

PROBLEM OPTIMALNOŚCI MIMOŚRODOWO ŚCISKANEGO SŁUPA W WARUNKACH PEŁZANIA^(*)

ADAM WRÓBLEWSKI (KRAKÓW)

W pracy rozważono problem optymalności warunku równomiernej wytrzymałości pełzających słupów mimośrodowo ściskanych. Badania przeprowadzono na dwuprzegubowym modelu pręta. Utratę nośności pręta związane ze zniszczeniem przy pełzaniu. Rozważono trzy hipotezy zniszczenia przy pełzaniu: zniszczenie kruche (hipoteza Kaczanowa), zniszczenie lepkie (hipoteza Hoffa) oraz zniszczenie mieszane. We wszystkich przypadkach wykazano, że warunek równomiernej wytrzymałości nie jest równoważny warunkowi globalnego optimum. Wyniki są jakościowo zgodne ze ścisłym rozwiązaniem problemu, tzn. z rozwiązaniem układu ciągłego, otrzymanym wcześniej dla pewnych szczególnych wartości obciążenia i mimośrodów, i ograniczonym do przypadku zniszczenia kruchej.

1. UWAGI WSTĘPNE

Optymalizacja w warunkach pełzania jest jednym z najmłodszych, a tym samym najmniej rozwiniętych działem teorii optymalnego kształtowania konstrukcji. Pierwsze znaczące prace z tej dziedziny powstały dopiero w końcu lat sześćdziesiątych – REJTMAN [1], PRAGER [2], ŻYCZKOWSKI [3], NIEMIROWSKI [4]. Przegląd prac dotyczących optymalnego kształtowania w warunkach pełzania, klasyfikację występujących problemów znaleźć można w pracy ŻYCZKOWSKIEGO [5].

Niniejsza praca dotyczy optymalnego kształtowania mimośrodowo ściskanych, geometrycznie nieliniowych słupów w warunkach pełzania. Utratę nośności pręta związane ze zniszczeniem przy pełzaniu. Zasadniczy problem sprowadza się do porównania słupów kształtowanych z warunku równomiernej wytrzymałości ze słupami optymalnymi. Powyższy problem w odniesieniu do konstrukcji sprężystych i sprężysto-plastycznych był dyskutowany przez wielu autorów, np. RAZANI [6], KICHER [7], MALKOW i STROGIN [8]. Wykazano, że na ogół, warunek równomiernej wytrzymałości nie jest równoważny warunkowi globalnego optimum. W zasadzie, tylko w zakresie sprężystym i przy założeniu zasady zeszytnienia, można kształtować konstrukcję na

^(*) Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego CPBP 02.01-6.5.

warunek globalnego optimum przy równoczesnym spełnieniu warunku równomiernej wytrzymałości.

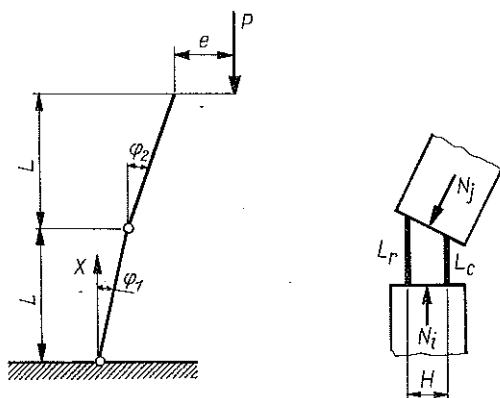
Rozważenie problemu optymalności słupa równomiernej wytrzymałości przeprowadzono na modelu. Badania modelowe mają sens nie tylko poznawczy. Zjawiska charakterystyczne dla modelu w dużym przybliżeniu opisują rzeczywistość, a ich opis matematyczny jest stosunkowo prosty. Interesujący przegląd sposobów zastępowania układów ciągłych (belek, płyt, powłok) układami dyskretnymi w stanie sprężystym przedstawił CHAJES [9]. W warunkach reologicznych jednoparametrowe modele opisujące proces pełzania prętów stosowali: ŻYCZKOWSKI [10] (przegubowy model Wagnera) i CALLADINE [11] (krótka część odkształcalna o dowolnym przekroju).

Ścisłe rozwiązanie problemu optymalności mimośrodowo ściskanych prętów równomiernej wytrzymałości w warunkach reologicznych przedstawiono w pracy [12]. Analizowano w niej pręt przy założonym nieliniowym prawie pełzania typu Bailey–Nortona, zniszczeniu według hipotezy Kaczanowa i przy uwzględnieniu skończonych ugięć i ściśliwości osi. Dla przyjętej, jednej wartości obciążenia i jednej wartości mimośrodu wykazano, że pręt równomiernej wytrzymałości różni się znacznie od pręta optymalnego. Uproszczenie opisu problemu przez przyjęcie do rozważań modelu pozwoli na szerszą analizę, tj. określenie wpływu zmiany obciążenia i mimośrodu na kształt optymalny, przy zachowaniu teorii trzeciego rzędu opisującej ugięcia skończone. W niniejszej pracy analizowano również inne hipotezy zniszczenia przy pełzaniu, tj. oprócz hipotezy Kaczanowa (zniszczenie kruche) rozważano zniszczenie lepkie (hipoteza Hoffa) oraz zniszczenie mieszane.

2. ZAŁOŻENIA OGÓLNE

2.1. Równania procesu pełzania

Jak wspomniano we wstępie analizę procesu pełzania pręta przeprowadza się na modelu. Jest to złożenie modelu Zieglera [13] z dwoma, równej długości, sztywnymi elementami, w którym w miejsce przegubów obrotowych wprowadza się krótkie części odkształcalne podobnie jak w modelu SHANLEY'A [14] — rys. 1. Elementy odkształcalne można traktować jak pręt o teoretycznym przekroju dwuteowym. Umożliwia to zastąpienie całkowania po przekroju pręta prostym sumowaniem, co jest istotne z uwagi na przyjęte do rozważań nieliniowe prawo fizyczne. Ponadto, tak przyjęty model umożliwia prostą analizę procesu pęknięcia konstrukcji. Założono jednoosiowy stan naprężenia w częściach odkształcalnych, tj. pomija się wpływ ścinania. Uwzględniono natomiast wpływ siły podłużnej na rozkład naprężeń. Problem zwichrzenia oraz utraty stateczności pólek dwuteownika nie jest rozważany.



Rys. 1.

Model scharakteryzowany jest następującymi wielkościami:

- L długość części sztywnych,
- $A_{1,2}$ pole powierzchni przekroju części odkształcalnych (przegubu),
- $H_{1,2}$ rozstaw półek,
- $L_{1,2}$ długość początkowa części odkształcalnych, $L_{1,2} \ll L$,
- E moduł Younga,
- C stała pęknięcia,
- λ stała pełzania,
- m, n wykładniki praw fizycznych.

Wszystkie rozważania odniesione są do przegubów. Z założenia łączniki są elementami sztywnymi i nie podlegają żadnym odkształceniom sprężystym, a tym bardziej procesom reologicznym. Naprężenia w poszczególnych półkach przegubów wynoszą:

$$(2.1) \quad \sigma_{ri} = \frac{N_i}{A_i} + \frac{2M_i}{A_i H_i}, \quad \sigma_{ci} = \frac{N_i}{A_i} - \frac{2M_i}{A_i H_i}, \quad i = 1, 2,$$

gdzie wskaźniki r i c odnoszą się odpowiednio do półek rozciąganych i ściskanych w wyniku działania zginania. Do wzorów tych podstawiamy:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} M_1 &= P(L \sin \varphi_1 + L \sin \varphi_2 + e), \\ M_2 &= P(L \sin \varphi_2 + e), \end{aligned}$$

natomiast wartości sił normalnych działających w przegubach (dodatnich przy rozciąganiu) przyjęto równą średniej arytmetycznej sił normalnych działających na dany przegub ze strony elementów sztywnych lub podłoża (rys. 1)

$$(2.3) \quad \begin{aligned} N_1 &= -\frac{P}{2}(\cos \varphi_1 + 1), \\ N_2 &= -\frac{P}{2}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Wprowadzając bezwymiarowe parametry:

$$(2.4) \quad l_i = \frac{L_i}{L}, \quad a_i = \frac{A_i}{L^2}, \quad p = \frac{P}{EL^2}, \quad h_i = \frac{H_i}{L},$$

$$s = \frac{\sigma}{E}, \quad \delta = \frac{e}{L},$$

naprężenia wyrażą się wzorami:

$$(2.5) \quad s_{r1,c1} = -\frac{p}{2a_1}(\cos \varphi_1 + 1) \pm \frac{2p}{a_1 h_1}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \delta),$$

$$s_{r2,c2} = -\frac{p}{2a_2}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \pm \frac{2p}{a_2 h_2}(\sin \varphi_2 + \delta).$$

Równania opisujące proces zniszczenia konstrukcji przy pełzaniu wprowadzimy dla każdej hipotezy osobno. Szczegółowe omówienie problemu kontynualnej mechaniki zniszczenia przy pełzaniu, istniejących hipotez, znaleźć można w pracy KACZANOWA [15].

2.2. Zniszczenie kruche – hipoteza Kaczanowa–Rabotnowa

Równania procesu pełzania i pęknięcia materiału przyjęto w postaci proponowanej przez RABOTNOWA [16] uwzględniającej sprzężenie tych zjawisk; kropka oznacza różniczkowanie po czasie t :

$$(2.6) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma}{\psi} \right)' + \frac{1}{\lambda} \left| \frac{\sigma}{\psi} \right|^n \text{sign}(\sigma),$$

$$\psi = \begin{cases} -C \left(\frac{\sigma}{\psi} \right)^m & \sigma > 0, \\ 0, & \sigma \leq 0. \end{cases}$$

$$\varphi(0) = 1,$$

gdzie $\psi = A/A_0$; A – efektywna wielkość przekroju (po uwzględnieniu mikropeknięć); A_0 – przekrój początkowy; E , λ , C , m , n – stałe materiałowe. Przekrój ulega zniszczeniu gdy $\psi = 0$.

Dla modelu rozpisujemy równania dla każdej odkształcanej części osobno – z założenia elementy ściskane nie ulegają zniszczeniu wskutek pęknięcia materiału. Odkształcenia poszczególnych pól przegubów określone są miarą Cauchy'ego:

$$(2.7) \quad \varepsilon_{ri} = \frac{L_{ri} - L_i}{L_i}, \quad \varepsilon_{ci} = \frac{L_{ci} - L_i}{L_i} \quad i = 1, 2,$$

gdzie L_{ri} , L_{ci} oznaczają długości pól po odkształceniu. Różnicę odkształceń pól przegubu można powiązać z obrotem części sztywnych:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{r1} - \varepsilon_{c1} &= \frac{L_{r1} - L_{c1}}{L_1} = \frac{H_1}{L_1} \operatorname{tg} \varphi_1, \\ \varepsilon_{r2} - \varepsilon_{c2} &= \frac{L_{r2} - L_{c2}}{L_2} = \frac{H_2}{L_2} \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Wprowadzając bezwymiarowy czas wzorem $\tau = \frac{1}{\lambda} E^n t$ i korzystając z zależności (2.5), (2.6), (2.8) można przedstawić komplet równań opisujących proces pełzania i pęknięcia konstrukcji według hipotezy Kaczanowa w następującej postaci:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} &\left[\frac{h_1}{l_1} \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} - \frac{p}{2a_1} \frac{1 - \psi_1}{\psi_1} \sin \varphi_1 - \frac{2p}{a_1 h_1} \frac{1 + \psi_1}{\psi_1} \cos \varphi_1 \right] \dot{\varphi}_1 - \\ &\quad - \left[\frac{2p}{a_1 h_1} \frac{1 + \psi_1}{\psi_1} \cos \varphi_2 \right] \dot{\varphi}_2 = - \frac{s_{r1}}{\psi_1^2} \dot{\psi}_1 + \left| \frac{s_{r1}}{\psi_1} \right|^n \operatorname{sign} s_{r1} - |s_{c1}|^n \operatorname{sign} s_{c1}, \\ &\left[\frac{h_2}{l_2} \frac{1}{\cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)} + \frac{p}{2a_2} \frac{1 - \psi_2}{\psi_2} \sin \varphi_1 \right] \dot{\varphi}_1 + \\ &\quad + \left[\frac{h_2}{l_2} \frac{1}{\cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)} - \frac{p}{2a_2} \frac{1 - \psi_2}{\psi_2} \sin \varphi_2 - \frac{2p}{h_2 a_2} \frac{1 + \psi_2}{\psi_2} \cos \varphi_2 \right] \dot{\varphi}_2 = \\ &\quad = - \frac{s_{r2}}{\psi_2^2} \dot{\psi}_2 + \left| \frac{s_{r2}}{\psi_2} \right|^n \operatorname{sign} s_{r2} - |s_{c2}|^n \operatorname{sign} s_{c2}, \end{aligned}$$

$$\psi_1 = \begin{cases} -C\lambda E^{m-n} \left(\frac{s_{r1}}{\psi_1} \right)^m, & s_{r1} > 0, \\ 0, & s_{r1} \leq 0, \end{cases}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} -C\lambda E^{m-n} \left(\frac{s_{r2}}{\psi_2} \right)^m, & s_{r2} > 0, \\ 0, & s_{r2} \leq 0, \end{cases}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = 1,$$

gdzie kropka oznacza teraz pochodną względem bezwymiarowego czasu τ .

Warunki początkowe dla kątów φ_1, φ_2 określić można z natychmiastowych odkształceń sprężystych ($\varphi_1(0^-) = \varphi_2(0^-) = 0$). W chwili początkowej $t = 0^+$ kąty φ_1, φ_2 są bardzo małe. Nie popełniając dużego błędu można, dla potrzeb określenia w sposób jawny warunków początkowych, zlinearyzować tu funkcje trygonometryczne. Wówczas warunki te przedstawiają się następująco:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varphi_1(0^+) &= \frac{4pa_2 h_2^2 l_1}{(a_1 h_1^2 - 4pl_1)(a_2 h_2 - 4pl_2) - 4pl_1 a_2 h_2^2} \delta, \\ \varphi_2(0^+) &= \frac{4pl_2(a_1 h_1^2 - 4pl_1) + 4pl_1 a_2 h_2^2}{(a_1 h_1^2 - 4pl_1)(a_2 h_2 - 4pl_2) - 4pl_1 a_2 h_2^2} \delta. \end{aligned}$$

2.3. Zniszczenie lepkie — hipoteza Hoffa

Według hipotezy HOFFA [17] konstrukcja ulega zniszczeniu, jeśli dodatnie odkształcenie, określone miarą logarytmiczną Hencky'ego ε^H , dąży do nieskończoności. Korzystając z warunku stałej objętości części odkształcalnych $A_{ri} L_{ri} = A_{ci} L_{ci} = A_i L_i$, można odkształcenie wyrazić w zależności od zmian pól A_{ri} , A_{ci} :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ri}^H &= \ln \frac{L_{ri}}{L_i} = \ln \frac{A_i}{A_{ri}}, \\ \varepsilon_{ci}^H &= \ln \frac{L_{ci}}{L_i} = \ln \frac{A_i}{A_{ci}}. \end{aligned}$$

Warunek Hoffa (tj. dążenie odkształceń do nieskończoności) równoważny jest zatem warunkowi, aby wielkość pola przekroju rozciąganego A , dążyła do zera.

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe i formułując prawo pełzania w postaci:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^H &= \dot{s}^H + |s^H|^n \operatorname{sign} s^H, \\ s_i^H &= \frac{A_i(0^-)}{A_i(\tau)} s_i, \quad i = r_1, r_2, c_1, c_2 \end{aligned}$$

(prawo Nortona uogólnione na przypadek odkształceń skończonych i naprężeń rzeczywistych) dla każdej półki osobno, otrzymujemy układ czterech równań różniczkowych opisujących zmiany pól powierzchni $a_{ri} = a_{ri}(\tau)$. Po wprowadzeniu pomocniczych oznaczeń:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \kappa_{r1,c1} &= -\frac{p}{2a_{r1,c1}} (\cos \varphi_1 + 1) \pm \frac{2p}{h_1 a_{r1,c1}} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \delta), \\ \kappa_{r2,c2} &= \frac{p}{2a_{r2,c2}} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \pm \frac{2p}{h_2 a_{r2,c2}} (\sin \varphi_1 + \delta), \\ \omega_{r1,c1} &= \frac{p}{2a_{r1,c1}} \sin \varphi_1 \pm \frac{2p}{h_1 a_{r1,c1}} \cos \varphi_1, \\ \omega_{r2,c2} &= \frac{p}{2a_{r2,c2}} \sin \varphi_2 \pm \frac{2p}{h_2 a_{r2,c2}} \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

układ ten można napisać następująco:

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{a}_{r1}}{a_{r1}}(\kappa_{r1} - 1) - \omega_{r1} \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 \frac{2p}{a_{r1} h_1} \cos \varphi_2 &= |\kappa_{r1}|^m \operatorname{sign} \kappa_{r1}, \\
 \frac{\dot{a}_{c1}}{a_{c1}}(\kappa_{c1} - 1) - \dot{\omega}_{c1} \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 \frac{2p}{a_{c1} h_1} \cos \varphi_2 &= |\kappa_{c1}|^m \operatorname{sign} \kappa_{c1}, \\
 \frac{\dot{a}_{r2}}{a_{r2}}(\kappa_{r2} - 1) - \dot{\phi}_1 \frac{p}{2a_{r2}} \sin \varphi_1 - \omega_{r2} \dot{\phi}_2 &= |\kappa_{r2}|^m \operatorname{sign} \kappa_{r2}, \\
 \frac{\dot{a}_{c2}}{a_{c2}}(\kappa_{c2} - 1) - \dot{\phi}_1 \frac{p}{2a_{c2}} \sin \varphi_2 - \omega_{c2} \dot{\phi}_2 &= |\kappa_{c2}|^m \operatorname{sign} \kappa_{c2},
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Do kompletu należy dołączyć dwa równania łączące odkształcenia przegubów z obrotami części sztywnych:

$$\begin{aligned}
 h_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = l_{r1} - l_{c1} = l_1 a_1 \left(\frac{1}{a_{r1}} - \frac{1}{a_{c1}} \right), \\
 h_2 \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = l_{r2} - l_{c2} = l_2 a_2 \left(\frac{1}{a_{r2}} - \frac{1}{a_{c2}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Warunki początkowe wynikają tak jak poprzednio z natychmiastowych odkształceń sprężystych

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{a_1}{a_{r1}} = \kappa_{r1}, \quad \ln \frac{a_1}{a_{c1}} = \kappa_{c1}, \\
 \ln \frac{a_2}{a_{r2}} = \kappa_{r2}, \quad \ln \frac{a_2}{a_{c2}} = \kappa_{c2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

2.4. Zniszczenie mieszane

Teoria zniszczenia mieszanego (krucho-ciągłego) uwzględnia jednocześnie wpływ zmniejszania przekroju wskutek zmian geometrii (duże odkształcenia) oraz wskutek powstawania mikropęknięć. Klasyczna teoria zniszczenia ciągłego zakłada, że proces pęknięcia nie ma wpływu na odkształcenia skończone — KACZANOW [18]. Sprężenie uzyskać można, analogicznie jak przy zniszczeniu kruchym, wprowadzając parametr pęknięcia ψ do równania fizycznego. Tym razem należy jednak dokonywać wszelkich odniesień do stanu aktualnego, a nie początkowego.

Wobec powyższego, równania procesu pełzania są analogiczne jak w p. 2.3 (równania (2.14) i (2.15)) z tym zastrzeżeniem, że w miejsce κ_{ri} oraz ω_{ri} należy przyjąć:

$$\kappa_{ri} = \frac{\bar{\kappa}_{ri}}{\psi_i}, \quad \omega_{ri} = \frac{\bar{\omega}_{ri}}{\psi_i}, \quad i = 1, 2.
 \tag{2.17}$$

Dołączyć należy również równania procesu pęknięcia:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \begin{cases} -C\lambda E^{m-n} \left(\frac{S_{r1}^H}{\psi_1} \right), & S_{r1}^H > 0, \\ 0, & S_{r1}^H \leq 0, \end{cases} \\ \psi_2 &= \begin{cases} -C\lambda E^{m-n} \left(\frac{S_{r2}^H}{\psi_2} \right), & S_{r2}^H > 0, \\ 0, & S_{r2}^H \leq 0, \end{cases} \\ \psi_1(0) &= \psi_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Warunki początkowe są identyczne jak dla zniszczenia ciągłego, tj. równania (2.16).

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTIMALIZACJI

Problem optymalizacji sformułujemy następująco: poszukujemy kształtu pręta (wielkości A_1, A_2 pola powierzchni elementów odkształcalnych), który zapewni nam maksimum czasu zniszczenia t_k przy ustalonym obciążeniu pręta (siła P i mimośród e) oraz stałej objętości V modelu pręta:

$$(3.1) \quad t_k \rightarrow \max, \quad V, P, e = \text{const.}$$

Pręt ulega zniszczeniu, gdy co najmniej jeden z przegubów uległ zniszczeniu. Pręt równomiernej wytrzymałości definiujemy jako taki, w którym ulegną zniszczeniu jednocześnie oba przeguby.

Przed wszystkim musimy zdefiniować objętość V modelu tak, aby możliwie zbliżyć go do rzeczywistego niepryzmatycznego pręta. Podobnie jak w pracy GAJEWSKIEGO [19] przyjmuje się, że pole powierzchni części sztywnych zmienia się wzdłuż osi pręta według wzoru:

$$(3.2) \quad A(x) = \begin{cases} q_1 x^2 + q_2 x + q_3, & 0 \leq x \leq L, \\ q_4 x + q_5, & L \leq x \leq 2L, \end{cases}$$

Parametry q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 można wyrazić za pomocą charakterystycznych wielkości $A_1 = A(0), A_2 = A(L), A_3 = A(2L)$ wykorzystując warunek ciągłości i gładkości funkcji zmiany pola:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} q_1 &= (A_1 - 2A_2 + A_3)/L^2, & q_2 &= (3A_2 - 2A_1 - A_3)/L, \\ q_3 &= A_1, & q_4 &= (A_3 - A_2)/L, & q_5 &= 2A_2 - A_3. \end{aligned}$$

Przyjmując, że objętość przegubów jest pomijalnie mała w stosunku do objętości części sztywnych modelu, objętość pręta wyrazi się wzorem:

$$(3.4) \quad V = \int_0^{2L} A(x) dx = (A_1 + 4A_2 + A_3)L/3.$$

W przyjętym dwuteowym przekroju pręta ustalono rozstaw H półek. Szerokość B przekroju oraz grubość q półek związana jest warunkiem $2B(x)g(x) = A(x)$. W szczególności wyznaczenie optymalnej funkcji zmiany przekroju poprzecznego równoważne jest określeniu optymalnej $B(x)$ półek przy $g = \text{const}$ lub optymalnej zmianie grubości $g(x)$ przy stałej szerokości $B = \text{const}$.

Obciążenie pręta scharakteryzowane może być dwoma wielkościami — siłą P i mimośród e . Jako punkt odniesienia dla powyższych wielkości przyjmiemy, w niniejszej pracy, obciążenie przyrządczego, sztywnego pręta w zakresie sprężystym o naprężeniu dopuszczalnym σ_0 . Z warunku dopuszczalnych naprężeń na ściskanie:

$$(3.5) \quad \left| \frac{P}{H} - \frac{Pe}{FH} \right| \leq \sigma_0, \quad A = \frac{V}{2L},$$

wynika, że maksymalna siła jaką może być obciążony pręt ($e = 0$) wynosi:

$$(3.6) \quad P_{\max} = \frac{V\sigma_0}{2L}.$$

Pierwszy parametr obciążenia zdefiniowany jest następująco:

$$(3.7) \quad \mu = \frac{P}{P_{\max}}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Dla danego ustalonego obciążenia, z równania (2.4) określić można maksymalny mimośród:

$$(3.8) \quad e_{\max} = \frac{1 - \mu H}{\mu} \cdot \frac{H}{2}.$$

Drugi parametr obciążenia zdefiniowany jest następująco:

$$(3.9) \quad \nu = \frac{e}{e_{\max}}, \quad 0 < \nu < 1.$$

Charakterystyczne wielkości pola przekroju A_1, A_2 powiązane są ze sobą parametrem $k = A_1/A_2$. Przedział zmienności parametru k określić można — przy założeniu $A_1 \geq A_2 \geq A_3$; A_3 ma minimalną wartość wynikającą z warunku (3.5) — następująco:

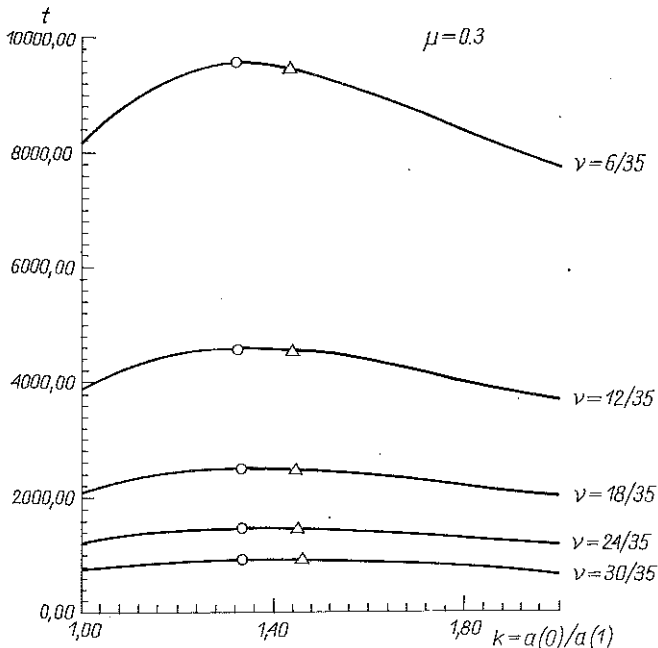
$$(3.10) \quad 1 \leq k \leq \frac{6}{\mu - \mu\nu + \nu} - 5.$$

Celem pracy jest wyznaczenie i porównanie funkcji $k_{1,2} = k_{1,2}(\mu, \nu)$ takich, że: $k_1 = k_1(\mu, \nu)$ — osiągnięte jest maksimum czasu zniszczenia, $k_2 = k_2(\mu, \nu)$ — występuje równomierna wytrzymałość pręta przy pełzaniu.

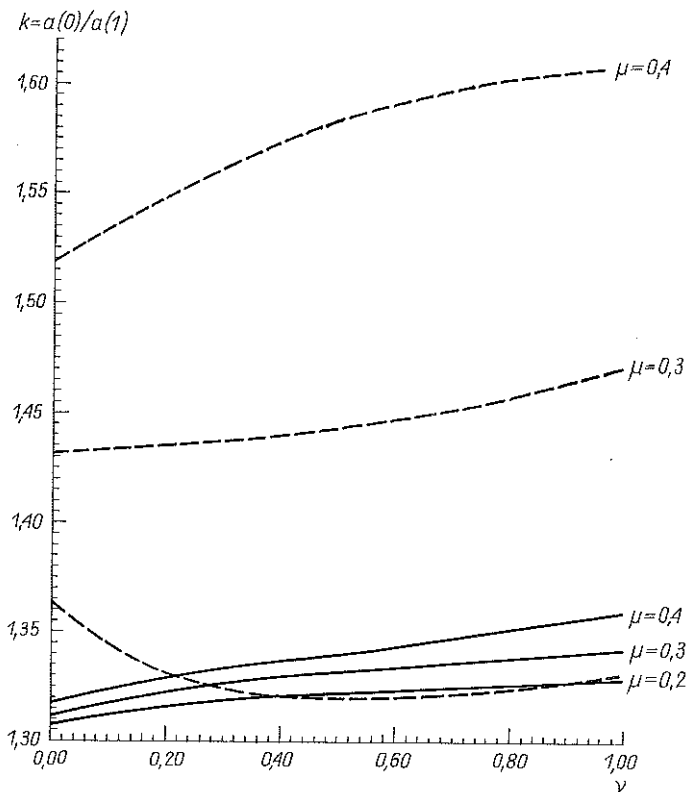
Obliczenia przeprowadzono przyjmując wartości stałych materiałowych prze-

gubów jak dla stali węglowej: $E = 1.7 \cdot 10^5$ [MPa], $\frac{1}{\lambda} = 0,16 \cdot 10^{-7}$ [MPa $^{-n}h^{-1}$],
 $n = 3, 3$, $m = 2, 3$, $C = 0,17 \cdot 10^{-5}$ [MPah $^{-1}$] — ODQVIST [20].

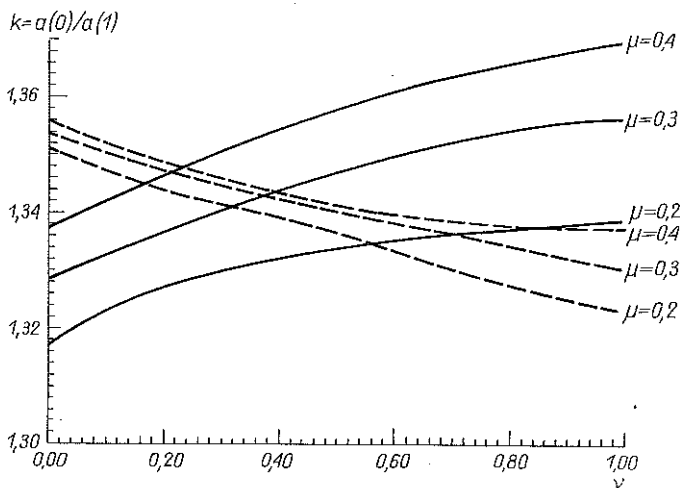
Zależność czasu zniszczenia (dla hipotezy Kaczanowa–Rabotnowa) od parametru k dla danej wartości obciążenia (siła i mimośród) przedstawiono na rysunku 2. Dla pozostałych hipotez wykresy tego typu są jakościowo podobne. Zaznaczono na nim punkty dla maksymalnego czasu zniszczenia i czasu równomiernej wytrzymałości. Na podstawie takich wykresów określano poszukiwane zależności $k_1(\mu, \nu)$ oraz $k_2(\mu, \nu)$. Przedstawione są one na rysunkach 3, 4 i 5; $k_1(\mu, \nu)$ — pręt optymalny (linia ciągła) oraz $k_2(\mu, \nu)$ — pręt równomiernej wytrzymałości (linia przerywana) dla poszczególnych hipotez zniszczenia. Widać, że warunek równomiernej wytrzymałości nie jest na ogół równoważny warunkowi globalnego optimum. Kryteria te są sobie równoważne w zbyt małej liczbie przypadków (stosunkowo najwięcej wspólnych punktów uzyskano rozważając hipotezę zniszczenia lepkiego). Przykłady wskazują, że pręt optymalny (zwłaszcza dla małych mimośródów) jest cieńszy w pobliżu utwierdzenia, w porównaniu do pręta równomiernej wytrzymałości. Podobne jakościowo wyniki podaje omawiana we wstępie praca [12]. Również prace [21, 22], pomimo całkowicie odmiennie formułowanych warunków ograniczających, wykazują ten efekt.



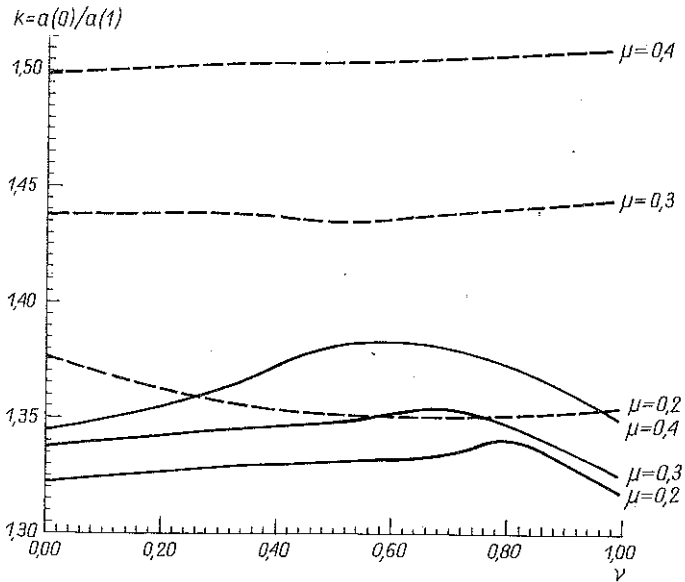
Rys. 2. Hipoteza Kaczanowa–Rabotnowa; o — czas maksymalny, Δ — czas równomiernej wytrzymałości



Rys. 3. Hipoteza Kaczanowa-Rabotnowa; pręty optymalny — linia ciągła, pręty równomiernej wytrzymałości — linia przerywana



Rys. 4. Hipoteza Hoffa; pręty optymalny — linia ciągła, pręty równomiernej wytrzymałości — linia przerywana



Rys. 5. Hipoteza mieszana; pręty optymalny — linia ciągła, pręty równomiernej wytrzymałości — linia przerywana

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. М. И. РЕЙТМАН, *К теории оптимального проектирования пластмассовых конструкций с учетом фактора времени*, Мех. Полимеров, 357–360, 1967.
2. W. PRAGER, *Optimal structural design for given stiffness in stationary creep*, ZAMP, 19, 2, 252–256, 1968.
3. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design in rheology*, Proc. 12th Int. Congress Appl. Mech., Stanford 1968; J. Appl. Mech., 38, 39–46, 1971.
4. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Оптимальное проектирование ползучих конструкций*, 111 Всес. Съезд по Теор. Прик. Мех., Москва 1968.
5. M. ŻYCZKOWSKI, *Przegląd prac nad optymalnym kształtowaniem konstrukcji w warunkach pełzania*, Mech. Teor. Stos., 24, 3, 243–258, 1986.
6. R. RAZANI, *The behaviour of the fully stressed design of structures and its relationship to minimum weight design*, AIAA J., 3, 1965.
7. T. P. KICHER, *Optimum design — minimum weight vs fully stressed*, J. Struct. Div. Am. Soc. Civ. Eng., 92, 1966.
8. Б. МАЛКОВ, Р. М. СТРОНГИН, *Оптимализация конструкций по весу из условий прочности*, Уч. Зап. Гопьков ун-т, 138–149, 1971.
9. А. ЦНАЈЕС, *Stability behaviour illustrated by simple models*, J. Struct. Div. ASCE, 95, 1153–1172, 1969.
10. M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically nonlinear creep buckling of bars*, Arch. Mech., 12, 3, 1960.
11. C. R. CALLADINE, *The effect of cross-section shape on the creep buckling behaviour of columns*, Int. J. Mech. Sci., 4, 387–407, 1962.
12. W. ŚWISTERSKI, A. WRÓBLEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically nonlinear eccentrically compressed columns of uniform creep strength vs optimal columns*, Int. J. Non-Linear Mech., 18, 4, 287–296, 1983.

13. H. ZIEGLER, *On the concept of elastic stability*, Adv. Appl. Mech., 4, 351–403, 1956.
14. F. R. SHANLEY, *Inelastic column theory*, J. Aero Sci., 14, 5, 261–268, 1947.
15. L. M. KACHANOV, *Introduction to continuum damage mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
16. Ю. Н. РАБOTOB, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, Москва 1966.
17. N. J. HOFF, *The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads*, J. Appl. Mech., 20, 1953.
18. Л. М. КАЧАHOB, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изд. АН СССР, ОТН, 8, 26–31, 1958.
19. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach sprężystości*, Prace Komisji Mech. Stos. Oddz. Krak. PAN, Mechanika 4.
20. F. K. G. ODQVIST, *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Oxford Math. Mon., Clarendon Press, 1966.
21. M. ŻYCZKOWSKI, R. WOJDANOWSKA, *Optimal structural design with respect to creep buckling*, Symp. IUTAM Creep in Struct., II, 1970, Springer, 371–387, 1972.
22. A. WRÓBLEWSKI, *Parametryczna optymalizacja prętów mimośrodowo ściskanych w nawiązaniu do teorii wyboczenia pelzającego Kempnera–Hoffa [w druku]*.

РЕЗЮМЕ

ПРОБЛЕМА ОПТИМАТИЗАЦИЙ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ
В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В работе рассматривается проблема оптимальности условия равномерного сопротивления внецентренно сжимаемых стержней в условиях ползучести. Исследования проведены на двухшарнирной модели стержня. Рассмотрены три гипотезы разрушения при ползучести: хрупкое разрушение (гипотеза Качанова), вязкое разрушение (гипотеза Гоффа) и смешанное разрушение. Во всех случаях доказывается, что условие равномерного сопротивления не равнозначно условию глобального оптимум. Результаты качественно совпадают с точным решением задачи, т.е. с решением сплошной системы.

SUMMARY

OPTIMALITY OF AN ECCENTRICALLY COMPRESSED COLUMN
UNDER CREEP CONDITIONS

Problem of optimality of the uniform strength condition of columns subject to eccentrically applied compressive forces is discussed. A two-hinge model of a column is considered. Stability loss is identified with creep failure. Three failure hypotheses are considered: Brittle fracture (Kachanov's), ductile fracture (Hoff's hypothesis) and mixed-mode fracture. In all cases the condition of uniform strength is shown to be not equivalent to the global optimum condition. The results are in qualitative agreement with the accurate solution of the problem, i.e. with the solution of the continuous system derived earlier for certain specific values of loading and eccentricity and evaluated for the brittle fracture case.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 kwietnia 1988 r.