

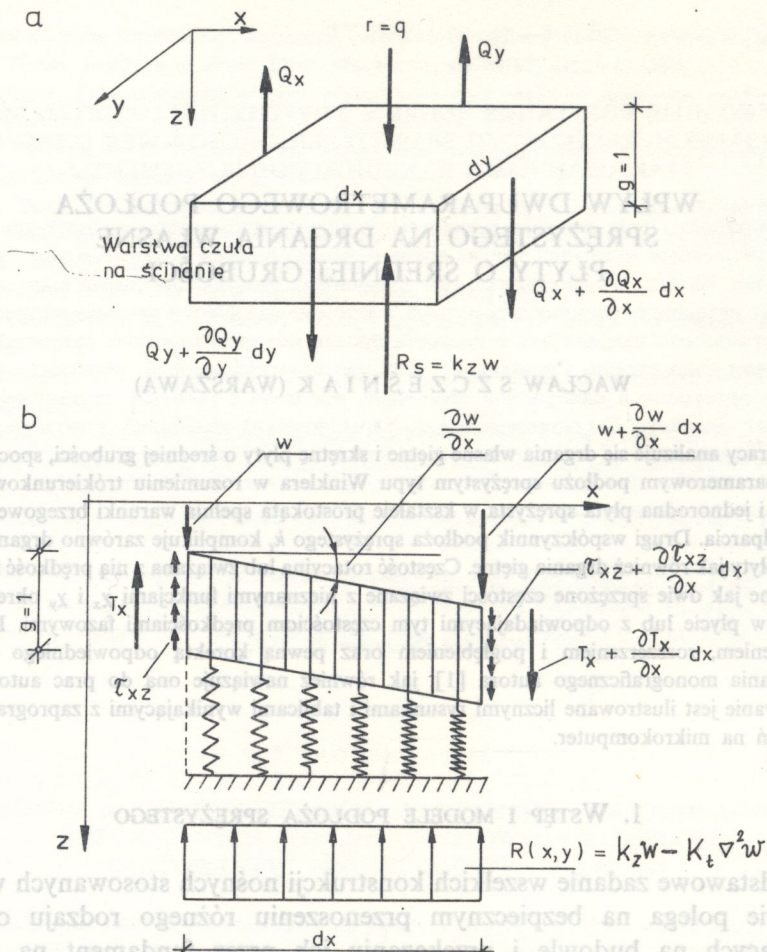
WPLYW DWUPARAMETROWEGO PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO NA DRGANIA WŁASNE PLYTY O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

WACŁAW SZCZEŚNIAK (WARSZAWA)

W pracy analizuje się drgania własne giętne i skrętne płyty o średniej grubości, spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym typu Winklera w rozumieniu trójkierunkowym. Izotropowa i jednorodna płyta sprężysta w kształcie prostokąta spełnia warunki brzegowe swobodnego podparcia. Drugi współczynnik podłoża sprężystego k , komplikuje zarówno drgania własne skrętne płyty jak również drgania giętne. Częstota rotacyjna lub związana z nią prędkość fazowa są takie same jak dwie sprzężone częstoty związane z nieznanymi funkcjami χ_x i χ_y określającymi ścinanie w płycie lub z odpowiadającymi tym częstotom prędkościami fazowymi. Praca jest uzupełnieniem, rozszerzeniem i pogłębieniem oraz pewną korektą odpowiedniego rozdziału opracowania monograficznego autora [1], jak również nawiązuje ona do prac autora [2-4]. Opracowanie jest ilustrowane licznymi rysunkami i tablicami wynikającymi z zaprogramowania rozwiązań na mikrokomputer.

1. WSTĘP I MODELE PODŁOŻA SPRĘŻYSTEGO

Podstawowe zadanie wszelkich konstrukcji nośnych stosowanych w budownictwie polega na bezpiecznym przenoszeniu różnego rodzaju obciążeń działających na budowlę i przekazaniu ich przez fundament na podłoże gruntowe. Podłoże gruntowe jest zatem nierozdzielnie połączone i związane ze wszystkimi typami budowli i obiektów inżynierskich. Każda budowla „wyrasta” z podłoża. Od ponad wieku tworzy się różne fizyczne i matematyczne modele ośrodka gruntowego. Pierwszym modelem opracowanym już w 1867 roku jest podłoże sprężyste typu Winklera, a zagadnienie graniczne płyty na tego rodzaju podłoża jest już klasyczne w mechanice budowli. Uogólnieniem modelu zajmowało się wielu badaczy. WIEGHARDT [5], PASTERNAK [6], WŁASOW [7] opracowali podstawy teoretyczne modelu dwuparametrowego, jednokierunkowego, uwzględniającego ścinanie ośrodka. KĄCZKOWSKI w monografii [22] rozważa płytę na podłożu Winklera w rozumieniu trójkierunkowym. Podłoże jest tu również opisane dwoma współczynnikami k_z i k_r , których wymiarem fizycznym jest $[MN/m^3]$. W przypadku podłoża Pasternaka-Własowa drugi współczynnik podłoża K , ma wymiar $[MN/m]$. Zgodnie z rysunkiem 1 podstawowe równanie modelu Pasternaka otrzymuje się rozpatrując równowagę wyciętego, nieskończenie małego elementu o jedno-



Rys. 1. a) Nieskończenie mały element podłoża sprężystego Pasternaka z warstwą czułą na ścinanie. b) Układ sił działających na element podłoża sprężystego Pasternaka

stkowej wysokości z warstwy czułej na ścinanie. Naprężenia styczne i siły poprzeczne w tej warstwie, określa się zgodnie z prawem Hooke'a i definicją siły poprzecznej

$$(1.1) \quad \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = K_t \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = K_t \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w,$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = K_t \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w.$$

Równanie równowagi statycznej, zgodnie z rysunkiem 1b, jest określone w następujący sposób

$$(1.2) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + R - R_s = 0,$$

gdzie $R_s = k_z w$ określa oddziaływanie sprężyny Winklera na warstwę Pasternaka.

Po podstawieniu sił poprzecznych Q_x i Q_y określonych wzorami (1.1)₂ do (1.2) otrzymuje się równanie jednokierunkowego modelu Pasternaka

$$(1.3) \quad R(x, y) = k_z w - K_t \nabla^2 w.$$

Model podłoża sprężystego dwuparametrowego WŁASOWA [7] został opracowany przy założeniu jego „równoważności” warstwie sprężystej o wysokości H na sztywnej bazie. Założenie w warstwie $u = 0, v = 0$ oraz $w(x, y, z) = w(x, y)\psi(z)$, gdzie $\psi(z)$ przyjęta funkcja, opisująca pole przemieszczeń na grubości warstwy oraz wykorzystanie tzw. „uogólnionych równań równowagi w rozumieniu dopuszczalnych możliwych przemieszczeń Lagrange’a” wyprowadzonych z zasady pracy wirtualnej, małego elementu warstwy prowadzi do równania modelu

$$(1.4) \quad q_1 = kw(x, y) - 2t \nabla^2 w(x, y),$$

w którym

$$k = \frac{E_0 s_{11}}{1 - \nu_0^2}, \quad t = \frac{E_0 r_{11}}{4(1 + \nu_0)}, \quad r_{11} = \int_0^H \psi^2(z) dz,$$

$$s_{11} = \int_0^H \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz, \quad E_0 = \frac{E_{gr}}{1 - \nu_{gr}}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_{gr}}{1 - \nu_{gr}}.$$

Równania (1.3) i (1.4) przy oznaczeniach $q_1 = R(x, y)$, $k = k_z$ i $2t = K_t$ są identyczne. Oba te modele uwzględniają ścinanie w warstwie, dzięki czemu podłoże osiada również poza miejscami kontaktu z obciążeniem. Funkcja $\psi(z)$ w modelu Własowa może być przyjęta jako $\hat{\psi}_{(z)} = \frac{\text{sh} \gamma(H - z)}{\text{sh} \gamma H}$, gdzie γ jest współczynnikiem zanikania przemieszczeń na głębokości warstwy. Oba modele są jednokierunkowe, co oznacza, że nie mogą być w szczególności obciążane siłami stycznymi. Modele te są bezinercyjne, co w zagadnieniach dynamicznych nie odpowiada podłożu gruntowemu (np. nie ma zjawisk falowych w podłożu). Tę niedogodność usuwa model Własowa uwzględniający bezwładność podłoża opisany równaniem (1.5)

$$(1.5) \quad q(x, y, t) = kw(x, y, t) - 2t \nabla^2 w(x, y, t) + m_0 \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}$$

gdzie

$$m_0 = \bar{m}_0 \int_0^H \psi_{(z)}^2 dz,$$

$\bar{m}_0 = \frac{\gamma_0}{g}$ jest masą przypadającą na jednostkę objętości sprężystego podłoża, γ_0 jest ciężarem objętościowym gruntu.

Modele dwuparametrowe były również przedmiotem badań WIEGHARDE'ŃA [5], FIŁONIENKI-BORODICZA [27], HETÉNYE'GO [28], REISSNERA [12]. W pracy Wieghardte'a wykorzystano rozwiązanie półpłaszczyzny sprężystej do sformułowania równania belki na pewnym podłożu opisanym współczynnikami c , k . Model FIŁONIENKI-BORODICZA [27] opisuje równanie (1.6)

$$(1.6) \quad p = kw - T\nabla^2 w,$$

gdzie T jest napięciem membrany przykrywającej sprężyny Winklera.

Model-HETÉNYE'GO [28] opisany jest równaniem (1.7)

$$(1.7) \quad p = kw + D\nabla^2 \nabla^2 w,$$

gdzie D jest sztywnością płyty przykrywającej sprężyny Winklera. Jeżeli założyć w rozważaniach podłoże Pasternaka-Własowa w rozumieniu trójkierunkowym, wówczas model jest opisany czterema współczynnikami k_z , G_z , k_t i G_t . W takim modelu w szczególności obciążenie może być poziome i styczne do podłoża. Założenie w takim czteroparametrowym modelu, współczynników opisujących ścinanie G_z i G_t , równych zero prowadzi do modelu podłoża Winklera w rozumieniu trójkierunkowym. Tak rozumianym modelem zajmowali się URBANOWSKI [29] oraz KĄCZKOWSKI w monografii [22]. W pracy przeglądowej KERRA [13], którą poleca się uwadze, podano szczegółowy opis tych wszystkich modeli wskazując na ich zalety i wady. Modele te aczkolwiek zasadniczo różne i nie powinny być pojęciowo mieszane są nazywane w literaturze przedmiotu modelami dwuparametrowymi. Modelami wyższego rzędu zajmowali się KERR [8-9], LEVINSON [10-11], REISSNER [12] i wielu innych. MARTINČEK w pracach [14-16] uwzględnił w modelu Własowa bezwładność podłoża, operując już trzema współczynnikami a w przypadku podłoża nieliniowego fizycznie aż czterema współczynnikami. Dwuparametrowe modele podłoża zostały adaptowane i rozbudowane w celu opisu stanów lepkosprężystych, sprężysto-plastycznych i lepkosprężysto-plastycznych w ośrodku gruntowym. Model półprzestrzeni sprężystej traktowanej jako podłoże sprężyste jest również przedmiotem badań w licznych pracach [17-21]. Półprzestrzeń sprężysta połączona szeregowo z podłożem Winklera tworzy model kombinowany [20]. Tematyką płyty na podłożu sprężystym zajmowało się również wielu polskich badaczy - SZCZEPANIAK [20], ŚWITKA [21], KĄCZKOWSKI [22] i inni. Wpływ sprężystej podatności podłoża ma dwojakie znaczenie. Z jednej strony może nas interesować stan naprężeń

i odkształceń płyty przy zastosowaniu różnych rodzajów podłoża w celu zmniejszenia naprężeń lub osiadań projektowanej płyty. Z drugiej strony ze względu na to, że pomiary naprężeń, odkształceń i osiadania płyty są o wiele łatwiejsze do wykonania niż pomiary tych wielkości w podłożu, zwłaszcza bez naruszania struktury jego materiału.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE OPRACOWANIA

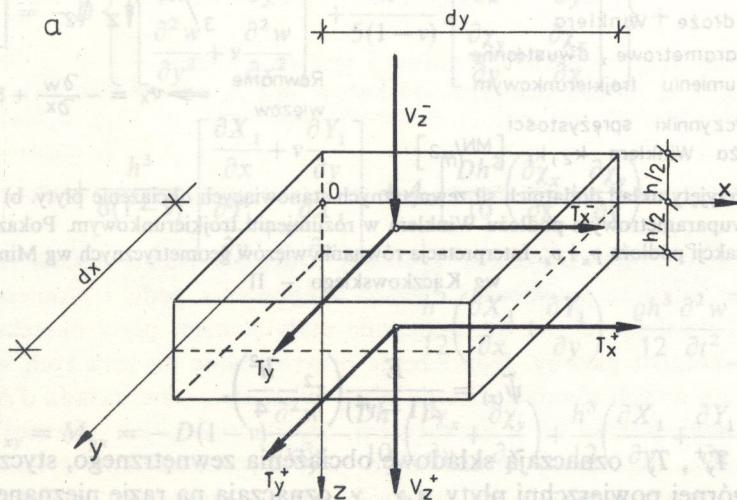
Przyjmuje się techniczną teorię płyty o średniej grubości podaną w pracach autora [1-4]. Modyfikacja owej teorii polega na przystosowaniu jej do rozwiązywania płyt pod obciążeniami dowolnymi, w szczególności obciążen stycznych działających na płaszczyznach ograniczających. Zakłada się podłożo Winklera w rozumieniu trójkierunkowym, opisane dwoma współczynnikami k_x i k_z .

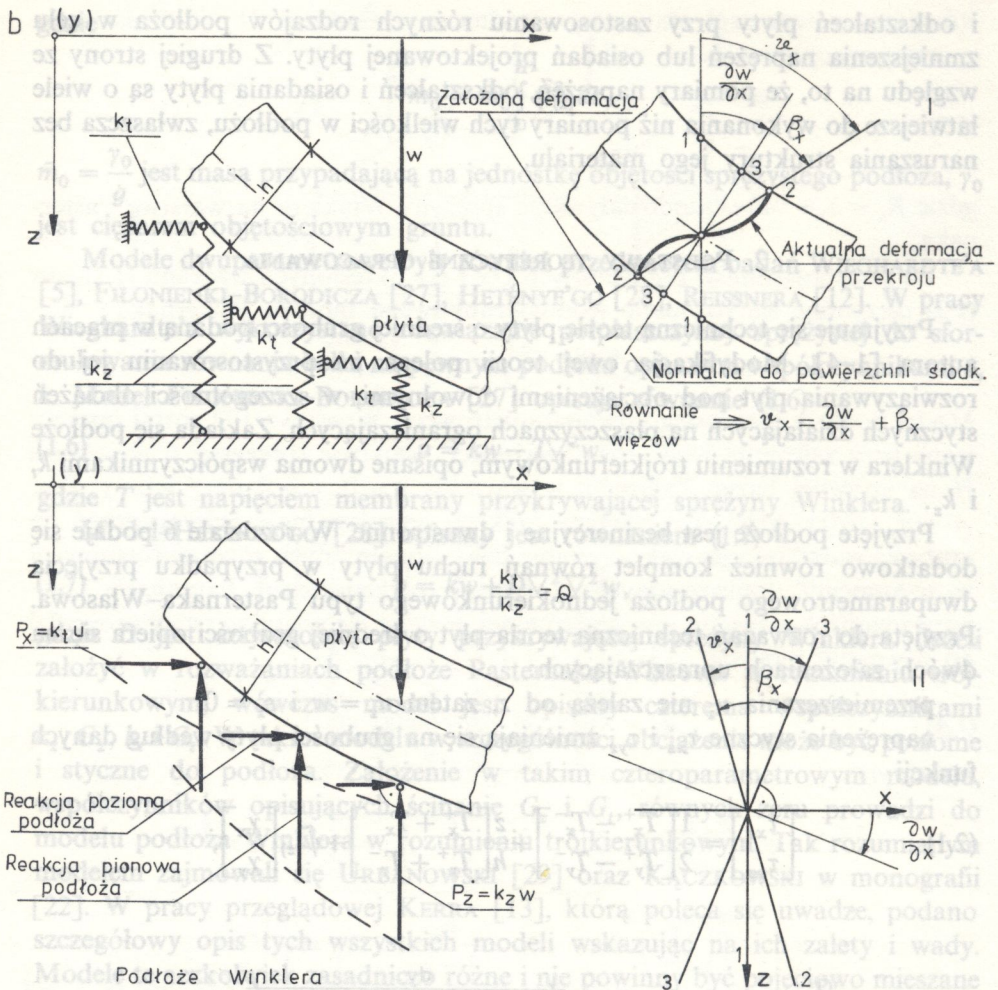
Przyjęte podłożo jest bezinercyjne i dwustronne. W rozdziale 6 podaje się dodatkowo również komplet równań ruchu płyty w przypadku przyjęcia dwuparametrowego podłoża jednokierunkowego typu Pasternaka-Własowa. Przyjęta do rozważań techniczna teoria płyt o średniej grubości opiera się na dwóch założeniach upraszczających:

przemieszczenia u_z nie zależą od z , zatem $u_z = w$ i $\varepsilon_z = 0$,

naprężenia styczne τ_{xz} i τ_{yz} zmieniają się na grubości płyty według danych funkcji

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_x^+ - T_x^- \\ T_y^+ - T_y^- \end{bmatrix} + \frac{z}{h} \begin{bmatrix} T_x^+ + T_x^- \\ T_y^+ + T_y^- \end{bmatrix} + \tilde{\psi}(z) \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix},$$





Rys. 2. a) Przyjęty układ dodatnich sił zewnętrznych stanowiących obciążenie płyty. b) Fragment płyty na dwuparametrowym podłożu Winklera w rozumieniu trójkierunkowym. Pokazano tylko składowe reakcji podłoża p_x i p_z . Interpretacja równania więzów geometrycznych wg Mindlina – I, wg Kączkowskiego – II

gdzie

$$\tilde{\psi}_{(z)} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right),$$

$T_x^+, T_x^-, T_y^+, T_y^-$ oznaczają składowe obciążenia zewnętrzne, stycznego do dolnej i górnej powierzchni płyty, a χ_x, χ_y oznaczają na razie nieznanne funkcje określające ścinanie w płycie.

Wprowadza się kombinacje obciążeń poziomych i pionowych zgodnie z (2.2)

$$(2.2) \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_x^+ - T_x^- \\ T_y^+ - T_y^- \\ T_z^+ - T_z^- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x^+ - T_x^- \\ T_y^+ - T_y^- \\ T_z^+ - T_z^- \end{bmatrix}.$$

Oznaczenia (2.2) są identyczne jak w monografii AMBARCUMIANA [23]. W pracy uwzględnia się wpływ naprężeń σ_z (σ_{33}), wyliczając je bez żadnych uproszczeń z trzeciego równania ruchu dynamicznej teorii sprężystości. Wektor przemieszczeń w płycie jest opisany trzema funkcjami w , χ_x , χ_y , identycznie jak w pracach [1-4]. Płyta jest sprężysta, izotropowa i jednorodna. Stosując znane, standardowe postępowanie, podane np. w pracy [4], wyznacza siły wewnętrzne stanu tarczowego i płytowego dane odpowiednio wzorami (2.3) i (2.4)

$$(2.3) \quad \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{h^2}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial Y_2}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial X_2}{\partial x} \end{bmatrix} + A_0 \left[hZ_1 + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_2}{\partial x} \right);$$

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = -D \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \frac{h^2}{5(1-\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \chi_x}{\partial x} \end{bmatrix} \right\} +$$

$$+ \frac{h^3}{6(1-\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial Y_1}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial X_1}{\partial x} \end{bmatrix} + A_0 \left[\frac{Dh^2}{10} \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{Dh^2}{10} \left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial Y_1}{\partial x} \right),$$

$$Q_x = -D\chi_x + hX_1, \quad Q_y = -D\chi_y + hY_1,$$

gdzie $S = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ oznacza sztywność tarczową płyty, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ oznacza sztywność płyty na zginanie, $A_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$ określa wpływ naprężeń σ_z na siły wewnętrzne i ugięcia płyty. Współczynnik ścinania przyjęty w pracy — $\kappa = \frac{5}{6}$.

Wprowadzając za monografią KĄCZKOWSKIEGO [22] uśrednione Reissnerowskie kąty obrotu ϑ_i i β_i , $i = x, y$ zdefiniowane wzorami

$$(2.5) \quad \vartheta_i = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_i z dz, \quad \beta_i = \frac{6}{5h} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{ij} dz, \quad i, j = x, y,$$

po wykonaniu przypisanych całkowań otrzymuje się

$$(2.6) \quad \begin{bmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w + \frac{1}{G} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \frac{6}{5G} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}.$$

Uśrednione kąty ϑ_i i β_i związane są ze sobą równaniami więzów geometrycznych

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} - \frac{1}{5G} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}.$$

Funkcje χ_x i χ_y można uzależnić od kątów ϑ_i i β_i odwracając związki (2.5).

3. RÓWNIANIA RUCHU PŁYTY NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM WINKLERA

W teoriach płyt o średniej grubości równania ruchu można otrzymać niezależnie kilkoma sposobami. Zasada zachowania pędu i momentu pędu układu sił działających na nieskończenie mały element płyty określa wektor główny i moment główny. Jednoczesne przyrównanie do zera tych wielkości prowadzi do owych równań. Zasada pracy wirtualnej (tzw. zasada d'Alemberta) po uwzględnieniu sił i momentów bezwładności, jak również zasada Hamiltona są najczęściej stosowanymi przy wyprowadzaniu dynamicznych równań równowagi płyty. Na szczególną uwagę zasługuje całkowa zasada

mechaniki Hamiltona, można tu bowiem poza równaniami ruchu płyty otrzymać naturalne warunki brzegowe. Zasada wariacyjna nabrała szczególnie na znaczeniu w ostatnim okresie, gdyż u jej podstaw leżą metody komputerowe, jak np. *MES* powszechnie stosowana w obliczeniach. W odniesieniu do płyt średniej grubości metoda wariacyjna jest przedmiotem badań T. LEWIŃSKIEGO w pracach [24–25]. Ostatecznie wszystkie te zasady w przypadku stanu płytowego prowadzą do trzech równań różniczkowych cząstkowych. Łączny rząd tych równań jest szósty. Podstawowe równanie ruchu płyty możemy napisać następująco:

$$(3.1) \quad \nabla^4 w + \frac{\rho h \partial^2 w}{D \partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} \rho h^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \\ = \frac{Z_2}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 Z_2 + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial t^2} + \frac{h}{D} \phi - \frac{(2-\nu)h^3}{60D(1-\nu)} \nabla^2 \phi + \\ + \frac{\rho h^6}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

gdzie $\phi = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y}$ jest dywergencją kombinacji obciążeń poziomych.

Wprowadzając oznaczenie

$$(3.2) \quad \psi = \frac{\partial \chi_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi_y}{\partial x},$$

gdzie $\psi_{(x,y,t)}$ oznacza rotację nieznaną funkcji χ_x i χ_y , otrzymamy równanie

$$(3.3) \quad \nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{5h}{6D} \nabla^2 \Gamma - \frac{5\rho h}{6GD} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2},$$

gdzie $\Gamma = \frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}$ oznacza rotację kombinacji obciążeń poziomych. Nieznane funkcje χ_x i χ_y spełniają równanie (3.4) i są zależne od ugięcia w i kombinacji X_1 , Y_1 i Z_2

$$(3.4) \quad \left[\nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{ -\frac{10}{h^2} \nabla^2 w + \frac{11\rho h}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \right. \\ \left. - \frac{Z_2}{D(1-\nu)} + \frac{h}{6D(1-\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial Y_1}{\partial y} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-5\nu \\ -1 \end{bmatrix} \right\} + \frac{5h}{6D} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$(3.4) \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{5qh}{6GD} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}.$$

W przypadku dwuparametrowego podłoża sprężystego Winklera określonego współczynnikami k_z i k_t odpowiednia składowa reakcji podłoża jest opisana w następujący sposób

$$(3.5) \quad p_z = k_z w, \quad p_t = k_t u_i, \quad i = x, y.$$

Kombinacje obciążenia stycznego w płaszczyźnie styku płyty z podłożem są określone wzorami (3.6)

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{k_t h}{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w + \frac{k_t h^3}{24(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}, \quad Z_2 = q - k_z w.$$

Wykorzystując (3.6), jak również trzecie równanie dynamicznej równowagi płyty (3.1), możemy napisać podstawowe równanie zadania granicznego w postaci

$$(3.7) \quad \nabla^4 w + \frac{qh}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} qh^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{q^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + k_z \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{qh^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \frac{1}{1-\mu} \left\{ \left[\frac{k_t h^2}{4} \nabla^2 - \mu \left(qh \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k_z \right) \right] \times \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{qh^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\} = \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{qh^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \left[\frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{qh^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right],$$

gdzie $\mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)}$ jest bezwymiarowym współczynnikiem określającym wpływ nieznanymi funkcji χ_x i χ_y na siły poziome w płaszczyźnie styku płyty z podłożem. Zwraca się uwagę, że dla współczynników k_t opisujących podłoża gruntowe, wartości μ są bardzo małe w stosunku do 1. Przyjęcie $\mu = 0$ upraszcza równanie (3.7), które teraz jest podane w następujący sposób:

$$(3.8) \quad \nabla^4 w + \frac{qh}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} qh^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{q^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} +$$

$$(3.8) \quad [cd.] \quad + k_z \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \\ - \frac{k_t h^2}{4} \nabla^2 \left[\frac{w}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{60D(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{\rho h^5}{360D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = \\ = \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}.$$

Istotnemu uproszczeniu ulega również równanie (3.6)

$$(3.9) \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{k_t h}{4} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w$$

i jest identyczne jak w przypadku płyty cienkiej na dwuparametrowym podłożu odkształcalnym. Przy dużych wartościach k_t , np. podłożu gruntowe wzmocnione systemem pali ukośnych, wartości μ są duże i nie sposób zakładać $\mu = 0$.

Równanie (3.3) po uwzględnieniu (3.6) jest następujące

$$(3.10) \quad (1-\eta_t) \nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} (1-\eta_t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $\eta_t = \frac{5k_t h^4}{144D(1-\nu)}$ jest bezwymiarowym współczynnikiem określającym wpływ nieznanymi funkcji χ_x i χ_y na siły styczne działające w płaszczyźnie styku płyty z podłożem. Układ równań (3.4) w przypadku $w = 0$ i $Z_2 = 0$ oraz po uwzględnieniu (3.6₁) możemy zapisać w sposób następujący:

$$(3.11) \quad \left[\left(1 - \frac{4-5\nu}{5(1-\nu)} \eta_t \right) \nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} (1-\eta_t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix} = \\ = \frac{\eta_t}{5(1-\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \psi.$$

Układ równań (3.11) można zapisać również w postaci operatorowej

$$(3.12) \quad \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix} = 0,$$

gdzie

$$L_{11} = \left(1 - \frac{4-5\nu}{5(1-\nu)} \eta_t \right) \nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} (1-\eta_t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\eta_t}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = -\frac{\eta_t}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

$$L_{22} = \left(1 - \frac{4-5\nu}{5(1-\nu)} \eta_t\right) \nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} (1-\eta_t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\eta_t}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Nie jest trudno zauważyć, że dwa równania (3.11) po niewielkich przekształceniach są identyczne jak równanie (3.10).

4. WŁASNE DRGANIA GIĘTNE PŁYTY NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM WINKLERA

Zakładając warunki brzegowe prostokątnej płyty o wymiarach a, b podparzej przegubowo na obwodzie i mającej sztywne przepony uniemożliwiające przemieszczenia wzdłuż brzegu płyty w postaci

$$(4.1) \quad \begin{aligned} x = 0, & \quad w(0, y) = 0, & M_x(0, y) = 0, & \quad \chi_y(0, y) = 0, \\ x = a, & \quad w(a, y) = 0, & M_x(a, y) = 0, & \quad \chi_y(a, y) = 0, \\ y = 0, & \quad w(x, 0) = 0, & M_y(x, 0) = 0, & \quad \chi_x(x, 0) = 0, \\ y = b, & \quad w(x, b) = 0, & M_y(x, b) = 0, & \quad \chi_x(x, b) = 0, \end{aligned}$$

możemy wyznaczyć aż trzy pasma częstości drgań własnych płyty – dwa pasma drgań własnych giętnych i jedno pasmo drgań własnych skrętnych. Nadmieniamy również, że termin swobodne podparcie w przypadku płyty o średniej grubości nie jest jednoznaczny [1]. Warunki brzegowe (4.1) zostaną spełnione, jeśli za funkcję $w(x, y, t)$ oberzemy

$$(4.2) \quad w(x, y, t) = \sum_m \sum_n C_{m,n} \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y \cos \tilde{\omega}_{m,n} t,$$

$$\text{gdzie } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 3, \dots$$

Podstawienie (4.2) do równania (3.7), w którym $q(x, y, t) = 0$, prowadzi do (4.3)

$$(4.3) \quad \tilde{\omega}_{m,n}^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{c_p}{h}\right)^2 \tilde{P}_{m,n} \tilde{\omega}_{m,n}^2 + \frac{1}{576} \left(\frac{c_p}{h}\right)^4 \tilde{Q}_{m,n}^2 = 0,$$

gdzie

$$\tilde{P}_{m,n} = \frac{6(1-\mu)}{6-5\mu} \left\{ 60(1-\nu)(1-\mu) + \gamma_{m,n}^2 [17-6\nu + \mu(2-\nu)] + \right. \\ \left. + \mu_z \left[1 + \frac{1}{6(1-\mu)} \left(\theta \frac{\gamma_{m,n}^2}{4} + \mu \right) \right] \right\}$$

$$\tilde{Q}_{m,n}^2 = 240(1-\nu) \tilde{\gamma}_{m,n}^4,$$

$$\tilde{\gamma}_{m,n}^4 = \frac{6(1-\mu)}{6-5\mu} \left\{ \gamma_{m,n}^4 + \mu_z \left\langle 1 + \frac{2-\nu}{10(1-\nu)} \gamma_{m,n}^2 + \left[\mu + \frac{\theta}{4(1-\nu)} \gamma_{m,n}^2 \right] \left[1 + \frac{2-\nu}{60(1-\nu)} \gamma_{m,n}^2 \right] \right\rangle \right\},$$

$$\theta = \frac{k_t}{k_z}, \quad \mu = \frac{k_t h^4}{24D(1-\nu)}, \quad \mu_z = \frac{k_z h^4}{D}, \quad \gamma_{m,n}^2 = h^2(\alpha_m^2 + \alpha_n^2).$$

Bezwymiarowy parametr $\gamma_{m,n}$ wprowadzony tutaj za pracą J. MOSSAKOWSKIEGO [26], odgrywa zasadniczą rolę. W przypadku płyty na dwuparametrowym podłożu sprężystym Winklera mamy do czynienia z parametrami $\tilde{\gamma}_{m,n}$ lub $\hat{\gamma}_{m,n}$. Przy braku podłoża $\theta = \mu = \mu_z = k_t = k_z = 0$, $\gamma_{m,n} = \tilde{\gamma}_{m,n}$. Po rozwiązaniu (4.3) oraz wprowadzeniu bezwymiarowych częstości własnych drgań giętnych mamy

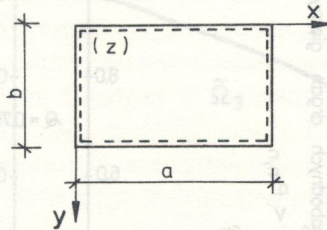
$$(4.4) \quad \tilde{\Omega}_{1/3} = \frac{1}{\gamma_{m,n}^2} \left\{ \frac{1}{2} [\tilde{P}_{m,n} \pm (\tilde{P}_{m,n}^2 - \tilde{Q}_{m,n}^2)^{1/2}] \right\}^{1/2},$$

gdzie

$$\tilde{\Omega}_1 = \frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_{kl}}, \quad \tilde{\Omega}_3 = \frac{\tilde{\omega}_3}{\omega_{kl}},$$

$$\omega_{kl} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} = \frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h \sqrt{12}},$$

$$\gamma_{m,n}^2 = \pi^2 \xi^2 (m^2 + \lambda^2 n^2), \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \xi = \frac{h}{a}, \quad c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}.$$



Rys. 3. Schemat statyczny rozważanej płyty

Jeżeli przyjmuje się $\mu = 0$, co oznacza nieuwzględnienie wpływu nieznanymi funkcji χ_x i χ_y na siły styczne działające w płaszczyźnie styku płyty z podłożem i co jest uzasadnione technicznie w przypadku szerokiej klasy podłoża gruntowego, wówczas częstość drgań własnych należy wyznaczać z równania (3.8) przy pominięciu w nim prawej strony – równanie jednorodne. Przyjęcie

rozwiązania (4.2) doprowadza do równania (4.3) w którym są inne $\tilde{P}_{m,n}$, $\tilde{Q}_{m,n}$, i $\tilde{\gamma}_{m,n}$. Równanie to przepisujemy jeszcze raz pomijając znak \sim nad charakterystycznymi wielkościami oraz uwzględniając fakt że,

$$(4.5) \quad \omega_{m,n}^4 - \frac{1}{12} \left(\frac{c_p}{h} \right)^2 P_{m,n} \omega_{m,n}^2 + \frac{1}{576} \left(\frac{c_p}{h} \right)^4 Q_{m,n}^2 = 0,$$

gdzie

$$P_{m,n} = 60(1-\nu) + (17-6\nu)\gamma_{m,n}^2 + \mu_z \left(1 + \frac{\theta\gamma_{m,n}^2}{24} \right),$$

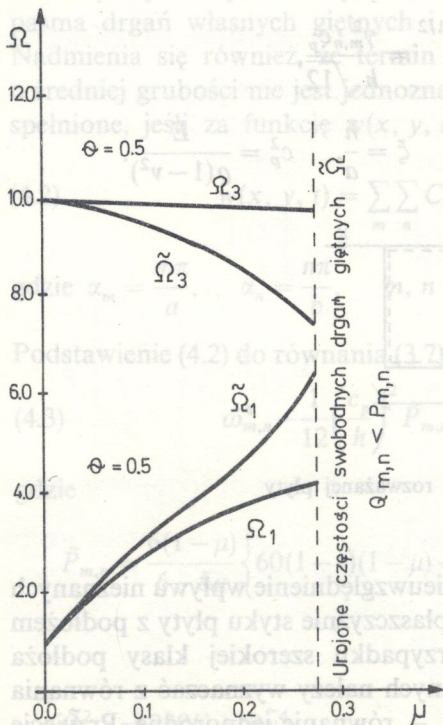
$$Q_{m,n} = 4\gamma^2 [15(1-\nu)],$$

$$\tilde{\gamma}_{m,n}^4 = \gamma_{m,n}^4 + \mu_z \left\{ 1 + \left[\frac{2-\nu}{10(1-\nu)} + \frac{\theta}{4} \left(1 + \frac{2-\nu}{60(1-\nu)} \gamma_{m,n}^2 \right) \right] \gamma_{m,n}^2 \right\}.$$

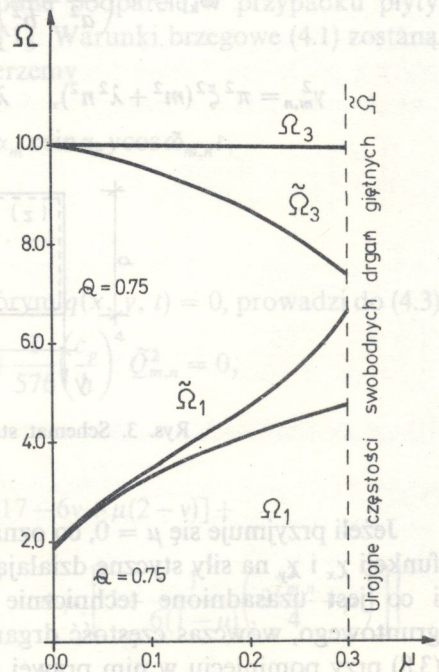
Bezwymiarowe częstości drgań własnych giętnych płyty są w tym przypadku określone w sposób następujący

$$(4.6) \quad \Omega_{1/3} = \frac{1}{\gamma_{m,n}^2} \left\{ \frac{1}{2} [P_{m,n} \mp (P_{m,n}^2 - Q_{m,n}^2)^{\frac{1}{2}}] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Na rysunkach 4-8 porównano częstości drgań własnych giętnych wyliczonych ze wzorów (4.4) i (4.6). W tabelcy 1 porównano te same częstości dla kilku

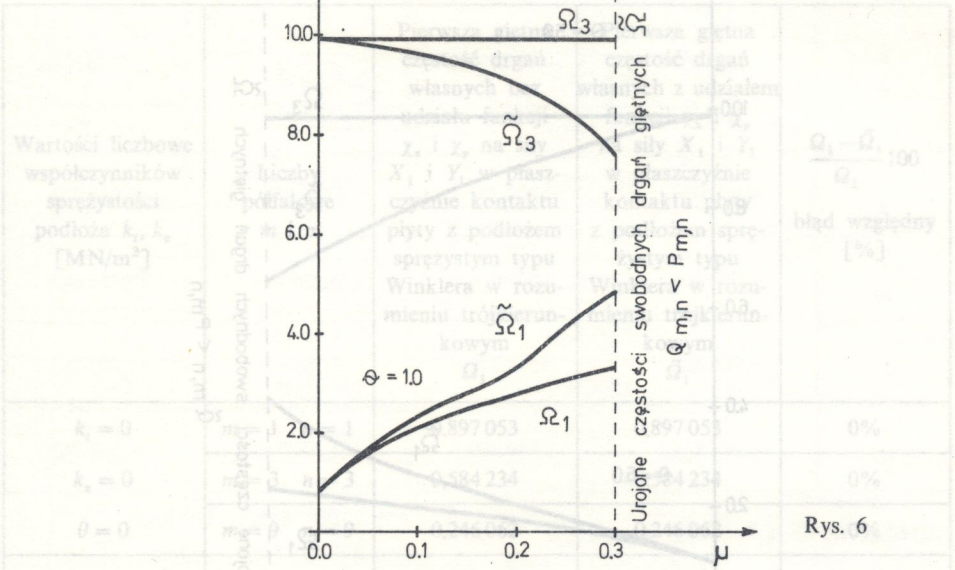


Rys. 4

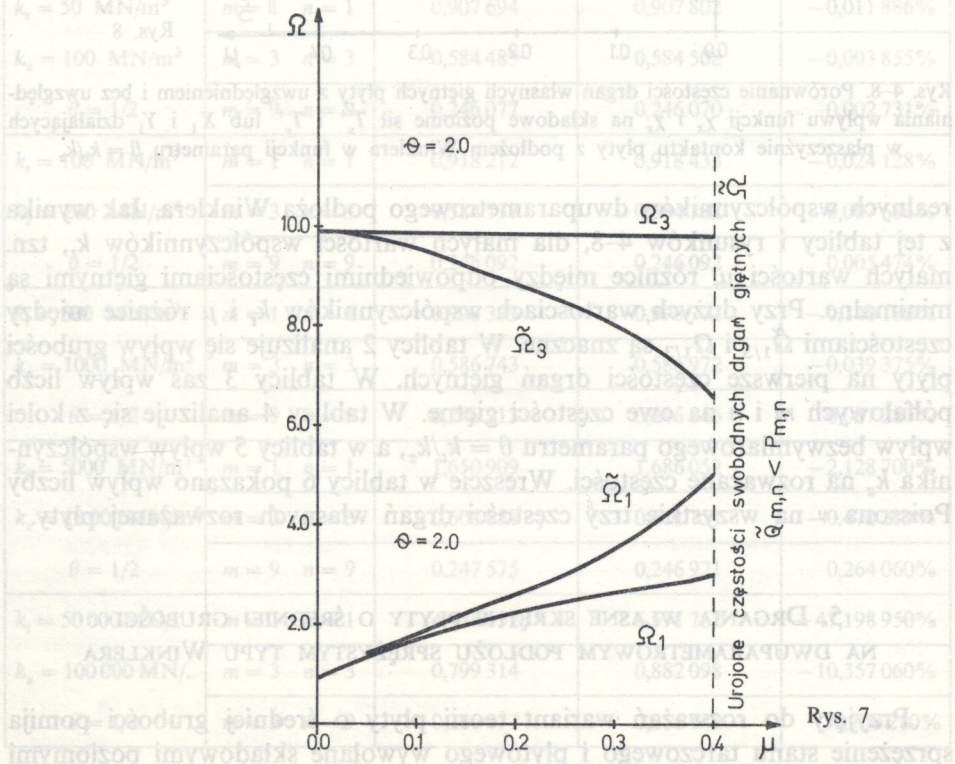


Rys. 5

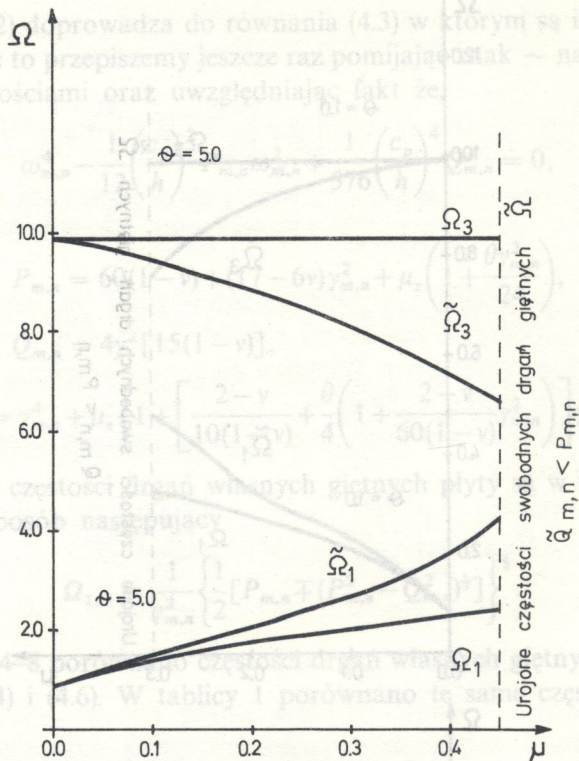
Tablica 1. Porównanie częstości własnych drgań giętnych płyty o średnicy \varnothing przykrytej spoczywającej na dwuparametrowym podłożu elastycznym: typu Winklera w przypadku uśrednia funkcji λ_x i λ_y , na składowe poziomie sil T_x i T_y , X i Y , działających w płaszczyźnie kontaktu płyty z podłożem



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Rys. 4–8. Porównanie częstości drgań własnych giętnych płyty z uwzględnieniem i bez uwzględnienia wpływu funkcji χ_x i χ_y na składowe poziome siły T_x^+ i T_y^+ lub X_1 i Y_1 działających w płaszczyźnie kontaktu płyty z podłożem Winklera w funkcji parametru $\theta = k_t/k_z$

realnych współczynników dwuparametrowego podłoża Winklera. Jak wynika z tej tabelicy i rysunków 4–8, dla małych wartości współczynników k_t , tzn. małych wartości μ , różnice między odpowiednimi częstościami giętnymi są minimalne. Przy dużych wartościach współczynników k_t i μ różnice między częstościami $\tilde{\Omega}_{1/3}$ i $\Omega_{1/3}$ są znaczne. W tabelicy 2 analizuje się wpływ grubości płyty na pierwsze częstości drgań giętnych. W tabelicy 3 zaś wpływ liczb półfalowych m i n na owe częstości giętny. W tabelicy 4 analizuje się z kolei wpływ bezwymiarowego parametru $\theta = k_t/k_z$, a w tabelicy 5 wpływ współczynnika k_z na rozważane częstości. Wreszcie w tabelicy 6 pokazano wpływ liczby Poissona ν na wszystkie trzy częstości drgań własnych rozważanej płyty.

5. DRGANIA WŁASNE SKRĘTNE PŁYTY O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI NA DWUPARAMETROWYM PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM TYPU WINKLERA

Przyjęty do rozważań wariant teorii płyty o średniej grubości pomija sprężenie stanu tarczowego i płytowego wywołane składowymi poziomymi

Tablica 1. Porównanie częstości własnych drgań giętnych płyty o średniej grubości spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym typu Winklera w przypadku udziału funkcji χ_x i χ_y na składowe poziome siły T_x^+ i T_y^+ lub X_1 i Y_1 działających w płaszczyźnie kontaktu płyty z podłożem

Wartości liczbowe współczynników sprężystości podłoża k_x, k_z [MN/m ³]	Liczby półfalowe m i n	Pierwsza giętna częstość drgań własnych bez udziału funkcji χ_x i χ_y na siły X_1 i Y_1 w płaszczyźnie kontaktu płyty z podłożem sprężystym typu Winklera w rozumieniu trójkierunkowym Ω_1	Pierwsza giętna częstość drgań własnych z udziałem funkcji χ_x i χ_y na siły X_1 i Y_1 w płaszczyźnie kontaktu płyty z podłożem sprężystym typu Winklera w rozumieniu trójkierunkowym $\tilde{\Omega}_1$	$\frac{\Omega_1 - \tilde{\Omega}_1}{\Omega_1} 100$ błąd względny [%]
$k_t = 0$	$m = 1 \quad n = 1$	0,897 053	0,897 053	0%
$k_z = 0$	$m = 3 \quad n = 3$	0,584 234	0,584 234	0%
$\theta = 0$	$m = 9 \quad n = 9$	0,246 062	0,246 062	0%
$k_t = 50 \text{ MN/m}^3$	$m = 1 \quad n = 1$	0,907 694	0,907 802	-0,011 886%
$k_z = 100 \text{ MN/m}^3$	$m = 3 \quad n = 3$	0,584 485	0,584 508	-0,003 855%
$\theta = 1/2$	$m = 9 \quad n = 9$	0,246 077	0,246 070	0,002 731%
$k_t = 100 \text{ MN/m}^3$	$m = 1 \quad n = 1$	0,918 212	0,918 433	-0,024 128%
$k_z = 200 \text{ MN/m}^3$	$m = 3 \quad n = 3$	0,584 737	0,584 782	-0,007 686%
$\theta = 1/2$	$m = 9 \quad n = 9$	0,246 092	0,246 092	0,005 474%
$k_t = 500 \text{ MN/m}^3$	$m = 1 \quad n = 1$	0,998 373	0,998 772	-0,140 180%
$k_z = 1000 \text{ MN/m}^3$	$m = 3 \quad n = 3$	0,586 743	0,586 972	-0,039 375%
$\theta = 1/2$	$m = 9 \quad n = 9$	0,246 213	0,246 146	0,027 280%
$k_t = 5000 \text{ MN/m}^3$	$m = 1 \quad n = 1$	1,650 909	1,686 052	-2,128 700%
$k_z = 10000 \text{ MN/m}^3$	$m = 3 \quad n = 3$	0,608 887	0,611 751	-0,470 289%
$\theta = 1/2$	$m = 9 \quad n = 9$	0,247 575	0,246 921	0,264 060%
$k_t = 50000 \text{ MN}/.$	$m = 1 \quad n = 1$	4,478 132	6,591 762	-47,198 950%
$k_z = 100000 \text{ MN}/.$	$m = 3 \quad n = 3$	0,799 314	0,882 098	-10,357 060%
$\theta = 1/2$	$m = 9 \quad n = 9$	0,260 877	0,256 442	1,700 210%

Tablica 2. Wpływ grubości płyty na bezwymiarowe częstotliwości Ω_1 i Ω_3 drgań własnych giętych. Dwa przypadki: zupełny brak podłoża sprężystego $k_z = k_t = 0$ oraz $k_z = 50 \text{ MN/m}^3$ i $k_t = 25 \text{ MN/m}^3$, $\theta = k_t/k_z$, $\Omega_3 > \Omega_1$

$\frac{h}{a}$	Ω_1		Ω_3	
	$k_z = 0$ $k_t = 0$	$k_z = 50 \text{ MN/m}^3$ $\theta = \frac{1}{2}$	$k_z = 0$ $k_t = 0$	$k_z = 50 \text{ MN/m}^3$ $\theta = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$	0,897 053	0,902 388	9,981 378	9,981 373
$\frac{1}{10}$	0,970 166	0,044 863	36,916 664	36,916 667
$\frac{1}{15}$	0,986 320	1,316 270	81,702 055	81,702 053
$\frac{1}{20}$	0,992 214	1,839 200	144,384 745	144,384 740
MNOŻNIK $\omega_{kl} = \frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h\sqrt{12}}$		$E = 20\,000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,167$, $m = n = 1$, $a = b = 1 \text{ m}$		

Tablica 3. Wpływ liczb półfalowych m i n na częstotliwości bezwymiarowe drgań własnych giętych płyty. Dwa przypadki: zupełny brak podłoża sprężystego pod płytą i jego obecność

m, n	Ω_1		Ω_3	
	$k_z = 0$ $k_t = 0$	$k_z = 50 \text{ MN/m}^3$ $k_t = 25 \text{ MN/m}^3$	$k_z = 0$ $k_t = 0$	$k_z = 50 \text{ MN/m}^3$ $k_t = 25 \text{ MN/m}^3$
1, 1	0,897 053	0,902 389	9,981 378	9,981 373
3, 3	0,584 234	0,584 360	1,702 861	1,702 857
5, 5	0,407 428	0,407 458	0,879 059	0,879 057
11, 11	0,204 304	0,204 309	0,362 199	0,362 198
21, 21	0,109 533	0,109 535	0,185 363	0,185 366
51, 51	0,045 454	0,045 455	0,075 735	0,075 735
101, 101	0,022 979	0,022 980	0,038 196	0,038 196
MNOŻNIK $\frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h\sqrt{12}}$		$E = 20\,000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,167$, $a = b = 1 \text{ m}$ $h/a = 0,2$, $k_z h^4/D = 0,0588327$, m, n – zmienne.		

Tablica 4. Wpływ współczynnika $\theta = k_t/k_z$ na bezwymiarowe częstotliwości Ω_1 i Ω_3 drgań własnych giętnych płyty

$\theta = \frac{k_t}{k_z}$	Ω_1	Ω_3
0	0,901 962	9,981 404
0,5	0,902 389	9,981 373
1	0,902 815	9,981 342
1,5	0,903 241	9,981 311
2	0,903 667	9,981 281
5	0,906 219	9,981 096
10	0,910 456	9,980 787
50	0,943 686	9,978 317
100	0,983 691	9,975 224
1000	1,540 283	9,918 533

θ – zmienne,
 $E = 20000$ MPa,
 $\nu = 0,167$,

MNOŻNIK $\frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h \sqrt{12}}$

$k_z = 50$ MN/m³, $a = b = 1$ m,
 $h = 0,2$ m, $k_z h^4/D = 0,0058 327$,
 $m = n = 1$, $c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$

reakcji podłoża sprężystego na dolnej płaszczyźnie ograniczającej, wspólnej dla płyty i podłoża. Poziome reakcje podłoża sprężystego rozłożono na składowe antysymetryczne i symetryczne. Składowe antysymetryczne X_1 i Y_1 uzależniono od współczynnika k_t , wykorzystując równanie modelu podłoża. Po podstawieniu tych składowych do równań ruchu płyty otrzymano równanie (3.7) oraz równania (3.10) lub (3.11). Łączny rząd tych równań jest szósty. Wprowadzenie oddziaływań reakcji podłoża do wzorów (2.1), już więc na etapie hipotezy kinematycznej, prowadzi do sprzężonego układu pięciu równań ruchu o ich łącznym rzędzie równym dziesięć. Rozważania rozpoczyna się od analizy częstości drgań własnych skrętnych płyty związanych z funkcją $\psi(x, y, t)$. Przyjęcie rozwiązania (5.1) spełniającego warunki brzegowe (4.1) w następującej postaci

$$(5.1) \quad \psi(x, y, t) = \sum_m \sum_n K_{m,n} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \cos \tilde{\omega}_{m,n} t$$

Tablica 5. Wpływ współczynnika podłoża sprężystego k_z przy różnych wartościach $\theta = k_l/k_z$ na bezwymiarowe częstotliwości drgań własnych giętych płyty o średniej grubości

$\theta = k_l/k_z$	k_z [MN/m ³]	Ω_1	Ω_3
$\theta = 0$	50	0,901 962	9,981 404
	500	0,945 098	9,981 640
	5 000	1,299 035	9,984 023
	50 000	3,096 169	10,010 109
$\theta = 0,5$	50	0,902 389	9,981 373
	500	0,949 066	9,981 332
	5 000	1,328 536	9,980 254
	50 000	3,227 507	9,976 254
$\theta = 1$	50	0,902 815	9,981 342
	500	0,953 115	9,981 023
	5 000	1,357 433	9,981 933
	50 000	3,355 617	9,941 639
MNOŻNIK $\frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h\sqrt{12}}$		$E = 20\,000$ MPa, $\nu = 0,167$, $m, n = 1$, $h/a = 0,2$, $a = b = 1$ m k_z - zmienne, $c_p^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$	

Tablica 6. Wpływ liczby Poissona ν na bezwymiarowe częstotliwości drgań własnych giętych płyty na podłożu sprężystym Winklera

$\Omega \backslash \nu$	$\nu = 0$	$\nu = 0,167$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,5$
Ω_1	0,912 640	0,902 389	0,890 933	0,863 819
Ω_2	10,190 322	9,300 588	8,525 836	7,205 646
Ω_3	10,814 398	9,981 373	9,264 808	8,069 334

MNOŻNIK $\frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h\sqrt{12}}$

$E = 20\,000$ MPa, $\nu =$ zmienne,
 $k_z = 50$ MN/m³, $\theta = 1/2$, $m = n = 1$,

$a = b = 1$ m, $k_z h^4/D = 0,0058\,327$, $h/a = 0,2$.

po podstawieniu do (3.8) prowadzi do równania kwadratowego z którego określimy bezwymiarową rotacyjną częstość drgań własnych $\tilde{\Omega}_{rot}$

$$(5.2) \quad \tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_{rot} = \frac{1}{\gamma_{m,n}^2} \left[6(1-\nu) \left(\frac{10}{\xi_t} + \gamma_{m,n}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_{rot} = \frac{\tilde{\omega}}{\omega_{kl.}}, \quad \xi_t = 1 - \eta_t, \quad \eta_t = \frac{5k_t h^4}{144D(1-\nu)}.$$

Jak już wspomniano, układ równań (3.11) lub (3.12) po niewielkich przekształceniach można napisać również w następujący sposób

$$(5.3) \quad \left[(1-\eta_t) \nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} (1-\eta_t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix} = 0.$$

Dwie sprzężone częstości drgań skrętnych związane z funkcjami χ_x i χ_y wyznaczone z układu (5.3) są równe i takie same jak częstość rotacyjna Ω_2 określona wzorem (5.2). Na rysunku 9 podaje się zależność owej częstości w funkcji bezwymiarowego parametru η_t . Punkt $\eta_t = 1$ leży na asymptocie. Określa on jednocześnie pewien graniczny współczynnik podłoża dwuparametrowego Winklera k_t . Przy wartościach $\eta_t > \eta_t(\text{gr})$ lub $k_t(\text{gr})$ nie są możliwe drgania skrętne płyty. W tabelicy 7 podane są częstości rotacyjne w funkcji kilku wartości współczynników k_t .

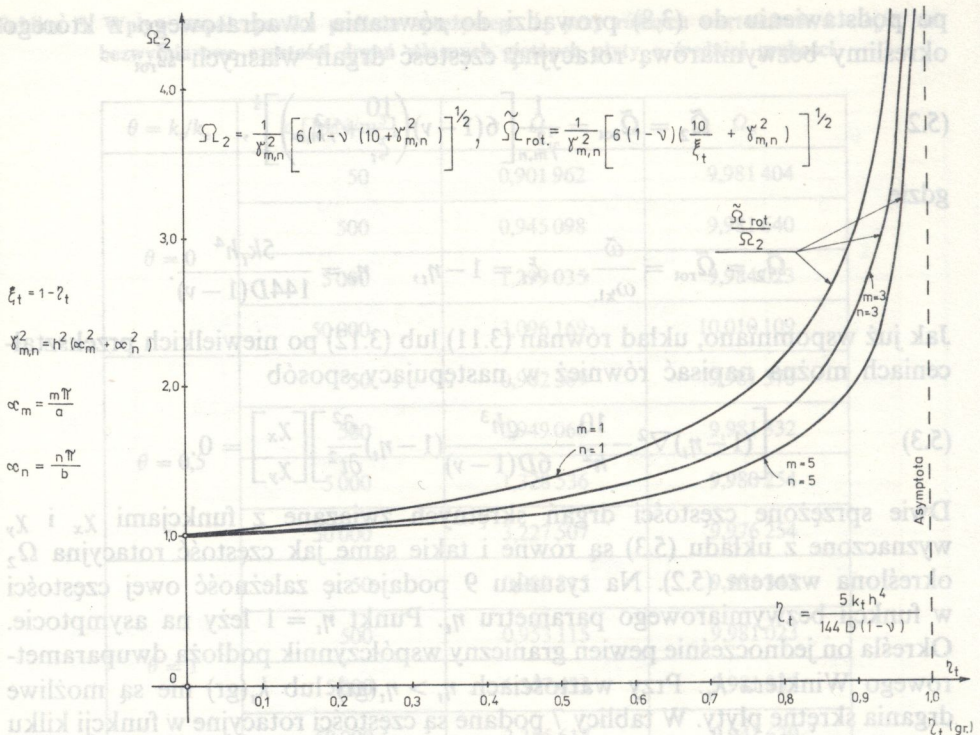
Tablica 7. Wpływ współczynnika k_t na bezwymiarową rotacyjną częstość drgań własnych skrętnych płyty $\tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_{rot}$ przy różnych wartościach liczb półfalowych m i n

m, n	$k_t = 0$	$k_t = 25 \text{ MN/m}^3$	$k_t = 50 \text{ MN/m}^3$	$k_t = 100 \text{ MN/m}^3$
	$\tilde{\Omega}_2$	$\tilde{\Omega}_2$	$\tilde{\Omega}_2$	$\tilde{\Omega}_2$
1,1	9,300 589	9,300 693	9,300 798	9,301 008
3,3	1,301 193	1,301 202	1,301 218	1,301 230
5,5	0,617 637	0,617 639	0,617 642	0,617 210
7,7	0,403 206	0,403 206	0,403 209	0,403 210
10,10	0,267 053	0,267 054	0,267 054	0,267 055
21,21	0,121 516	0,121 516	0,121 516	0,121 516

MNOŻNIK $\frac{\gamma_{m,n}^2 c_p}{h\sqrt{12}}$

$E = 20000 \text{ MPa}, \quad \nu = 0,167, \quad \frac{h}{a} = 0,2,$
 m, n - zmienne, k_t, η_t, ξ_t - zmienne,

$$\eta_t = \frac{5k_t h^4}{144D(1-\nu)}, \quad \xi_t = 1 - \eta_t, \quad \tilde{\Omega}_2 = \frac{1}{\gamma_{m,n}^2} \left[6(1-\nu) \left(\frac{10}{\xi_t} + \gamma_{m,n}^2 \right) \right]^{1/2}.$$



Rys. 9. Drgania własne skrętne płyty o średniej grubości na dwuparametrowym podłożu sprężystym typu Winklera w funkcji współczynnika \$\eta_t\$

W tablicy 8 podane są zależności między bezwymiarowym współczynnikiem podłoża \$\eta_t\$ oraz liczbami półfalowymi \$m\$ i \$n\$ a częstością rotacyjną swobodnych drgań skrętnych płyty. Przypadek \$\eta_t = 1\$ jest interesujący zarówno z teoretycznego jak i technicznego punktu widzenia. Jeżeli \$\eta_t = 1\$ to \$\psi(x, y, t) = 0\$, a więc w analizowanym modelu płyty o średniej grubości brak jest rotacji funkcji \$\chi_x\$ i \$\chi_y\$. Z równań (5.3) wynika natychmiast w takim przypadku, że \$\chi_x = \chi_y = 0\$. Fizycznie oznacza to, że nie istnieją drgania własne skrętne płyty. Wydaje się to zrozumiałe, bowiem trudno jest mówić o podłożu sprężystym w tym przypadku, gdyż jego charakterystyki mechaniczne są większe od charakterystyk mechanicznych samej płyty. Na rysunku 10 pokazano postać drgań skrętnych płyty odpowiadającą częstości rotacyjnej \$\tilde{\Omega}_2\$. Jak łatwo zauważyć postać ta w dowolnym punkcie płyty ma \$w = 0\$. Zaznaczono również uśrednione kąty Reissnera \$\vartheta_x\$ i \$\vartheta_y\$, które są różne od zera w tym przypadku. Przypadek \$w = 0\$ i \$Z_2 = 0\$, po wykorzystaniu pierwszego z wyjściowych równań ruchu (2.36) podanego w cytowanej pracy autora [1]

\$k = 100 \text{ MN/m}^2\$	\$k = 50 \text{ MN/m}^2\$	\$k = 25 \text{ MN/m}^2\$	\$k = 0\$
----------------------------	---------------------------	---------------------------	-----------

Tablica 8. Częstości skrotne drgań własnych płyty w funkcji bezwymiarowego współczynnika η_i i liczb półfalowych m, n

	$m = 1, n = 1$	$m = 3, n = 3$
$\eta_i = \frac{5k_i h^4}{144D(1-\nu)}$	$\frac{\tilde{\Omega}_{rot}}{\Omega_2}$	
$\eta_i = 0$	1	1
0,1	1,05 022	1,03 197
0,2	1,10 982	1,07 058
0,3	1,18 206	1,11 827
0,4	1,27 196	1,17 886
0,5	1,38 810	1,25 880
0,6	1,54 604	1,36 999
0,7	1,77 837	1,53 754
0,8	2,16 963	1,82 711
0,9	3,05 637	2,50 225
0,95	4,31 388	3,47 953
0,9999	96,272	76,461
$\eta_i^{\infty} = 1$	∞	∞

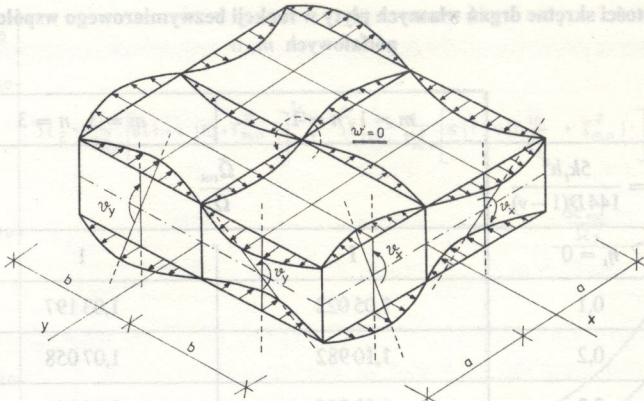
oraz po wykorzystaniu odwróconego związku (3.6) niniejszej pracy, prowadzi do następującego wzoru na dywergencję funkcji X_1 i Y_1 lub χ_x i χ_y

$$(5.4) \quad \phi = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} = \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y} = 0.$$

Z drugiej zaś strony przekształcone równanie ruchu płyty (3.1) przy $w = 0$ i $Z_2 = 0$ prowadzi do równania różniczkowego

$$(5.5) \quad \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{6(2-\nu)D}{h^3} \nabla^2 \phi - \frac{360(1-\nu)D}{h^5} \phi = 0.$$

Równanie to nie może określać jednak żadnych drgań, bowiem jak to wcześniej wykazano, $\phi = 0$ i nie istnieje w tym przypadku żadna dywergencyjna częstość drgań płyty. W cytowanej już pracy autora [1] zakradł się błąd w równaniu (3.25i). Rozważania i wzory od (3.25i) do (3.25p) są błędne. Również częstość



$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \frac{k_t h^3}{24(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left(\frac{5k_t h}{24G} - 1 \right) \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}$$

Rys. 10. Postać drgań skrętnych płyty odpowiadająca częstości $\tilde{\Omega}_2 = \tilde{\Omega}_{rot}$.

drgań podana wzorem (3.25t) jest pozbawiona sensu fizycznego bowiem takie drgania nie istnieją.

W zakończeniu tego punktu wskazuje się na inny możliwy wariant teorii obliczania płyty o średniej grubości na dwuparametrowym podłożu sprężystym typu Winklera. Wariant ten uważa się za ścisły. Założymy, że siły T_x^+ i T_y^+ są powiązane z reakcjami podłoża sprężystego w następujący sposób

$$(5.6) \quad \begin{bmatrix} T_x^+ \\ T_y^+ \end{bmatrix} = k_t \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \frac{k_t h}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w - \frac{k_t h^3}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}$$

Tak wyliczone siły T_α^+ , $\alpha = x, y$, należy podstawić do równań (2.1) a więc już na poziomie hipotezy kinematycznej uwzględnia się przyjęty do rozważań model podłoża. Tak sformułowany wariant teorii będzie prowadził do pięciu pasm częstości drgań własnych płyty i do sprzężenia stanu tarczowego ze stanem płytowym.

6. RÓWNANIA RUCHU PŁYTY NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM TYPU
 PASTERNAKA-WŁASOWA

Omawiane w punkcie 1 jednokierunkowe podłoże Pasternaka-Własowa różni się zasadniczo od przyjętego w pracy modelu podłoża Winklera w rozumieniu trójkierunkowym. W przypadku przyjętego w opracowaniu modelu podłoża Winklera warunki kontaktu płyty z podłożem zdefiniowane są w następujący sposób:

przemieszczenie pod płytą

$$(6.1) \quad \begin{aligned} w_d(x, y, t) &= w_p(x, y, t), \\ u_d(x, y, t) &= u_p(x, y, t), \\ v_d(x, y, t) &= v_p(x, y, t), \end{aligned}$$

gdzie indeksem d oznaczono przemieszczenia dolnej płaszczyzny ograniczającej płytę a indeksem p oznaczono przemieszczenie podłoża w płaszczyźnie styku z dolną powierzchnią ograniczającą płytę. Poza płytą jest $w_p = u_p = v_p = 0$, jak to wynika ze specyfiki modelu Winklera,

naprężeniowe pod płytą, $z = h/2$,

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \sigma_z^d &= -p_z = Z_2 = q - k_z w_d, & X_1 &= T_x^+, & Y_1 &= T_y^+, \\ \tau_{xz}^d &= -p_x = X_1 = -k_t u_d, \\ \tau_{yz}^d &= -p_y = Y_1 = -k_t v_d. \end{aligned}$$

gdzie q jest wektorem pionowych obciążeń zewnętrznych. Poza powierzchnią kontaktu płyty z podłożem naprężenia w podłożu są równe zero.

W przypadku płyty na podłożu sprężystym Pasternaka-Własowa warunki kontaktu płyty z podłożem są inne:

przemieszczeniowe pod płytą, $z = h/2$

$$(6.3) \quad \begin{aligned} w_d(x, y, t) &= w_p(x, y, t), \\ u_d(x, y, t) &\neq 0, & u_p(x, y, t) &= 0, \\ v_d(x, y, t) &\neq 0, & v_p(x, y, t) &= 0; \end{aligned}$$

przemieszczenie poza płytą

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_p(x, y, t) &\neq 0, & u_p &= v_p = 0, \\ K_t \nabla^2 \tilde{w}_p - k_z \tilde{w}_p &= 0; \end{aligned}$$

naprężenie pod płytą

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \sigma_z^d &= -p_z = Z_2 = q - k_z w_p + K_t \nabla^2 w_p, & K_t &\neq k_t, \\ \tau_{xz}^d &= -p_x = X_1 = 0, & X_1 &= T_x^+, & \tau_{xz}^p &\neq 0, \\ \tau_{yz}^d &= -p_y = Y_1 = 0, & Y_1 &= T_y^+, & \tau_{yz}^p &\neq 0; \end{aligned}$$

naprężenie poza płytą

$$(6.6) \quad \sigma_z^p = 0, \quad \tau_{xz}^p \neq 0, \quad \tau_{yz}^p \neq 0.$$

Równania ruchu płyty o średniej grubości na podłożu sprężystym Pasternaka-Własowa otrzymuje się z równań (3.1), (3.3) i (3.4) jeśli przyjąć $X_1 = Y_1 = 0$ oraz $Z_2 = q - k_z w + K_t \nabla^2 w$. Równania te można napisać w sposób następujący:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} & \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{17-6\nu}{60D(1-\nu)} \rho h^3 \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ & - \left[\frac{1}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 - \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (k_z w - K_t \nabla^2 w) = \\ & = \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)} \nabla^2 q + \frac{\rho h^5}{60D^2(1-\nu)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \\ & \nabla^2 \psi - \frac{10}{h^2} \psi - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \left[\nabla^2 - \frac{10}{h^2} - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{ -\frac{10}{h^2} \nabla^2 w + \frac{11\rho h}{6D(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{D(1-\nu)} [k_z w - K_t \nabla^2 w - q] \right\}. \end{aligned}$$

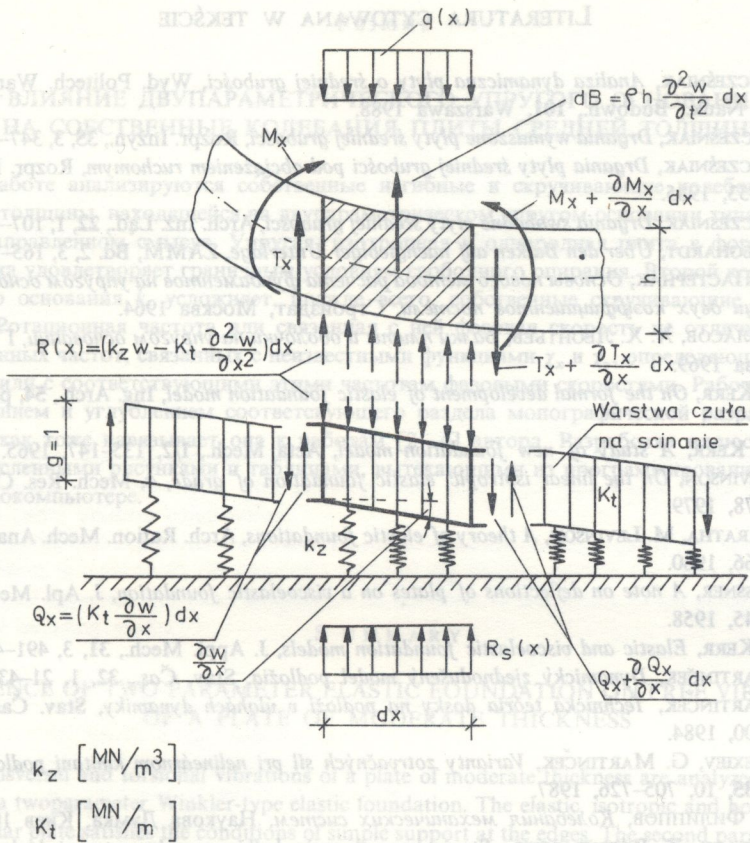
Poza powierzchnią kontaktu płyty z podłożem obowiązuje równanie

$$(6.8) \quad K_t \nabla^2 \check{w}_p - k_z \check{w}_p = 0.$$

Na rysunku 11 pokazano poglądowo element płyty zginany walcowo na tego typu podłożu sprężystym. Jak łatwo zauważyć komplet równań (6.7) jest inny od równań ruchu płyty na podłożu Winklera w rozumieniu trójkierunkowym, równania (3.1), (3.3) i (3.4). Równania ruchu płyty w obu modelach podłoża są te same jeśli założyć że, $k_t = K_t = 0$.

7. WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W płycie o średniej grubości spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym typu Winklera w rozumieniu trójkierunkowym istnieją dwa pasma częstości drgań własnych giętnych oraz jedno pasmo drgań własnych skrętnych. Częstość Ω_1 jako podstawowa jest zawsze mniejsza od częstości swobodnych drgań giętnych Ω_3 . Wniosek ten, jak nietrudno zauważyć, dotyczy również podłoża jednokierunkowego typu Pasternaka-Własowa. Podstawowa częstość Ω_1 jest również zawsze mniejsza od podstawowej częstości tej samej płyty ale obliczanej metodą klasyczną — płyta cienka, różnice są tym większe,



Rys. 11. Nieskończenie mały element płyty na podłożu sprężystym typu Pasternaka wraz z układem sił wewnętrznych działających w płycie i podłożu

im płyta jest grubsza oraz im wyższa jest częstość drgań. Częstości drgań własnych, giętnych płyty na podłożu sprężystym są zawsze większe niż częstości tej samej płyty ale nie spoczywającej na podłożu. Liczba Poissona ν wpływa zawsze na wszystkie częstości drgań własnych płyty. Wpływ funkcji χ_x i χ_y na poziome siły działające we wspólnej płaszczyźnie styku płyty z podłożem Winklera, może być pominięty w przypadku gdy współczynnik podłoża k_t lub μ_t jest mały. W przypadku podłoża gruntowego pominięcie wpływu tych funkcji, w przypadku stanu płytowego, na składowe reakcje podłoża X_1 i Y_1 nie wpływa albo w minimalnym stopniu na częstości swobodnych drgań skrętnych i giętnych. Przyjęta do szczegółowej analizy płyta o średniej grubości, swobodnie podparta ma ograniczone zastosowanie praktyczne. Tym niemniej analiza drgań własnych takiej płyty pozwala na pewne ważne uogólnienia i wnioski przenoszące się i na inne płyty o innych warunkach brzegowych, w szczególności na płytę o brzegach swobodnych, jako najbardziej interesujący praktyczny przypadek płyty.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. SZCZEŚNIAK, *Analiza dynamiczna płyty o średniej grubości*, Wyd. Politech. Warszawskiej, Prace Nauk., Budown., **101**, Warszawa 1988.
2. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania wymuszone płyty średniej grubości*, Rozpr. Inżyn., **35**, 3, 347–374, 1987.
3. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania płyty średniej grubości pod obciążeniem ruchomym*, Rozpr. Inżyn., **33**, 1, 37–53, 1985.
4. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania swobodne płyty średniej grubości*, Arch. Inż. Łąd., **22**, 1, 107–127, 1976.
5. K. WIEGHARDT, *Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage*, ZAMM, Bd. 2, 3, 165–184, 1922.
6. П. Л. ПАСТЕРНАК, *Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели*, Стройиздат, Москва 1964.
7. В. З. ВЛАСОВ, Х. Х. ЛЕОНТЬЕВ, *Балки плиты и оболочки на упругом основании*, ГУФМЛ, Москва 1969.
8. A. D. KERR, *On the formal development of elastic foundation model*, Ing. Arch., **54**, p. 455–464, 1984.
9. A. D. KERR, *A study of new foundation model*, Acta Mech., **1/2**, 135–147, 1965.
10. M. LEVINSON, *On the linear isotropic, elastic foundation of grade, 4*, Mech. Res. Com., **6**, p. 369–378, 1979.
11. S. BHARATHA, M. LEVINSON, *A theory of elastic foundations*, Arch. Ration. Mech. Anal., **74**, 3, 249–266, 1980.
12. E. REISSNER, *A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation*, J. Appl. Mech., **25**, 1, 114–145, 1958.
13. A. D. KERR, *Elastic and viscoelastic foundation models*, J. Appl. Mech., **31**, 3, 491–498, 1964.
14. G. MARTINČEK, *Dynamický zjednodušený model podložia*, Stav. Čas., **32**, 1, 21–43, 1984.
15. G. MARTINČEK, *Technická teória dosky na podloží v úlohách dynamiky*, Stav. Čas., **32**, 12, 885–900, 1984.
16. V. ALEXIEV, G. MARTINČEK, *Varianty zotrvačných síl pri nelineárnom kmitani podložia*, Stav. Čas., **35**, 10, 705–726, 1987.
17. А. П. ФИЛИППОВ, *Колебания механических систем*, Наукова Думка, Киев 1965.
18. R. BOGACZ, Z. ROZENBAJGIER, *Stacjonarne drgania belki na półprzestrzeni lepkosprężystej wywołane ruchomym obciążeniem*, Prace Nauk. Politech. Warszawskiej, Mechanika, **63**, Warszawa 1979.
19. R. BOGACZ, *On dynamics and stability of continuous systems subjected to a distributed moving load*, Ing. Arch., **53**, 243–255, 1983.
20. E. SZCZEPANIAK, *Wpływ sprężystej podatności podłoża na pracę opartej na nim płyty*, Księga Jubileuszowa Prof. dr inż. Witolda Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959.
21. R. ŚWITKA, *Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego*, Zesz. Nauk. Politech. Poznańskiej, Rozprawy nr 31, Poznań 1968.
22. Z. KAŹKOWSKI, *Płyty, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1980.
23. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Теория анизотропных пластин*, Наука, Москва 1987.
24. T. LEWIŃSKI, *On refined plate models based on kinematical assumptions*, Ing. Arch., **57**, 133, 1987.
25. T. LEWIŃSKI, *A note on recent developments in the theory of elastic plates with moderate thickness*, Rozpr. Inżyn., **34**, 4, 1986.
26. J. MOSSAKOWSKI, *O zastosowaniu podwójnych szeregów trygonometrycznych do obliczeń w teorii płyt*, Rozpr. Inżyn., **33**, 4, p. 503–518, 1985.
27. М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ, *Некоторые приближенные теории упругого основания*, Ученые записки МГУ, **46**, 1940.
28. M. HETÉNYI, *A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity*, J. Appl. Phys., **32**, 55–58, 1950.
29. W. URBANOWSKI, *Niektóre przypadki zginania płyty okrągłej połączonej z podłożem sprężystym o własnościach uogólnionych*, Zesz. Nauk. PW, Mechanika, **3**, 33–61, 1956.

РЕЗЮМЕ

ВЛИЯНИЕ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ
НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛИТЫ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

В работе анализируются собственные изгибные и скручивающие колебания плиты средней толщины, находящейся на двухпараметрическом упругом основании типа Винклера в трехнаправленном смысле. Упругая, изотропная и однородная плита в форме прямоугольника удовлетворяет граничным условиям свободного опирания. Второй коэффициент упругого основания k_2 усложняет, прежде всего, собственные скручивающие колебания плиты. Ротационная частота или связанная с ней фазовая скорость не отлична от двух сопряженных частот, связанных с неизвестными функциями χ_x и χ_y , определяющими сдвиг в плите или с соответствующими этими частотам фазовыми скоростями. Работа является расширением и углублением соответствующего раздела монографической разработки [1] автора, как тоже навязывает она к работам [2–4] автора. Разработка иллюстрирована многочисленными рисунками и таблицами, вытекающими из программирования решений на микрокомпьютере.

SUMMARY

INFLUENCE OF TWO-PARAMETER ELASTIC FOUNDATION ON FREE VIBRATIONS
OF A PLATE OF MODERATE THICKNESS

Transversal and torsional vibrations of a plate of moderate thickness are analyzed; the plate rests on a twoparameter Winkler-type elastic foundation. The elastic, isotropic and homogeneous rectangular plate satisfies the conditions of simple support at the edges. The second parameter k_2 of the elastic foundation influences mainly the torsional plate vibrations. The vibration frequency and the corresponding phase velocity are not different from the two conjugate frequencies connected with the unknown functions χ_x , χ_y , describing the shear, or from the respective phase velocities. The paper represents a generalization of the corresponding chapter of book [1] by this author, use being also made of papers [2–4]. The results are illustrated by several figures and numerical results.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 lutego 1988 r.

- λ scalar load parameter,
 λ_n value of λ at bifurcation mode number n ,
 λ_m maximum value of λ for imperfect stiffened plate,
 ξ_n amplitude of buckling mode number n ,
 ξ_m imperfection amplitude corresponding to ξ_n .

$$\sigma_n^* = \frac{\sigma_0 \cdot 10^3}{E} \quad \text{dimensionless stress of mode number } n.$$

- σ_0^* dimensionless limit stress,
 σ_n^* min (σ_1^*, σ_2^*) ,
 a_{ij} postbuckling coefficients (see Byrskov and Hutchinson [1]),
 d_1 a_{221} ,
 d_2 $a_{122} + a_{212}$.