plastycznej.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Р. И. НЕПЕРШИН, *Оссимметричное прессование с малыми и большими обжатиями*, Расчеты процессов пластического течения металлов, 71–83, Наука, Москва 1973.
2. J. PIWNIK, *Analiza procesu wyciskania osiowo-symetrycznego*, Rozpr. Inżyn., 35, 2, 241–274, 1987.
3. J. ШАКРАВАРТ, *Theory of plasticity*, Mc Graw-Hill Book Company, 785, 1987.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Introduction to the mechanics of plastic forming of metals*, 362, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1979.
5. Л. Н. МОГУЧИЙ, *Обработка давлением труднодеформируемых материалов*, Машиностроение, 270, Москва 1976.
6. T. Z. BLAZYŃSKI, M. MATIN, *On the theory of the process of cold plug drawing of implosively prewelded trimetallic tubing*, Metalurgia i Odlewnictwo, 8, 2, 215–223, 1982.
7. M. MATIN, T. Z. BLAZYŃSKI, *An upper bound model of the process of hydrostatic extrusion of implosively prewelded bimetallic arrays of rods*, J. Mech Work Techn., 6, 303–312, 1982.
8. В. В. КЛУБОВИЧ, А. В. СТЕПАНЕНКО, *Ультразвуковая обработка материалов*, Наука и Техника, 294, Минск 1981.
9. В. ОЛЬШАК, Я. РИХЛЕВСКИЙ, В. УРЬАНОВСКИ, *Теория пластичности неоднородных тел*, Мир, Москва 1964.
10. L. DIETRICH, *Uwzględnienie wzmocnienia materiału w analizie złożonych procesów plastycznego płynięcia*, Prace IPPT PAN, 165, Warszawa 1977.
11. J. PIWNIK, *Podstawowe zależności teorii niejednorodnej idealnej plastyczności w zagadnieniach z osiową symetrią*, Obróbka Plastyczna, 26, 2, 5–11, 1987.

12. J. PIWNIK, *Modelowanie procesów wyciskania materiałów niejednorodnych*, Rozpr. Inżyn., **32**, 2, 275–288, 1987.
13. T. Z. BLAZYŃSKI, M. MATIN, *The response of implosively prewelded arrays of rods to processing by hydrostatic extrusion*, J. Mech. Work Techn., **6**, 291–302, 1982.
14. T. Z. BLAZYŃSKI, *Pass profile and residual stresses in plug tube drawing*, J. Mech. Work. Techn., **13**, 331–337, 1986.
15. T. Z. BLAZYŃSKI, *Explosive manufacture of bimetallic tubular transition joints*, J. Mech. Techn., **12**, 79–91, 1985.
16. Y. BEDROUD, T. Z. BLAZYŃSKI, *Some technological aspects of cold plug drawing of implosively welded duplex tubing*, J. Mech. Work. Techn., **1**, 311–324, 1978.

## РЕЗЮМЕ

ТЕОРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО  
ВЫДАВЛИВАНИЯ МНОГОСЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ С СИЛЬНОЙ  
ПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В работе представлено новое, упрощенное теоритическое решение полей напряжений для процесса выдавливания многослойного материала в условиях осевой симметрии. Решение опирается на модели тела идеально пластического с условием пластичности Треска у предположением А. Хаара–Г. Кармана для каждого слоя. Слои обладают разными значениями предела пластичности. Деформируемый пластически материал характеризуется сильной пластической неоднородностью. В близкой окрестности линии контакта слоев предполагается непрерывное распределение предела пластичности. Предполагается тоже форму области перехода в пластическое состояние и положение поверхности контакта слоев. Касательные напряжения и среднее давление в продольном сечении выдавливаемого стержня выражены функциями по отношению к осевой координате  $z$ . Незвестные функции, зависящие только от одной переменной  $z$ , определены из уравнений пластического состояния на линии контура матрицы. В результате получены точные аналитические соотношения, определяющие распределение нормальных напряжений на поверхности контакта материала с матрицей. На основе известного распределения нормальных напряжений и касательных напряжений от трения на поверхности контакта материала с инструментом определена точная, нижняя оценка сил выдавливания. Представленное решение не определяет ограничений для числа слоев и форму матрицы. Может оно послужить для рационального, технического анализа выдавливания цилиндрических стержней, состоящих из нескольких металлических слоев.

## SUMMARY

THEORETICAL ANALYSIS OF THE AXI-SYMMETRIC EXTRUSION PROCESS  
OF MULTI-LAYER MATERIALS WITH A STRONG PLASTIC NONHOMOGENEITY

A novel simplified theoretical solution is found for the stress states accompanying the process of extrusion of multi-layer materials under the conditions of axial symmetry. The solution is based on the model of perfect plastic material satisfying the Tresca yield condition, the Haas–Kármán conditions being satisfied in each layer. The layers are characterized by different yield limits and strong plastic nonhomogeneity. In the neighbourhood of the interfaces continuous variation of the

yield limit is assumed. The form of the plastic zone and positions of the contact surfaces separating the layers are assumed. Shearing stresses and mean pressure in a longitudinal section of the extruded rod are expressed in terms of functions of the axial coordinate  $z$ . Unknown functions of the single coordinate  $z$  are determined from the yield conditions written for the contour of the die. Accurate analytical relations are derived for the normal stress distribution at the surface of contact between the die and the material extruded. Using the known normal and shear stress distributions (due to friction), accurate value of the lower estimate of the extrusion force is determined. The solution may be applied to the cases of arbitrary number of layers and arbitrary form of the die. It may be used to a rational analysis of the process of extrusion of multi-layer cylindrical rods.

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 12 października 1988 r.*

---