

MODELOWANIE POWSTAWANIA ODŁAMÓW I ZDERZEŃ WIELOKROTNYCH W PRĘTACH SPRĘŻYSTO-KRUCHYCH NA ROZCIĄGANIE

GRZEGORZ BĄK I ZBIGNIEW SZCZESNIAK (WARSZAWA)

W pracy analizowano powstawanie odłamów i zderzenia wielokrotne prętów odcinkowo jednorodnych z uwzględnieniem procesów falowych. Wykorzystano model dyskretny składający się z mas skupionych połączonych sprężynami. Podano ogólne zasady podziału modelu wyjściowego na fragmenty i określono zasady zderzenia tych fragmentów. Zastosowanie metody zilustrowano przykładami.

1. WSTĘP

Zjawisku poosiowego zderzenia prętów towarzyszy rozprzestrzenianie się fal naprężeń. Poprawny opis teoretyczny zderzeń wymaga więc uwzględnienia efektów falowych.

Bezpośrednio po zderzeniu pręty pozostają zwarte. Jeżeli są one wykonane z różnych materiałów, to analiza falowa dla fazy zderzenia musi dotyczyć pręta odcinkowo jednorodnego. W pręcie tym, o szczególnej niejednorodności, należy uwzględniać zjawisko załamania i odbicia fal naprężenia na granicy zróżnicowania materiałowego. Określeniu podlega czas trwania fazy zderzenia, po której następuje faza rozdzielenia prętów. W przypadku zderzeń wielokrotnych fazy zderzenia i rozdzielenia występują naprzemiennie.

W niniejszej pracy rozpatrujemy problem wielokrotnych zderzeń prętów sprężystych o różnych impedancjach. Nie wprowadzamy ograniczeń zarówno liczby zderzających się prętów, jak również liczności zderzeń. Omawiany problem zderzeń poszerzymy o zagadnienie tworzenia się odłamów. Powstawanie odłamów jest właściwe dla prętów wykonanych z materiałów sprężysto-kruchych na rozciąganie.

Z teoretycznego punktu widzenia jest konieczna analiza rozprzestrzeniania się fal w prętach odcinkowo jednorodnych o okresowo wielu brzegach swobodnych, których usytuowanie podlega skokowym zmianom w czasie. Zasadniczą trudnością jest efektywne ujęcie wielofazowego procesu falowego w warunkach załamania i odbić wielokrotnych. Z tego też względu, pomimo liniowości zagadnienia, opis tego typu zjawisk jest bardzo żmudny, [1, 2].

Ogólnie uważa się, że w omawianej sytuacji efektywnymi metodami rozwiązań są metody komputerowe, [3, 4, 5]. W pracy [3] omówiono specyfikę metod analityczno-numerycznych dla zadań zderzeń jednokrotnych. Nie rozważano tam jednak procesów falowych w warunkach wielokrotnych odłamów i zderzeń prętów odcinkowo jednorodnych.

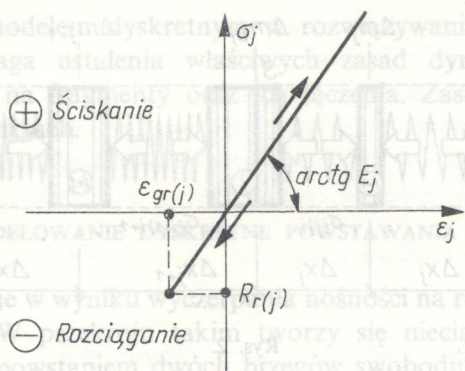
Dla przeprowadzenia analizy sprężystych zderzeń wielokrotnych oraz tworzenia się odłamów w pręcie zastosujemy metodę modelowania dyskretnego zaproponowaną w pracy [5]. Metoda umożliwia bezbłędną aproksymację różnicową procesu rozprzestrzeniania się fal podłużnych w pręcie wieloodcinkowym. Jej istotą jest nadanie sensu fizycznego dyskretnemu modelowi matematycznemu wynikającemu z różnicowej dyskretyzacji problemu. Na tej podstawie otrzymuje się dyskretny model fizyczny rozprzestrzeniania się fal podłużnych. Model ten to układ odpowiednio dobranych mas sztywnych połączonych sprężynami, realizujący samoczynnie zjawiska odbicia i załamania fal. Analiza odłamów i zderzeń na podstawie wspomnianego modelu wymaga jednak dodatkowych modyfikacji w operowaniu tym modelem. Przede wszystkim jest konieczne określenie odpowiedniego sposobu podziału modelu wyjściowego na fragmenty i sposobu ustalania ich kolejnych zderzeń.

Dyskretny ujęcie omawianych zagadnień powoduje na ogół niezgodności początku zderzenia lub rozdzielenia z przyjętym podziałem osi czasu krokami Δt . Stąd też rozwiązania dla zagadnień zderzeń i odłamów będą obarczone pewnymi błędami, pomimo stosowania bezbłędnej aproksymacji do opisu procesu rozprzestrzeniania się fal. W pracy wymienione błędy poddano analizie i oszacowano. Efektywność proponowanej metodyki wykazano w zamieszczonych rozwiązaniach zadań szczegółowych.

2. ZAŁOŻENIA I ZWIĄZKI PODSTAWOWE

Rozpatrujemy sprężysty pręt przyrządowy, odcinkami jednorodny. Materiały z których wykonano poszczególne odcinki pręta, są kruche na rozciąganie i nie wykazują efektów lepkich. Model odkształceniowy materiału j -tego odcinka przedstawiono na rys. 1. Będziemy zakładać o każdym dwóch sąsiednich odcinkach pręta, że są początkowo zespolone, albo że tworzą „suchy styk”. W przypadku zespolenia styk jest zdolny do przenoszenia naprężeń rozciągających, co najwyżej równych wytrzymałości materiału odcinka słabszego, $R_{r(i)} = \min [R_{r(j)}, R_{r(j+1)}]$. Dla przekroju „suchego styku” należy przyjmować $R_{r(i)} = 0$.

Poza pierwotnie danymi przekrojami suchych styków, przekroje takie należy rozważać w związku z analizą powstawania odłamów i zderzeń wielokrotnych. Dynamicznie powstałe suche styki, na skutek odłamów, mogą być usytuowane dowolnie; nie muszą być tożsame z przekrojami różnicowania materiałowego w pręcie. Zakładamy jednak, że tworzą one idealnie gładkie przekroje poprzeczne.



Rys.1.

Rozprzestrzenianie się fal podłużnych wewnątrz j -tego odcinka pręta o impedancji $a_j \rho_j$ opisuje równanie

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - a_j^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = 0.$$

Równanie to należy rozwiązać dla każdego odcinka przyjmując odpowiednie warunki brzegowe i początkowe oraz rozróżniając kolejne fazy w rozprzestrzaniu się fali naprężeń. Brzegami mogą być albo miejsca zspoleń z odcinkami sąsiednimi, albo przekroje poprzeczne swobodne pierwotnie lub dynamicznie utworzone na skutek odłamów. Dla pierwszych z nich jest wymagane sformułowanie warunków ciągłości na granicy różnych ośrodków. Dla drugich jest konieczne określenie odpowiednich warunków początkowych.

Podstawą zastosowanej w pracy metody modelowania dyskretnego [5] dla opisu rozprzestrzeniania się fal podłużnych jest model dyskretny przedstawiony na rys. 2.

Oznaczenia podstawowe są następujące:

$x_{(j)i} = i \Delta x_j$ — współrzędna i -tego przekroju w j -tym odcinku pręta wynikająca z podziału jego osi krokiem Δx_j , $i = 1, 2, \dots, I$;

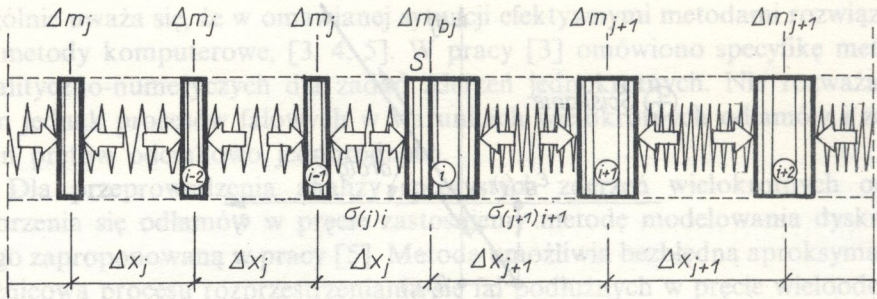
$t^n = n \Delta t$ — chwila czasowa określona na podstawie kroku czasowego Δt stałego dla rozpatrywanego problemu, $n = 0, 1, 2, \dots$;

$\Delta m_j = a_j \rho_j \Delta t$ — masa skupiona modelu dyskretnego na j -tym odcinku pręta;

$\Delta m_{bj} = 0,5(\Delta m_j + \Delta m_{j+1})$ — brzegowa masa skupiona funkcjonująca na granicy odcinków o numerach j oraz $j+1$, w szczególności dla brzegu swobodnego pręta należy przyjmować $\Delta m_{bj} = 0,5 \Delta m_j$.

W pracy [5] wykazano, że spełnienie warunku

$$(2.2) \quad \Delta t = \frac{\Delta x_j}{a_j} = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$



Rys. 2.

dla każdego j -tego pręta zapewnia znikanie błędów aproksymacji różnicowej równania falowego. Aproksymację tę, otrzymaną przy wykorzystaniu różnic centralnych i jawnego sposobu całkowania względem czasu, wyrażają następujące równania:

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_{(j)i}^{n+1} &= \frac{\sigma_{(j)i}^n - \sigma_{(j)i+1}^n}{\Delta m_j} + g, \\
 \Delta u_{(j)i}^{n+1} &= \Delta u_{(j)i}^{n-1,n} + \ddot{u}_{(j)i}^{n+1} \Delta t^2, \\
 u_{(j)i}^{n+1} &= u_{(j)i}^n + \Delta u_{(j)i}^{n+1}, \\
 \sigma_{(j)i}^{n+1} &= \frac{u_{(j)i-1}^{n+1} - u_{(j)i}^{n+1}}{\Delta x_j} E_j,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

gdzie $\Delta u_{(j)i}^{n+1}$ oznacza przyrost przemieszczenia i -tej masy j -tego odcinka pręta wyznaczony na podstawie schematu różnic centralnych w otoczeniu chwili t^n , $\sigma_{(j)i}^{n+1}$ — naprężenie w sprężynie łączącej węzły masowe o indeksach i oraz $i-1$, g — przyspieszenie ziemskie.

Równania (2.3) opisują dynamiczne funkcjonowanie modelu dyskretnego z uwzględnieniem sił ciężkości i stanowią podstawę algorytmu obliczeniowego. Jego realizacja na EMC pozwala określić parametry procesu falowego w izolowanych punktach czaso-przestrzeni z dokładnością do błędów zaokrągleń. Wymagane jest uwzględnienie statycznych przemieszczeń mas modelu dyskretnego oraz naprężeń poszczególnych sprężyn od ciężaru własnego. Wielkości te powinny być ujęte w warunkach początkowych zadania

$$\begin{aligned}
 u_{(j)i}^0 &= u_{\text{stat},i}, \\
 \sigma_{(j)i}^0 &= \sigma_{\text{stat},i}.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

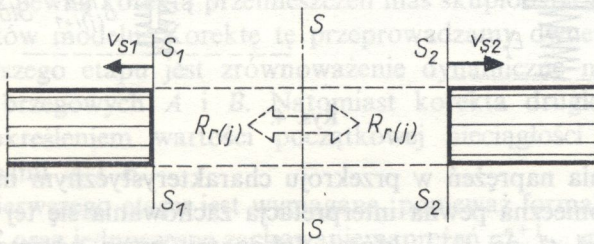
Naprężenie $\sigma_{(j)i}^{n+1}$ określone na podstawie (2.3)₄ będzie wówczas superpozycją naprężeń statycznych i dynamicznych.

Operowanie modelem dyskretnym w rozwiązywaniu zagadnień zderzeń i odłamów wymaga ustalenia właściwych zasad dynamicznego podziału modelu zwartego na fragmenty oraz ich łączenia. Zasady te przedstawimy w następujących punktach.

3. MODELOWANIE DYSKRETNE POWSTAWANIA ODLAMÓW

Odłam powstaje w wyniku wyczerpania nośności na rozciąganie w pewnym przekroju pręta. W przekroju takim tworzy się nieciągłość przemieszczeń, która wyraża się powstaniem dwóch brzegów swobodnych $S_1 - S_1$ i $S_2 - S_2$, rys. 3. Nieciągłość ta rozwija się w fazie rozdzielania. Opis rozprzestrzeniania się fal w powstałych odcinkach i ich kinetyki wymaga:

- 1) ustalenia miejsca i chwili powstania odłamu,
- 2) zmiany warunków ciągłości na odpowiednie warunki brzegowe w miejscu odłamu,
- 3) ustalenia warunków początkowych dla nowo powstałych brzegów swobodnych.

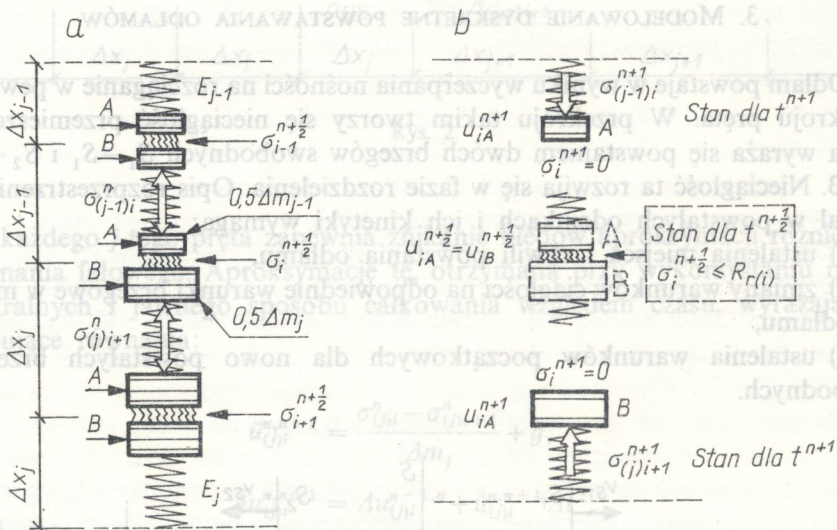


Rys. 3.

Z uwagi na stosowanie metody modelowania dyskretnego do rozwiązania omawianego zagadnienia, zrezygnujemy z opisu różniczkowego właściwego dla pręta o ciągłym rozkładzie masy. Sformułujemy natomiast bezpośrednio zależności różnicowe odpowiadające rozważanemu modelowi dyskretnemu.

Zauważmy, że jest zasadne lokalizowanie odłamów w charakterystycznych przekrojach mas skupionych. Współrzędne tych przekrojów są identyczne ze współzrędnymi przestrzennymi węzłów. Jednorodnie masy skupione modelu dzielą się na połowy. Natomiast masy brzegowe, funkcjonujące na granicy różnych odcinków pręta, doznają podziału na części jednorodne, z których każda jest połową masy skupionej typowej dla danego odcinka. Taka realizacja rozpadu modelu dyskretnego na fragmenty podlegające rozdzielaniu powoduje, że każdy z tych fragmentów zachowuje własności bezbłędnej aproksymacji rozprzestrzeniania się fal w warunkach odbić i załamań. Konieczne jest zatem

wyznaczanie naprężeń, nie tylko w sprężynach modelu dyskretnego, $\sigma_{(j)i}(t^n) = \sigma_{(j)i}^n$, ale również w przekrojach charakterystycznych mas skupionych. Te ostatnie naprężenia mogą być wyznaczone bezbłędnie w chwilach „połówek”, tzn. w chwilach $t^{n+\frac{1}{2}}$. Naprężenia te, $\sigma_i^{n+\frac{1}{2}}$, pozostają stałe do chwili $t^{n+\frac{3}{2}}$ wyłącznie, rys. 4.



Rys. 4.

Dla ustalenia naprężeń w przekroju charakterystycznym masy skupionej modelu jest konieczna pewna interpretacja zachowania się tej masy w przedziale czasu od t^n do t^{n+1} , której dokonamy przez pryzmat zjawisk zachodzących lokalnie w przecie o ciągłym rozkładzie masy. Dla ogólności rozważamy masę brzegową z indeksem „i”, którą w modelu traktuje się jako sztywną. Masa ta odwzorowuje zachowanie pewnego odkształcalnego obszaru pręta ciągłego. Obszar ten jest usytuowany w otoczeniu granicy odcinków o różnej impedancji. Począwszy od chwili t^n w obszar ten wnikają obustronnie fale naprężeń, $\sigma_{(j-1)i}^n$ oraz $\sigma_{(j)i+1}^n$, o stałych intensywnościach na kroku czasowym do chwili t^{n+1} . Powodują one zmiany prędkości masowych i osiągają przekrój zróżnicowania ośrodków w chwili $t^{n+\frac{1}{2}}$. Cała masa rozważanego obszaru jest wówczas podzielona na części A i B, w których prędkości masowe są różne. Prędkości te można wyznaczyć z zasady zachowania pędu odniesionej do każdej z części masy w przedziale czasu od t^n do $t^{n+\frac{1}{2}}$

$$(3.1) \quad v_{iA}^{n+\frac{1}{2}} = v_i^n + \frac{(\sigma_{(j-1)i}^n - \sigma_i^n + 0,5\Delta m_{j-1}g)0,5\Delta t}{0,5\Delta m_{j-1}}$$

$$v_{iB}^{n+\frac{1}{2}} = v_i^n + \frac{(\sigma_i^n - \sigma_{(j)i+1}^n + 0,5\Delta m_j g)0,5\Delta t}{0,5\Delta m_j}$$

Od $t^{n+\frac{1}{2}}$ rozpoczyna się faza współdziałania rozważanych fal. Od granicy różnych ośrodków propaguje się subobszar o jednorodnym rozkładzie prędkości masowej. W chwili t^{n+1} cały rozważany obszar ma tę prędkość. Może być ona wyznaczona jako \mathcal{V}_i^{n+1} w modelu dyskretnym. Będziemy więc uważać, że od $t^{n+\frac{1}{2}}$ w przekroju charakterystycznym masy skupionej ustala się naprężenie $\sigma_i^{n+\frac{1}{2}}$. Jego wartość określamy wykorzystując warunek dynamicznej ciągłości,

$$(3.2) \quad \sigma_i^{n+\frac{1}{2}} = \sigma_{(j-1)i}^n + (\mathcal{V}_{iA}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{V}_i^{n+1})a_{j-1} \rho_{j-1} + 0,5 \Delta m_{j-1} g = \\ = \sigma_{(j)i+1}^n - (\mathcal{V}_{iB}^{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{V}_i^{n+1})a_j \rho_j - 0,5 \Delta m_j g.$$

Początek fazy rozdzielenia i miejsce powstania odłamu ustalamy bezpośrednio po stwierdzeniu

$$(3.3) \quad \sigma_i^{n+\frac{1}{2}} < R_{r(i)}.$$

Za chwilę rozpoczęcia fazy rozdzielenia przyjmujemy t^{n+1} . Począwszy od tej chwili będziemy operować modelem podzielonym na fragmenty. Jest to równoznaczne z zastąpieniem warunku ciągłości w węzle „i” przez odpowiednie warunki brzegowe dla powstałych brzegów swobodnych. Za stan początkowy fragmentów modelu przyjmujemy stan końcowy modelu zwartego w chwili t^{n+1} z pewną korektą przemieszczeń mas skupionych nowo utworzonych fragmentów modelu. Korektę tę przeprowadzamy dwuetapowo. Istotą korekty pierwszego etapu jest zrównoważenie dynamiczne nowych połówkowych mas brzegowych *A* i *B*. Natomiast korekta drugiego etapu jest związana z określeniem wartości początkowej nieciągłości przemieszczeń pomiędzy masami *A* i *B*.

Korekta pierwszego etapu jest wymagana, ponieważ formalne podzielenie masy węzła „i” oraz jednoczesne zachowanie naprężeń $\sigma_{(j-1)i}^{n+1}$, $\sigma_{(j)+1}^{n+1}$ w sprężynach przyległych do tych mas brzegowych, powoduje ich niezrównoważenie dynamiczne. Masy te zrównoważymy, jeżeli w utrzymujących je sprężynach zmniejszymy naprężenie o wartość $\sigma_i^{n+\frac{1}{2}}$. Wartość tę, a nie $R_{r(i)}$, traktujemy jako wywołującą podział modelu na fragmenty. Postępowanie takie w pełni odzwierciedla zjawisko dynamicznego odprężenia zrywającego się pręta — inicjacji fali ściskań do wewnątrz utworzonych odcinków pręta na skutek odbicia od powstałego brzegu swobodnego.

Wymaganą korektę stanu początkowego fragmentów modelu w chwili t^{n+1} zrealizujemy wprowadzając poprawki przemieszczeń mas brzegowych *A* i *B* o wartości

$$(3.4) \quad \delta u_{iA} = \frac{-\sigma_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^2}{\Delta m_{j-1}}, \\ \delta u_{iB} = \frac{-\sigma_i^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^2}{\Delta m_j}.$$

Stąd początkowe przemieszczenia i prędkości mas brzegowych

$$(3.5) \quad u_{iA}^{n+1} = \bar{u}_{iA}^{n+1} - \delta u_{iA},$$

$$u_{iB}^{n+1} = \bar{u}_{iB}^{n+1} + \delta u_{iB},$$

$$(3.6) \quad v_{iA}^{n+1} = \frac{\Delta \bar{u}_{iA}^{n+1} - \delta u_{iA}}{\Delta t},$$

$$v_{iB}^{n+1} = \frac{\Delta \bar{u}_{iB}^{n+1} + \delta u_{iB}}{\Delta t}.$$

Wielkości wyróżnione kreską we wzorach (3.5) i (3.6) oznaczają odpowiednie przemieszczenia i ich przyrosty obliczone w modelu zwartym przed wprowadzeniem poprawek (3.4). Skorygowane naprężenia $\sigma_{(j-1)i}^{n+1}$ oraz $\sigma_{(j)i+1}^{n+1}$ oblicza się według (2.3)₄. Zauważmy, że wartości lokalnych poprawek wg (3.4) są podporządkowane prawidłowemu funkcjonowaniu modelu w sensie naprężeń, a więc i prędkości. Nie są one natomiast poprawne z uwagi na przemieszczenia.

W rzeczywistości, pod wpływem impulsu $0,5\Delta t\sigma_i^{n+1}$, każda z mas połówkowych *A* i *B* dozna przemieszczeń dwa razy mniejszych niż podane poprawki. Odległość pomiędzy tymi masami będzie więc odpowiednio mniejsza. Jej regulację obejmuje korekta drugiego etapu. Będzie ona polegała na globalnym wprowadzeniu poprawek wszystkich mas skupionych nowo utworzonych fragmentów. Poprawki te mają następujące wartości:

dla fragmentu z masą brzegową *A*

$$\delta u = -0,5\delta u_{iA},$$

dla fragmentu z masą brzegową *B*

$$\delta u = 0,5\delta u_{iB}.$$

Omówione zasady zachowują ważność dla przekrojów suchych styków, w których wytrzymałość na rozciąganie jest równa zero.

Przedstawione rozważania dotyczące modelowania odłamów wskazują na pewną osobliwość modelu dyskretnego ujawniającą się w odpowiedzi na pytanie, jaki może być najmniejszy elementarny fragment modelu. Fragmentem tym nie może być pojedyncza masa skupiona z przyległymi częściami sprężyn albo sprężyną usytuowaną jednostronnie. Taki fragment nie ma zdolności prawidłowego odzwierciedlenia istoty ruchu drgającego. Taką cechą ma natomiast fragment elementarny składający się z dwóch mas połówkowych połączonych sprężyną. Masy omawianego fragmentu mają prędkości, które są superpozycją ruchu unoszenia i pewnego ruchu drgającego. Ruch drgający i towarzysząca mu ciągła zmiana energii odkształcenia sprężyny na energię kinetyczną połówek mas i odwrotnie wynika z nieznikania naprężeń, po osiągnięciu których rozpoczyna się faza rozdzielenia. Ilustrację zachowania elementarnego fragmentu podano w przykładzie 1, p. 7.

4. OCENA DOKŁADNOŚCI METODY MODELOWANIA ODLAMÓW

W pracy [5] wykazano, że jeżeli modele dyskretne wewnątrz rozważanych odcinków pręta oraz ich brzegów zostaną skonstruowane z uwzględnieniem warunku bezbłędnej aproksymacji różnicowej (2.2), to analizę ruchu falowego wykona się z dokładnością do błędów zaokrążeń. Jednakże analiza powstawania odłamów z wykorzystaniem modelowania dyskretnego uniemożliwia dokładne wyznaczenie początku rozdzielenia. Początek ten może być wyznaczony z błędem ε_{tr} , którego wartość szacuje się jako

$$(4.1) \quad 0 \leq \varepsilon_{tr} \leq \Delta t.$$

Z błędu ε_{tr} wynika bezpośrednio błąd ε_{x_j} lokalizacji przekroju, w którym powstaje odłam.

Błąd ε_{x_j} zawiera się w przedziale:

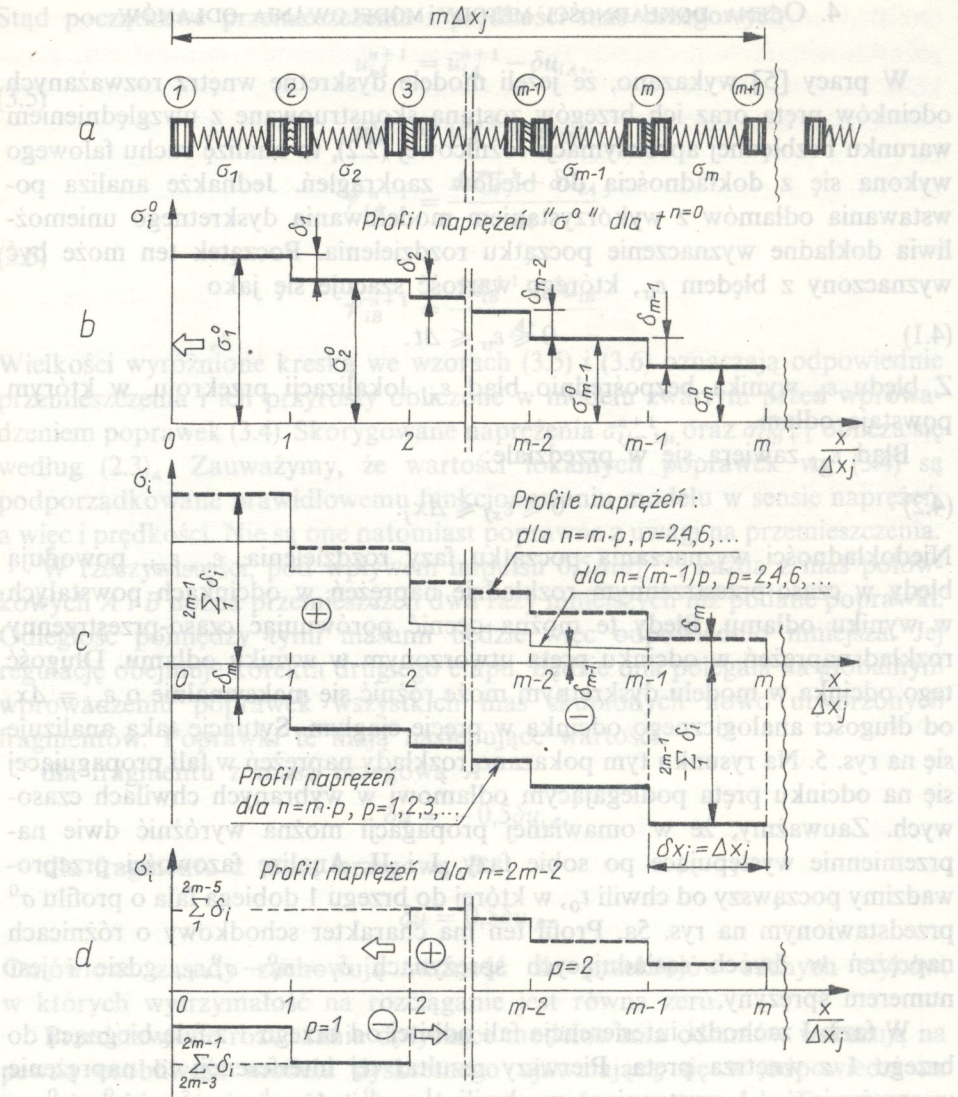
$$(4.2) \quad 0 \leq \varepsilon_{x_j} \leq \Delta x_j.$$

Niedokładności wyznaczania początku fazy rozdzielenia, ε_{tr} , ε_{x_j} , powodują błędy w czaso-przestrzennym rozkładzie naprężeń w odcinkach powstałych w wyniku odłamu. Błędy te można ocenić porównując czaso-przestrzenny rozkład naprężeń w odcinku pręta utworzonym w wyniku odłamu. Długość tego odcinka w modelu dyskretnym może różnić się maksymalnie o $\varepsilon_{x_j} = \Delta x_j$ od długości analogicznego odcinka w przecie ciągłym. Sytuację taką analizuje się na rys. 5. Na rysunku tym pokazano rozkłady naprężeń w fali propagującej się na odcinku pręta podlegającym odładowi w wybranych chwilach czasowych. Zauważmy, że w omawianej propagacji można wyróżnić dwie naprzemiennie występujące po sobie fazy, I i II. Analizę fazowości przeprowadzimy począwszy od chwili t_0 , w której do brzegu 1 dobiega fala o profilu σ^0 przedstawionym na rys. 5a. Profil ten ma charakter schodkowy o różnicach naprężeń w dwóch sąsiadujących sprężynach $\delta_i = \sigma_i^0 - \sigma_{i+1}^0$, gdzie i jest numerem sprężyny.

W fazie I zachodzi interferencja fali odbitej od brzegu 1 z falą biegnącą do brzegu 1 z wnętrza pręta. Pierwszy rezultat tej interferencji to naprężenie w sprężynie $i = 1$ występujące w chwili $t^1 = t^0 + \Delta t$, $\sigma_1^1 = -\delta_1 = \sigma_1^0 - \sigma_2^0$.

Faza I kończy się z chwilą uformowania się odłamu w węźle o numerze m . Jednocześnie rozpoczyna się faza II. W fazie tej następuje interferencja fali odbitej od brzegu m , a uformowanej podczas fazy I, z falą odbitą od brzegu 1. Z chwilą osiągnięcia brzegu 1 przez falę odbitą od brzegu m , rys. 5a, kończy się faza II i rozpoczyna kolejny okres występowania fazy I.

Okres występowania fazy I począwszy od chwili t^1 oznaczymy indeksami $p = 1, 3, 5, \dots$. Natomiast kolejne okresy występowania fazy II indeksami $p = 2, 4, 6, \dots$. W kolejnych fazach I o numerach $p = 3, 5, 7, \dots$, od brzegu 1 będzie odbijała się fala uformowana w fazie II o numerach równych odpowiednio $p = 2, 4, 6, \dots$, a nie fala σ^0 , jak dla $p = 1$. Jednak w wyniku



Rys. 5.

opisanej interferencji zachowuje się profil fali ukształtowany podczas pierwszego okresu występowania fazy I, $p = 1$. Podobnie w kolejnych parzystych okresach otrzymuje się zawsze falę charakteryzującą fazę II. Uwzględniając przedstawione prawidłowości oraz analizując szczegółowo proces falowy w każdej fazie można określić wartości naprężeń w i -tej sprężynie i chwili t^n wg wzoru (4.3):

$$(4.3) \quad \sigma_i^n = (-1)^p \sum_{i_p}^{i_k} \delta_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Kolejne chwile t^n są numerowane począwszy od wymienionej poprzednio chwili t^0 . Dolny wskaźnik sumacyjny i_p do obliczania naprężeń w fazie I wyznacza się ze wzorów (4.4):

$$(4.4) \quad \begin{aligned} i_p &= n - i + 1 && \text{dla } p = 1, \\ i_p &= n - m(p-1) - i + 1 && \text{dla } p = 3, 5, 7, \dots \end{aligned}$$

Natomiast górny wskaźnik sumacyjny – wg wzoru (4.5):

$$(4.5) \quad i_k = i_p + 2(i-1) \quad \text{dla } p = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Odpowiednie wskaźniki sumacyjne i_p, i_k dla fazy II oblicza się z wzorów (4.6):

$$(4.6) \quad \begin{aligned} i_p &= n - m(p-1) - m + i, \\ i_k &= i_p + 2(m-1) && \text{dla } p = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Można zauważyć, że dla i -tej sprężyny lub węzła modelu, czas trwania fazy I, T_i^I , jest różny od czasu trwania fazy II, T_i^{II} . Czasy te można obliczyć z wzorów

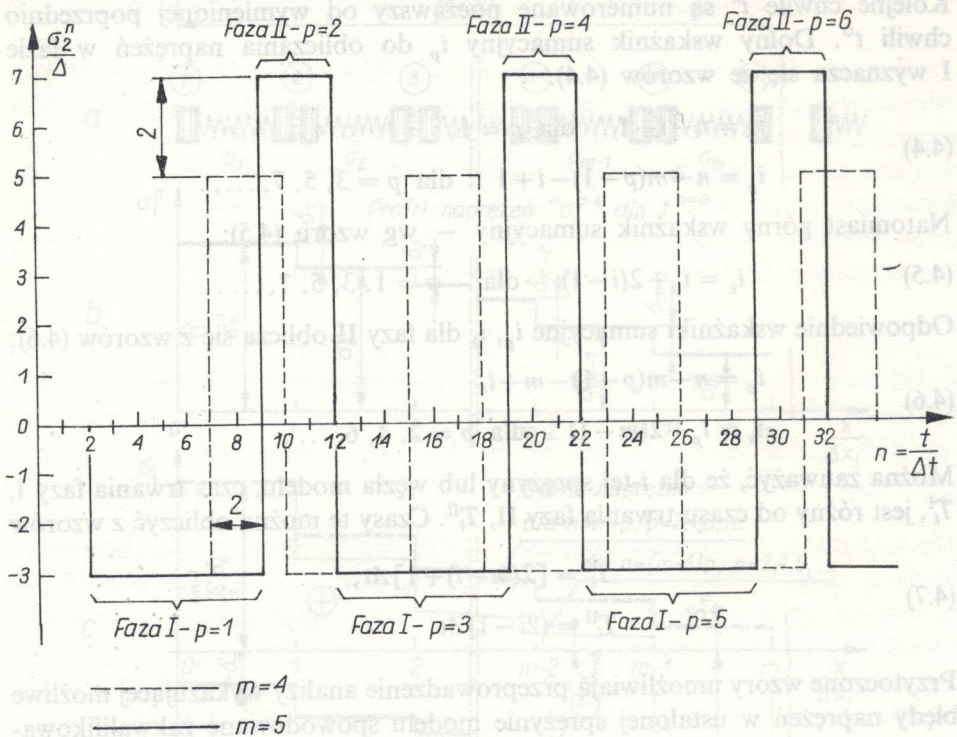
$$(4.7) \quad \begin{aligned} T_i^I &= [2(m-i) + 1] \Delta t, \\ T_i^{II} &= (2i-1) \Delta t. \end{aligned}$$

Przytoczone wzory umożliwiają przeprowadzenie analizy wykazującej możliwe błędy naprężeń w ustalonej sprężynie modelu spowodowane zakwalifikowaniem w procedurze numerycznej miejsca odłamu w węźle o wskaźniku m , albo $m+1$.

Dla przykładu analizowano zmienność naprężeń w czasie dla zadania wyznaczenia odłamu w przecie jednorodnym pod wpływem fali biegnącej do brzegu swobodnego o ustalonej różnicy $\delta_i = \Delta = \text{const}$, $\Delta > 0$. Rozpatrzono przypadki powstania odłamu w węźle $m = 4$ oraz $m+1 = 5$, a naprężenia wyznaczone w sprężynie $i = 2$. Wyniki przedstawiono na rys. 6. Wskazują one, że w czasie trwania fazy I wyniki dla $m = 4$ i $m = 5$ nie wykazują różnicy naprężeń, a tylko różnią się okresem trwania tej fazy, co jest zgodne z ogólną zależnością (4.7)₁. Natomiast fazy II w poszczególnych przypadkach są przesunięte wzajemnie w czasie. Wykazują ten sam okres trwania, ale różnią się intensywnością naprężeń, zawsze o 2Δ . Charakterystyka różnic w fazach I i II dla $m = 4$ i $m = 5$ podana dla sprężyny $i = 2$ jest tożsama dla pozostałych sprężyn.

5. MODELOWANIE ZDERZENIA DWÓCH PRĘTÓW O RÓŻNYCH IMPEDANCJACH

W ujęciu dyskretnym zjawisko zderzenia w sensie lokalnym jest połączeniem połowkowych mas brzegowych dwóch fragmentów modelu dyskretnego, z zachowaniem ilości ruchu. Łącząc te fragmenty modelu na trwałe w fazie zderzenia realizujemy warunek lokalnej ciągłości modelu. Chwilę rozpoczęcia



Rys. 6.

zderzenia określimy na podstawie analizy wzajemnych przemieszczeń końców sąsiadujących prętów. Przemieszczenia te są wynikiem poosiowego ruchu prętów i ruchu falowego w ich wnętrzach. Chwila początkowa t_{zi} fazy zderzenia nie będzie w ogólności zgodna z przyjętą dyskretyzacją czasu. Konieczna jest więc odpowiednia kwalifikacja chwili początku zderzenia dostosowana do dyskretnych punktów na osi czasu. Kwalifikację tę można przeprowadzić zasadniczo dwoma sposobami.

Pierwszy sposób polega na ustaleniu początku zderzenia w chwili t^n , jeżeli w kroku próbnym do chwili następnej t^{n+1} , stwierdzimy, że masy brzegowe rozłącznie funkcjonujących fragmentów modelu mijają się. Sytuację taką charakteryzuje warunek

$$(5.1) \quad u_{iA}^{n+1} - u_{iB}^{n+1} > 0,$$

gdzie u_{iA}^{n+1} , u_{iB}^{n+1} są przemieszczeniami mas brzegowych podlegających zderzeniu. Podane kryterium ustalania chwili zderzenia t_{zi} „przyspiesza” zderzenie w czasie, ponieważ w chwili t^n fragmenty modelu dyskretnego były jeszcze rozdzielone.

W drugim sposobie za chwilę zderzenia t_{zi} przyjmujemy chwilę t^{n+1} .

Połączenie fragmentów modelu w model zwarty jest wówczas „opóźnione”.

Obydwa sposoby umożliwiają określenie chwili zderzenia z niedomiarem albo nadmiarem, co najwyżej Δt , tzn.:

$$t^n \leq t_{zi} \leq t^{n+1}.$$

Przyspieszenie zderzenia realizowane przy stosowaniu sposobu pierwszego, albo jego opóźnienie związane ze sposobem drugim, wymagają jednoczesnego wprowadzenia poprawek przemieszczeń dla wszystkich węzłów masowych modelu dyskretnego jednego z prętów. Wartości tych poprawek są równe:

$$(5.2)_1 \quad \delta u_I = u_{iA}^n - u_{iB}^n,$$

dla drugiego sposobu

$$(5.2)_2 \quad \delta u_{II} = u_{iA}^{n+1} - u_{iB}^{n+1}.$$

Można zauważyć, że istnieje trzeci sposób wyznaczania chwili t_{zi} , w którym dokonujemy wyboru spośród obydwu sposobów kierując się kryterium najmniejszej poprawki przemieszczeń

$$(5.3) \quad \delta u = \min \{ |\delta u_I|, |\delta u_{II}| \}.$$

Wprowadzenie tych poprawek do stanu przemieszczeń wszystkich mas skupionych powoduje dosunięcie fragmentów modelu. Korekcie nie podlegają chwilowe stany prędkości i naprężeń. Dlatego też w chwili zderzenia t_{zi} nowo utworzona masa brzegowa składa się z połówek, które mają różne prędkości, v_{iA} i v_{iB} . Nieciągłość tych prędkości musi zaniknąć na początkowym kroku zderzenia trwającym od t_{zi} do $t_{zi} + \Delta t$. Prędkość zderzenia można wyznaczyć z zasady zachowania pędu,

$$(5.4) \quad v_{zi}(t_{zi} + \Delta t) = \frac{0,5(\Delta m_j v_{iA} + \Delta m_{j+1} v_{iB})}{\Delta m_{bi}} + \frac{\Delta \sigma_i(t_{zi}) \Delta t}{\Delta m_{bi}} + g \Delta t,$$

gdzie

$$\Delta \sigma_i(t_{zi}) = \sigma_{(j)i}(t_{zi}) - \sigma_{(j+1)i+1}(t_{zi}),$$

$$\Delta m_{bi} = 0,5(\Delta m_j + \Delta m_{j+1}).$$

Wykorzystując (2.2) i (2.3) w (5.4) otrzymamy

$$(5.5) \quad v_{zi} = \frac{\alpha_j v_{iB} + v_{iA}}{\alpha_j + 1} + \frac{2 \Delta \sigma_i(t_{zi})}{a_j \varrho_j (\alpha_j + 1)} + g \Delta t,$$

gdzie

$$\alpha_j = \frac{a_{j+1} \varrho_{j+1}}{a_j \varrho_j}.$$

Pierwszy człon wzoru (5.5) wyraża wpływ prędkości masowych na prędkość zderzenia. Drugi człon wyraża wpływ zderzenia fal naprężeń na granicy odcinków o różnej impedancji. Trzeci człon ujmuje wpływ sił ciężkości z uwagi na analizowane sytuacje zderzeń pionowych.

Naprężenie w przekroju zderzenia dla chwili t_{zi} jest równe

$$(5.6) \quad \sigma_{zi} = \frac{2[\alpha_j \sigma_{(j)}(t_{zi}) + \sigma_{(j+1)}(t_{zi})] + (\mathcal{V}_{iA} - \mathcal{V}_{iB})\alpha_{j+1}\varrho_{j+1}}{\alpha_j + 1}$$

W poprawnie funkcjonującym modelu dyskretnym naprężenie zderzenia σ_{zi} powinno być bezbłędnie przekazane do sprężyn utrzymujących nowo powstałą pełną masę brzegową na koniec kroku zderzenia, tj. $t_{zi} + \Delta t$. Transmisję tych naprężeń do wnętrza obu fragmentów modelu dyskretnego zrealizujemy dokonując przemieszczenia omawianej masy brzegowej.

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \Delta u_i^{n,n+1} &= \Delta u_j^{n-1,n} + (\mathcal{V}_{zi} - \mathcal{V}_{iA})\Delta t, \\ u_i^{n+1} &= u_j^n + \Delta u_i^{n,n+1} \end{aligned}$$

Wzory (5.7) są słuszne dla pierwszego sposobu określenia chwili początkowej fazy zderzenia, tzn. $t_{zi} = t^n$. Dla drugiego sposobu wskaźnik n w (5.7) należy zastąpić wskaźnikiem $n+1$, a wskaźnik $n+1$ odpowiednio przez $n+2$. Funkcjonowanie pozostałych mas skupionych modelu od początku fazy zderzenia jest naturalne dla rozważanego modelu dyskretnego. Konieczne jest tylko wprowadzenie poprawek przemieszczeń δu zgodnie z (5.2) w chwili zderzenia.

6. OCENA DOKŁADNOŚCI MODELOWANIA ZDERZENIA

Źródłem błędów zderzenia jest niemożność dokładnego określenia chwili zderzenia t_{zi} z uwagi na dyskretyzację czasu. Chwila t_{zi} podlega kwalifikacji jako chwila t^n albo t^{n+1} wg proponowanych sposobów. Fakt ten rzutuje na miejsce zderzenia, jego prędkość oraz naprężenia zderzenia. Operacja połączenia fragmentów modelu dyskretnego wiąże się z wprowadzeniem poprawek przemieszczeń jednocześnie wszystkich mas skupionych jednego z fragmentów modelu. Powoduje to pewną zmianę energii potencjalnej sił ciężkości. Wymienione błędy nie występowałyby, gdyby chwila zderzenia dokładnie pokrywała się z chwilą dyskretną w analizie numerycznej. Opis fazy zderzenia byłby wówczas bezbłędny.

Błąd określenia czasu zderzenia implikuje błąd naprężenia zderzenia σ_{zi} w przekroju suchego styku. Błąd wyznaczenia σ_{zi} można oszacować mając na uwadze błędy zaokrągleń generowane w każdym komputerze. W ekstremalnej sytuacji na skutek zaokrągleń chwila zderzenia może być przyjęta jako chwila przesunięta w przód albo cofnięta o krok czasowy Δt . Taka sytuacja może zdarzyć się w każdym z podanych sposobów określania chwili t_{zi} .

Naprężenie zderzenia może przyjąć jedną z następujących wartości:

$$(6.1) \quad \sigma_{zi}^n = \frac{2(\alpha_j \sigma_{(j)i}^n + \sigma_{(j+1)i+1}^n)}{\alpha_j + 1} + \frac{(\mathcal{V}_{iA}^n - \mathcal{V}_{iB}^n) a_{j+1} \rho_{j+1}}{\alpha_j + 1},$$

$$\sigma_{zi}^{n+1} = \sigma_{zi}^n + \frac{2(\alpha_j \sigma_{(j)i}^{n+1} + \sigma_{(j+1)i+1}^{n+1})}{\alpha_j + 1}.$$

Bezwzględna wartość możliwego maksymalnego błędu naprężenia zderzenia jest więc równa

$$(6.2) \quad \max \varepsilon_{\sigma_{zi}} = \sigma_{zi}^{n+1} - \sigma_{zi}^n = \frac{2(\alpha_j \sigma_{(j)i}^{n+1} + \sigma_{(j+1)i+1}^{n+1})}{\alpha_j + 1}.$$

W szczególnych przypadkach niejednorodności materiałów otrzymujemy

$$(6.3) \quad \max \varepsilon_{\sigma_{zi}} = \begin{cases} \sigma_{(j)i}^{n+1} + \sigma_{(j+1)i+1}^{n+1} & \text{dla } \alpha_j = 1, \\ 2\sigma_{(j)i}^{n+1} & \text{dla } \alpha_j \rightarrow \infty, \end{cases}$$

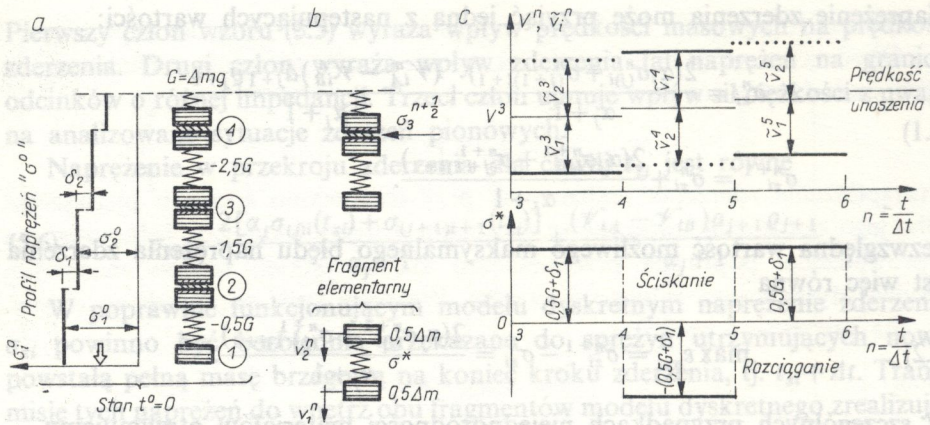
Należy podkreślić, że zagęszczenie podziału czaso-przestrzeni zwiększa dokładność rozwiązania numerycznego. Może jednak nie mieć wpływu na generowanie się błędów naprężeń zderzenia, które to wartości są szacowane na podstawie (6.3). Wrażliwość analizowanych zagadnień na gęstość podziału czaso-przestrzeni przedstawiono w rozwiązaniach zadań szczegółowych.

7. PRZYKŁADY ANALIZ NUMERYCZNYCH

A. Analiza odłamów

Wykorzystanie modelowania dyskretnego do opisu powstania odłamów w prętach sprężysto-kruchych na rozciąganie zilustrujemy na dwóch przykładach. Przykład pierwszy dobrano tak, aby było możliwe prześledzenie zachowania elementarnego fragmentu modelu utworzonego dynamicznie jako odłam. Przykład drugi demonstruje dużą efektywność stosowanej metody modelowania dyskretnego w przypadku odłamów wielokrotnych.

PRZYKŁAD 1. Rozpatrujemy pręt jednorodny usytuowany pionowo. Pręt jest zawieszony w górnym przekroju, a jego brzeg dolny jest swobodny. Siły ciężkości wywołują wstępne naprężenie pręta. W kierunku brzegu swobodnego rozprzestrzenia się fala naprężeń. Fragment modelu dyskretnego pręta i profil rozprzestrzeniającej się fali naprężeń „ σ^0 ” podano na rys. 7a. Parametry omawianej fali można tak dobrać, że w wyniku jej odbicia od brzegu swobodnego powstanie odłam wielkości jednego elementarnego fragmentu modelu dyskretnego, rys. 7b. Będziemy analizować zachowanie takiego fragmentu. Dla przyjętych założeń odłam w masie przyskrajnej zostaje ufor-



Rys. 7.

mowany w chwili $t^3 = 3\Delta t$, w wyniku stwierdzenia, że naprężenie $\sigma_{i=2}^{2+\frac{1}{2}} < R_r$.

W omawianej sytuacji fragment elementarny jest obdarzony energią ruchu postępowego oraz drgającego. Odpowiednio prędkości mas połówkowych są \mathcal{V}_1^n i \mathcal{V}_2^n . Prędkości te można ustalić na podstawie zasad i zależności szczegółowo omówionych w p. 2 i 3. Każdą z tych prędkości można rozłożyć na prędkość unoszenia V^n i prędkość ruchu drgającego $\tilde{\mathcal{V}}_i^n$; $\mathcal{V}_i^n = V^n + \tilde{\mathcal{V}}_i^n$, gdzie $i = 1, 2$ oznaczają numery mas połówkowych. Uwzględniając fakt, że $\tilde{\mathcal{V}}_2^n = -\tilde{\mathcal{V}}_1^n$, otrzymamy

$$\tilde{\mathcal{V}}_i^n = (-1)^n (\delta_1 + 0,5\Delta mg) \frac{\Delta t}{\Delta m}, \quad n = 3, 4, 5, 6, \dots$$

Stąd prędkość unoszenia będzie równa:

$$V^n = [2\sigma_1^0 - \delta_1 + (n-2,5)\Delta mg] \frac{\Delta t}{\Delta m}, \quad n = 3, 4, 5, 6, \dots$$

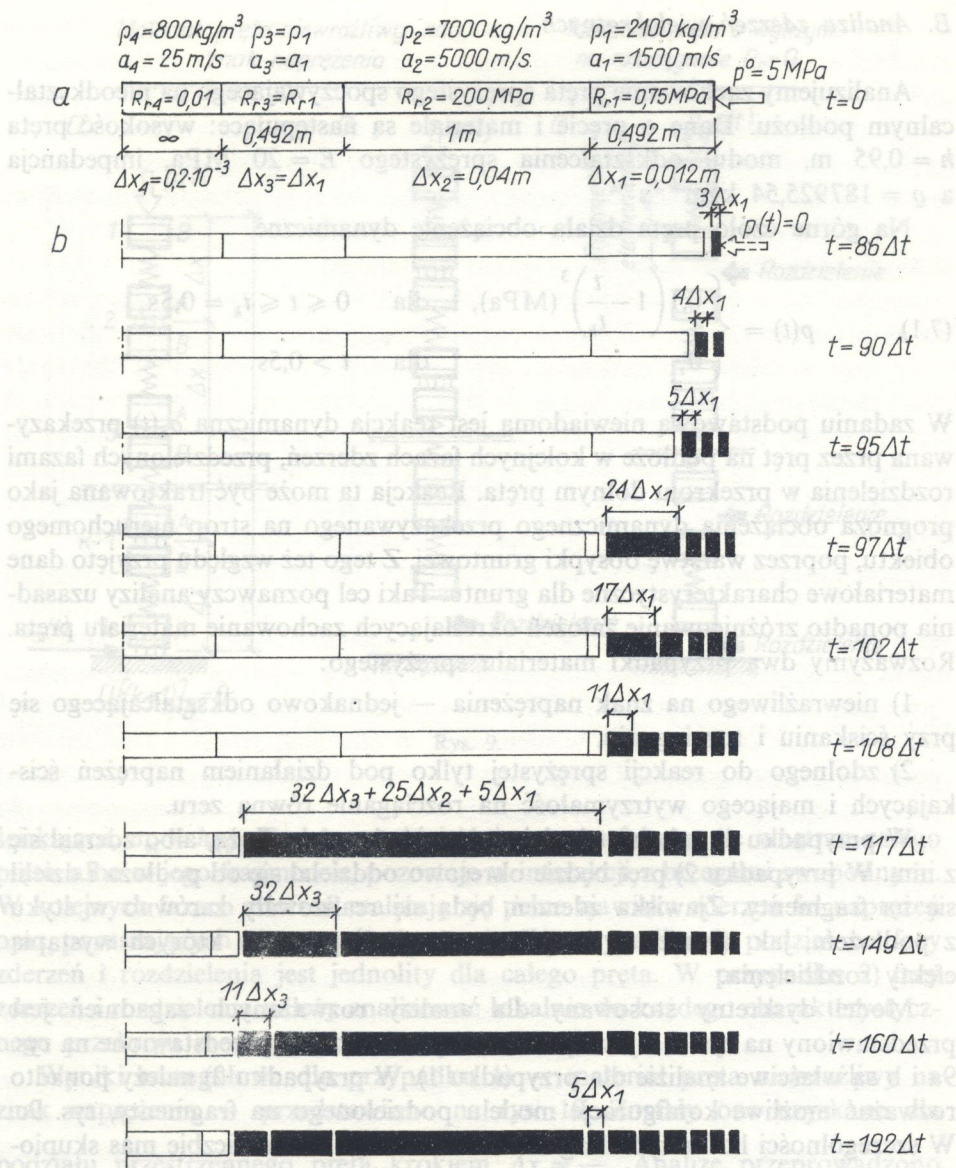
Z ruchem drgającym mas połówkowych elementarnego fragmentu związana jest odpowiednia zmiana naprężenia σ^* w sprężynie łączącej te masy:

$$\sigma^* = (\tilde{\mathcal{V}}_2^n - \tilde{\mathcal{V}}_1^n) \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Zmienność prędkości V^n , $\tilde{\mathcal{V}}_1^n$, $\tilde{\mathcal{V}}_2^n$ oraz naprężenia σ^* zilustrowano na rys. 7c.

PRZYKŁAD 2. Rozpatrujemy pręt półnieskończony, odcinkami jednorodny, rys. 8a. Wyboru stałych materiałowych dla poszczególnych odcinków pręta dokonano kierując się tylko względami analizy teoretycznej. Koniec pręta jest obciążony ciśnieniem zmiennym w czasie

$$p(t) = \begin{cases} 5 \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^5 & (\text{MPa}), \quad t_k = 0,001 \text{ s} \quad \text{dla} \quad t \leq 680 \mu\text{s}, \\ 0, & \text{dla} \quad t > 680 \mu\text{s}. \end{cases}$$



Rys. 8.

Ciągłą formę obciążenia $p(t)$ zastępujemy formą schodkową dostosowaną do funkcjonowania modelu dyskretnego, zgodnie z zasadami podanymi w pracy [5].

Przyjmując $\Delta t = 8 \mu\text{s}$ uzyskujemy czaso-przestrzenną konfigurację odłamów, jak to pokazano na rys. 8b. Zwraca uwagę fakt, że niektóre wydzielone odłamami odcinki doznały podziału wtórnego.

B. Analiza zderzeń wielokrotnych

Analizujemy zachowanie pręta sprężystego spoczywającego na nieodkształcalnym podłożu. Dane o pręcie i materiale są następujące: wysokość pręta $h = 0,95$ m, moduł odkształcenia sprężystego $E = 20$ MPa, impedancja $\rho = 187925,54$ $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Na górne czoło pręta działa obciążenie dynamiczne

$$(7.1) \quad p(t) = \begin{cases} 0,1 \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)^3 \text{ (MPa)}, & \text{dla } 0 \leq t \leq t_k = 0,5\text{s}, \\ 0, & \text{dla } t > 0,5\text{s}. \end{cases}$$

W zadaniu podstawową niewiadomą jest reakcja dynamiczna $\sigma_s(t)$ przekazywana przez pręt na podłoże w kolejnych fazach zderzeń, przedzielonych fazami rozdzielania w przekroju dolnym pręta. Reakcja ta może być traktowana jako prognoza obciążenia dynamicznego przekazywanego na strop nieruchomego obiektu, poprzez warstwę obsypki gruntowej. Z tego też względu przyjęto dane materiałowe charakterystyczne dla gruntu. Taki cel poznawczy analizy uzasadnia ponadto zróżnicowanie założeń określających zachowanie materiału pręta. Rozważymy dwa przypadki materiału sprężystego:

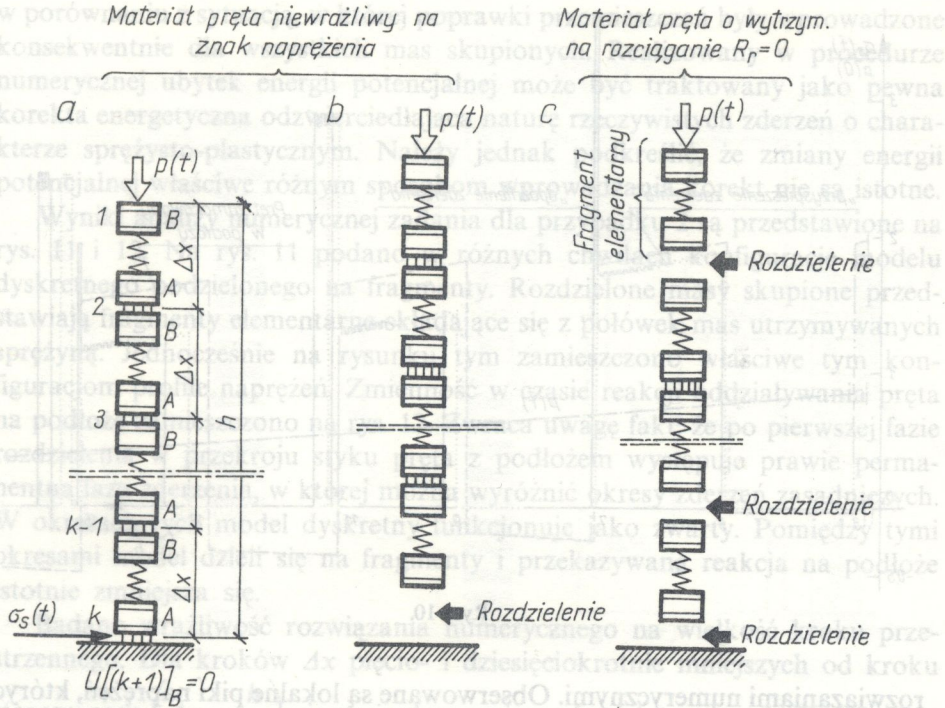
1) niewrażliwego na znak naprężenia — jednakowo odkształcającego się przy ściskaniu i rozciąganiu,

2) zdolnego do reakcji sprężystej tylko pod działaniem naprężeń ścisających i mającego wytrzymałość na rozciąganie równą zeru.

W przypadku 1) cały pręt będzie odrywał się od podłoża, albo zderzał się z nim. W przypadku 2) pręt będzie okresowo oddzielał się od podłoża i dzielił się na fragmenty. Zjawiska zderzeń będą się realizowały zarówno w styku z podłożem, jak również w innych przekrojach pręta, w których wystąpią efekty rozdzielania.

Model dyskretny stosowany dla analizy rozważanych zagadnień jest przedstawiony na rys. 9. Sytuacje kinematyczne modelu przedstawione na rys. 9a i b są właściwe analizie dla przypadku 1). W przypadku 2) należy ponadto rozważać możliwe konfiguracje modelu podzielonego na fragmenty, rys. 9c. W szczególności liczba tych fragmentów może być równa liczbie mas skupionych pełnego modelu dyskretnego zadania. Elementarnym fragmentem, nie podlegającym podziałowi, nie jest jednak masa skupiona modelu, ale — jak wskazano poprzednio — układ połówek mas połączonych sprężyną.

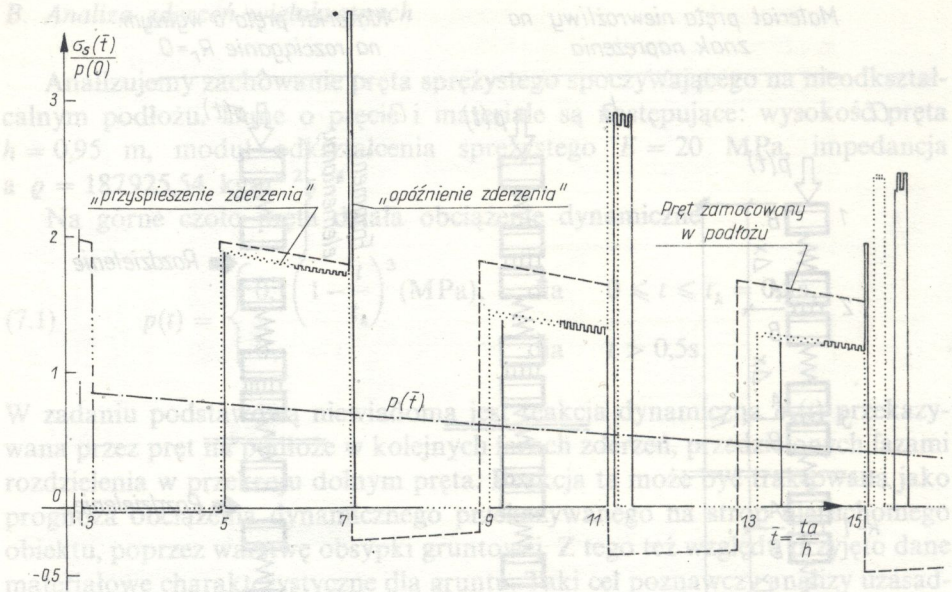
W strukturze fazowej zadania występują fazy zderzeń i rozdzielania. Analizę zadania rozpoczyna się w tym przypadku od szczególnej fazy zderzenia. Zderzenia z nieodkształcalną przegrodą doznaje czoło fali naprężeń. W fazie tej nie występuje efekt zderzenia masowego. Pierwsza faza rozdzielania rozpoczyna się bezpośrednio po wystąpieniu w przekroju styku pręta z przegrodą naprężeń rozciągających o wartości przekraczającej statyczne naprężenie



Rys. 9.

ściskające, $\sigma_{st} = h\sigma_g$. Podczas rozdzielania proces falowy we wnętrzu całego pręta, albo w jego fragmencie, pozostaje w interakcji z brzegami swobodnymi. W kolejnych fazach zderzeń realizują się pełne zjawiska zderzeń fal naprężeń oraz poruszających się mas brzegowych. W przypadku 1) podział na fazy zderzeń i rozdzielania jest jednolity dla całego pręta. W przypadku 2) fazy zderzeń i rozdzielania należy analizować lokalnie do każdego charakterystycznego przekroju modelu dyskretnego.

Wyniki szczegółowe dla przypadku 1) – materiał pręta niewrażliwy na znak naprężenia – przedstawiono na rys. 10. Zostały one uzyskane dla podziału przestrzennego pręta krokiem $\Delta x = \frac{h}{19}$. Analizę przeprowadzono z wykorzystaniem obu sposobów określania chwil początkowych zderzeń. Linią kropkowaną oznaczono rozwiązanie dla sposobu „przyspieszania” zderzeń. Linią ciągłą podano rozwiązanie dla sposobu „opóźniania” zderzeń. Dla porównania linią przerywaną przedstawiono rozwiązanie dla innego zadania, w którym pręt sprężysty jest zamocowany w podłożu i nie występują wówczas efekty rozdzielania. Rozwiązania oznaczone liniami ciągłą i kropkowaną mają zasadniczo ten sam charakter. Naturalną konsekwencją obu sposobów wyznaczenia chwil zderzeń są narastające przesunięcia w czasie pomiędzy



Rys. 10.

rozwiązaniami numerycznymi. Obserwowane są lokalne piki naprężeń, których występowanie stwierdza się w identycznych chwilach również i po zmianie podziału przestrzennego. Chwile występowania tych pików zależą tylko od sposobu określania początku zderzenia. W porównaniu z rozwiązaniem dla pręta utwierdzonego w podłożu, rozwiązania wyznaczone dla pręta podlegającego rozdzieleniu charakteryzują się rozwojem aperiodyczności faz zderzeń.

W analizie numerycznej dla zadania w przypadku 2) — materiał pręta nie jest zdolny do przenoszenia naprężeń rozciągających — stwierdzono, że z uwagi na bardzo dużą liczbę zderzeń realizujących się podczas rozwiązywania takiego zadania, sposób „opóźniania” zderzeń i konsekwentnego wprowadzania korekty przemieszczeń dla wszystkich mas modelu, nie prowadzi do poprawnych wyników. Wprowadzenie takich poprawek przemieszczeń powoduje ciągle „rozsuwanie” fragmentów modelu. W konsekwencji wydłuża to fazy rozdzielania. Natomiast bardziej wiarygodne wyniki uzyskuje się stosując sposób „przyspieszenia” zderzeń. W analizie sposób ten zmodyfikowano w stosunku do podanego w p.5. Modyfikacja polegała na tym, że odstąpiono od konsekwentnego wprowadzenia poprawek przemieszczeń kolejno dla wszystkich mas każdego z fragmentów modelu usytuowanych ponad każdym przekrojem zderzenia w danej chwili czasowej. Poprawki wprowadzono tylko w odniesieniu do mas skupionych tego fragmentu, dla którego stwierdzono, że będzie podlegał zderzeniu z fragmentem usytuowanym poniżej. Przemieszczenia mas fragmentów położonych wyżej, a nie podlegających zderzeniom, nie korygowano. Tym samym mniejszy był ubytek energii potencjalnej sił ciężkości

w porównaniu z sytuacją, w której poprawki przemieszczeń były wprowadzone konsekwentnie dla wszystkich mas skupionych. Realizowany w procedurze numerycznej ubytek energii potencjalnej może być traktowany jako pewna korekta energetyczna odzwierciedlająca naturę rzeczywistych zderzeń o charakterze sprężysto-plastycznym. Należy jednak podkreślić, że zmiany energii potencjalnej właściwe różnym sposobom wprowadzania korekt nie są istotne.

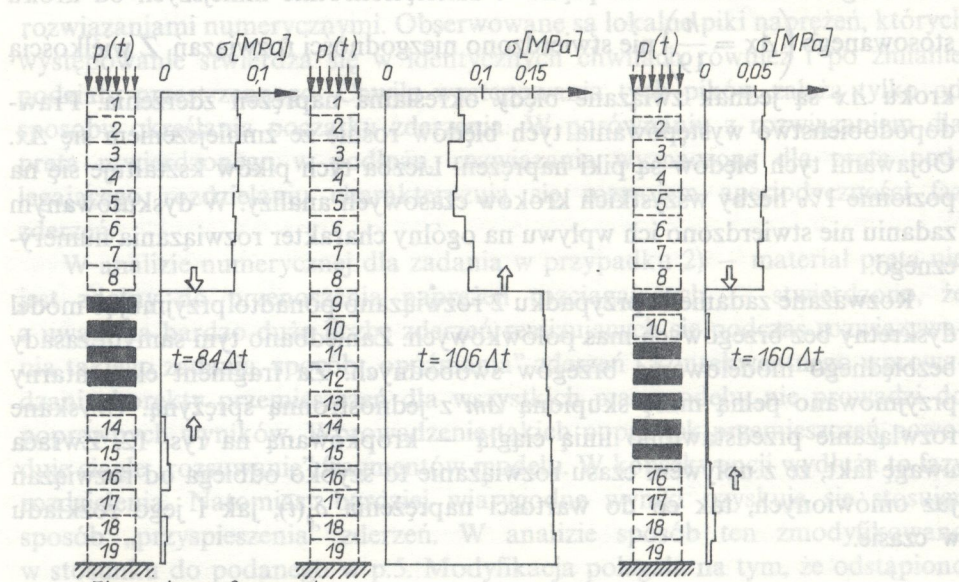
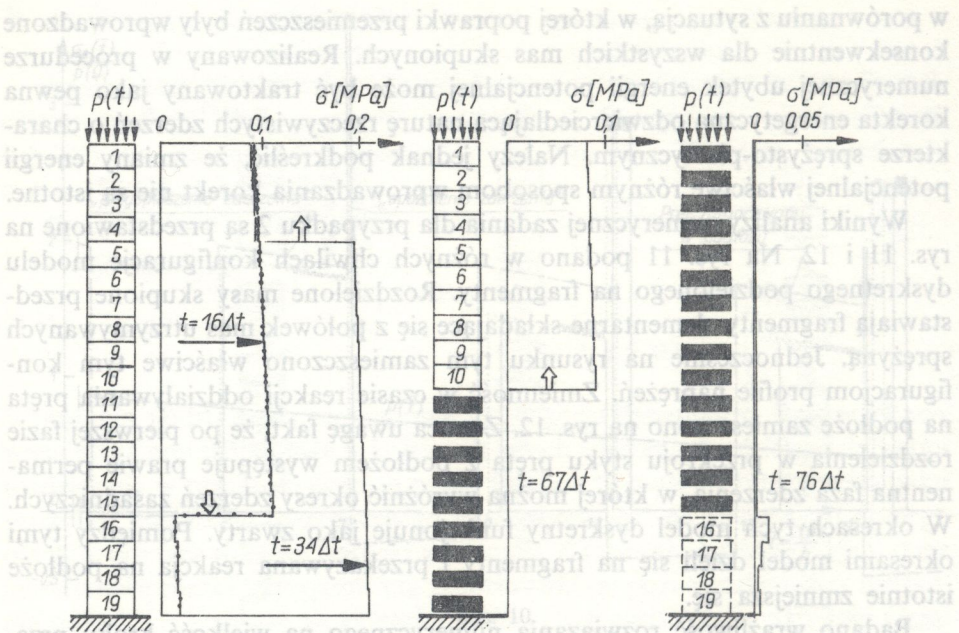
Wyniki analizy numerycznej zadania dla przypadku 2 są przedstawione na rys. 11 i 12. Na rys. 11 podano w różnych chwilach konfiguracje modelu dyskretnego podzielonego na fragmenty. Rozdzielone masy skupione przedstawiają fragmenty elementarne składające się z połówek mas utrzymywanych sprężyną. Jednocześnie na rysunku tym zamieszczono właściwe tym konfiguracjom profile naprężeń. Zmienność w czasie reakcji oddziaływania pręta na podłoże zamieszczono na rys. 12. Zwraca uwagę fakt, że po pierwszej fazie rozdzielenia w przekroju styku pręta z podłożem występuje prawie permanentna faza zderzenia, w której można wyróżnić okresy zderzeń zasadniczych. W okresach tych model dyskretny funkcjonuje jako zwarty. Pomiedzy tymi okresami model dzieli się na fragmenty i przekazywana reakcja na podłoże istotnie zmniejsza się.

Badano wrażliwość rozwiązania numerycznego na wielkość kroku przestrzennego. Dla kroków Δx pięcio- i dziesięciokrotnie mniejszych od kroku stosowanego ($\Delta x = \frac{h}{19}$) nie stwierdzono niezgodności rozwiązań. Z wielkością kroku Δx są jednak związane błędy określania naprężeń zderzenia. Prawdopodobieństwo występowania tych błędów rośnie ze zmniejszeniem się Δx . Objawami tych błędów są piki naprężeń. Liczba tych pików kształtuje się na poziomie 1% liczby wszystkich kroków czasowych analizy. W dyskutowanym zadaniu nie stwierdzono ich wpływu na ogólny charakter rozwiązania numerycznego.

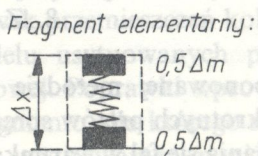
Rozważane zadanie w przypadku 2 rozwiązano ponadto przyjmując model dyskretny bez brzegowych mas połówkowych. Zaniedbano tym samym zasady bezbłędnego modelowania brzegów swobodnych. Za fragment elementarny przyjmowano pełną masę skupioną Δm z jednostronną sprężyną. Uzyskane rozwiązanie przedstawiono linią ciągłą — kropkowaną na rys. 12. Zwraca uwagę fakt, że z upływem czasu rozwiązanie to szybko odbiega od rozwiązań już omówionych, tak co do wartości naprężenia $\delta_s(\bar{t})$, jak i jego rozkładu w czasie.

8. ZAKOŃCZENIE

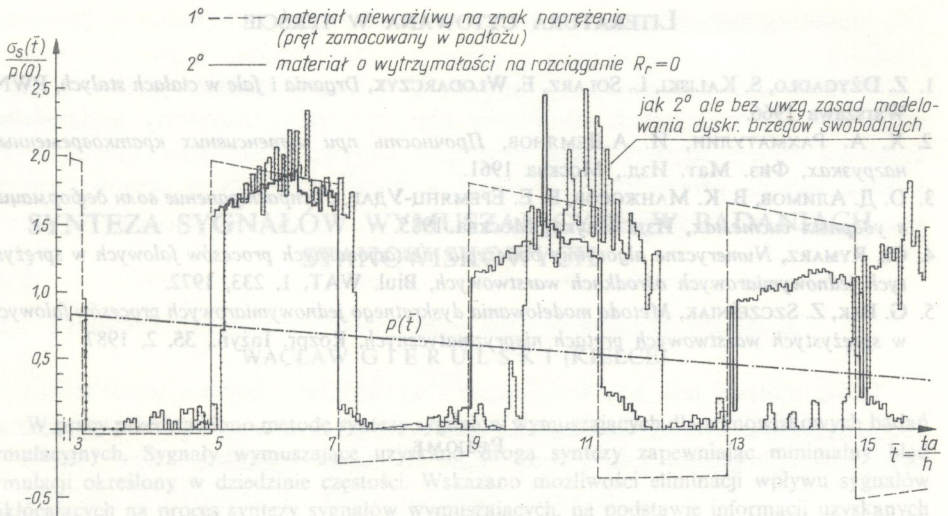
W zaproponowanej metodzie modelowania dyskretnego odłamów oraz zderzeń wielokrotnych prętów sprężystych wykorzystano zasady modelowania rozprzestrzeniania się fal w warunkach odbić i załamania w prętach na granicach różnych ośrodków [5]. Zaproponowano sposób podziału modelu na fragmenty uwzględniając specyfikę zjawisk falowych realizujących się w pręcie o ciągłym



Elementarne fragmenty:
 ■ w fazie rozdzielenia
 □ w fazie kolejnego zderzenia



Rys. 11.
 [172]



Rys. 12.

rozkładzie masy oraz wszelkie ograniczenia konstytutywne modelu dyskretnego. Podano właściwe zasady wymagane dla opisu dyskretnego zjawiska zderzenia i powstawania odłamów.

W przypadkach analizowanych rozdzieleni i zderzeń wielokrotnych, zasadniczym elementem potencjalnie bezbłędno ujęcia dyskretnego są masy poławkowe modelu. Funkcjonują one jako modelowe brzegi swobodne, albo jako części mas brzegowych modelujących zachowanie się granicy różnych materiałów w pręcie. One to umożliwiają podział modelu zwartego na fragmenty i dynamiczne łączenie tych fragmentów. W konsekwencji elementarnym fragmentem nie podlegającym podziałowi, a mającym wszystkie cechy modelu globalnego, jest układ połówek mas skupionych połączonych sprężyną. W innych pracach wykorzystujących podział pręta na masy skupione nie proponowano tych mas poławkowych. Dlatego niemożliwe było uzyskanie poprawnych opisów odbijania i załamывania fal naprężeń oraz zderzeń wielokrotnych.

Opis rozprzestrzeniania się fal w warunkach powstawania odłamów i zderzeń jest dokładny w tym sensie, że model i jego fragmenty zachowują cechę bezbłędnej aproksymacji różnicowej. Błędy zaokrągleń generowane w komputerze oraz dyskretny charakter analizy w czaso-przestrzeni powodują niedokładności wyznaczania miejsc odłamów i zderzeń fragmentów. Dokonano oceny tych niedokładności. Generowane niedokładności mogą być zmniejszone przez zagęszczenie podziału przestrzennego.

Zamieszczone w pracy przykłady analiz numerycznych wskazują na bardzo dużą efektywność metody w opisie odłamów i zderzeń wielokrotnych, których liczność może być praktycznie nieograniczona.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
2. X. A. РАХМАТУЛИН, И. А. ДЕМЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Физ. Мат. Изд., Москва 1961.
3. О. Д. АЛИМОВ, В. К. МАНЖОСОВ, В. Е. ЕРЕМЯНЦ-УДАР, *Распространение волн деформаций в ударных системах*, Изд. Наука, Москва 1985.
4. Cz. RYMARZ, *Numeryczne algorytmy obliczenia niestacjonarnych procesów falowych w sprężystych jednowymiarowych ośrodkach warstwowych*, Biul. WAT, 1, 233, 1972.
5. G. BĄK, Z. SZCZEŚNIAK, *Metoda modelowania dyskretnego jednowymiarowych procesów falowych w sprężystych warstwowych prętach niepryzmatycznych*, Rozpr. Inżyn., 35, 2, 1987.

РЕЗЮМЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОТКОЛОВ И МНОГОКРАТНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ В УПРУГО-ХРУПКИХ НА РАСТЯЖЕНИЕ СТЕРЖНЯХ

В работе анализируется возникновение отколов и многократные столкновения, стержней, отрезками однородных, с учетом волновых процессов. Использована дискретная модель, состоящая из сосредоточенных масс соединенных пружинами. Приведены общие принципы разделения исходной модели на фрагменты и определены принципы столкновения этих фрагментов. Применение метода иллюстрировано примерами.

SUMMARY

MODELLING OF SPLINTERS AN MULTIPLE COLLISIONS IN ELASTIC-BRITTLE BARS SUBJECT TO TENSION

Splintering and multiple collisions occurring in piecewise homogenous bars subject to tension are analysed, wave processes being taken into consideration. A discrete model consisting of lumped masses interconnected by springs is used. General principles concerning the bar fragmentation and internal collision processes are given. Numerical examples are presented.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 lutego 1988 r.