

# IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA PĘTLI HISTEREZY W STANOWISKOWYCH BADANIACH SYMULACYJNYCH

WACŁAW GIERULSKI (KIELCE)

W pracy przedstawiono metody identyfikacji przydatne w stanowiskowych badaniach symulacyjnych, a także zaprezentowano metodę identyfikacji parametrycznej uwzględniającą nieliniowości typu histerezy. W metodzie tej wszystkie działania przeprowadzone są na sygnałach w dziedzinie czasu. Pokazano funkcje zależne od parametrów, umożliwiające identyfikację tego typu oraz przedstawiono przykład identyfikacji, w którym eksperyment rzeczywisty zastąpiono eksperymentem komputerowym.

## 1. WSTĘP

Podczas stanowiskowych badań symulacyjnych w laboratorium, na stanowisku badawczym odtwarzane są sygnały w wybranych punktach obiektu występujące w jego rzeczywistej eksploatacji [4,5,6]. Do wykonania tego zadania konieczne jest wyznaczenie przebiegów czasowych sygnałów wymuszających, realizowanych przez elementy wykonawcze stanowiska, co wymaga znajomości własności obiektu, rozumianych tutaj jako zależności pomiędzy sygnałami wymuszającymi a sygnałami wymuszonymi, mierzonymi w wybranych punktach obiektu. Wyznaczenie tych zależności metodami analitycznymi jest możliwe tylko dla prostych obiektów o własnościach liniowych. W rzeczywistych badaniach zachodzi konieczność wyznaczenia ich drogą identyfikacji na podstawie eksperymentów wykonywanych na stanowisku symulacyjnym. Często jest to identyfikacja własności dynamicznych obiektu wykazującego cechy różnego rodzaju nieliniowości.

Metody identyfikacji są szeroko rozwinięte w wielu dziedzinach techniki, np. w procesach sterowania i diagnostyce maszyn, jednak warunki i potrzeby identyfikacji dla stanowiskowych badań symulacyjnych określa ich specyfika. W badaniach tych identyfikacja prowadzona jest na podstawie ograniczonej ilości informacji o badanym obiekcie. Jednak dla potrzeb badań symulacyjnych nie ma konieczności przeprowadzania pełnej identyfikacji (identyfikacji struktury, mas, współczynników sztywności i tłumienia), wystarczy poznanie zależności między sygnałami wymuszonymi a wymuszającymi i to także często tylko dla sygnałów podobnych do sygnałów, na podstawie których przeprowadzona jest identyfikacja. Oczywiście pojęcie podobieństwa sygnałów nie jest tutaj możliwe do sprecyzowania, należy je traktować w sposób intuicyjny. Innym czynnikiem wyróżniającym identyfikację w stanowiskowych badaniach symulacyjnych jest brak ograniczeń co do prędkości identyfikacji, możliwe jest też stosowanie iteracyjnych metod identyfikacji, gdzie w każdym kroku iteracyjnym wykonywany jest eksperyment na stanowisku symulacyjnym.

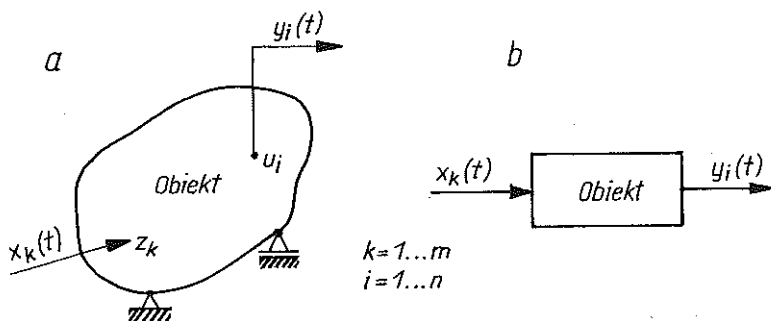
Mimo istnienia metod identyfikacji, z których część może być wykorzystywana dla celów stanowiskowych badań symulacyjnych, dostrzega się brak metod identyfikacji nieliniowych własności obiektów, szczególnie dla nieliniowości typu pętli histerezy.

W przedstawionej pracy zaproponowano pewne rozwiązanie umożliwiające identyfikację nieliniowości typu histerezy, operując jedynie sygnałami w dziedzinie czasu. Celem pracy jest wskazanie pewnych koncepcji i kierunków działania, a nie pełne rozwiązanie przedstawionego problemu.

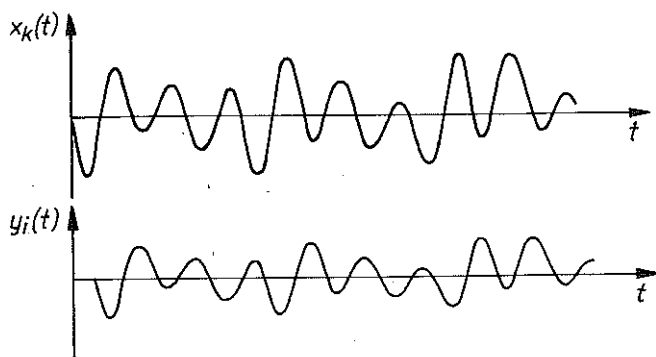
## 2. ANALIZA ISTNIEJĄCYCH METOD

Po umieszczeniu badanego obiektu na stanowisku symulacyjnym przeprowadzany jest eksperyment, podczas którego mierzone i rejestrowane są sygnały wymuszone w wybranych punktach obiektu (rys.1a). Sygnały wymuszające są to sygnały wejściowe, natomiast sygnały wymuszone są sygnałami wyjściowymi w rozważanym układzie (rys.1b).

Po wykonaniu eksperymentu dysponuje się przebiegami czasowymi sygnałów wymuszających i odpowiadających im sygnałów wymuszanych (rys.2).



Rys. 1 Eksperyment na stanowisku symulacyjnym.  $x_k(t)$  - sygnały wejściowe (wymuszające),  $y_i(t)$  - sygnały wyjściowe (wymuszane)



Rys. 2 Przykładowe przebiegi sygnałów

Funkcje  $x_k(t)$ ,  $y_i(t)$ , ze względu na ich jednokrotną lub możliwą do powtórzenia realizację, można traktować jako zdeterminowane, natomiast ze względu na niemożność ich analitycznego opisu można traktować jako losowe [2,3]. Identyfikacja ma za zadanie uzyskanie informacji o obiekcie, umożliwiającej przewidywanie sygnałów wymuszonych, będących odpowiedzią na działanie znanych sygnałów wymuszających (zagadnienie proste) oraz informacji umożliwiającej wyznaczenie sygnałów wymuszających, będących przyczyną znanych sygnałów wymuszanych (zagadnienie odwrotne).

Sposób przechowywania tej informacji zależy od sposobu przeprowadzenia identyfikacji. Na przykład mogą to być funkcje określone w dziedzinie czasu lub dziedzinie częstości, mogą to być charakterystyki (np. charakterystyki częstościowe) przedstawione w postaci tablic lub

wykresów. Rozwiązanie dokładne postawionego zadania jest trudne, a czasem wręcz niemożliwe dla rzeczywistych obiektów, ze względu na ich własności nieliniowe oraz trudny do wyeliminowania wpływ sygnałów zakłócających [3,6].

Ilość informacji zawarta w skończonych odcinkach sygnałów  $x_k(t), y_i(t)$  wykorzystywanych w procesie identyfikacji jest do tego celu zbyt mała. Możliwe jest natomiast rozwiązanie problemu identyfikacji w sposób przybliżony, a przybliżenie to będzie zależne od podobieństwa sygnałów wymuszających działających na obiekt do sygnałów, na podstawie których dokonano identyfikacji.

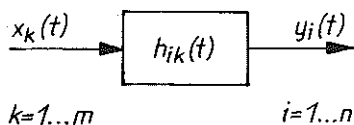
Obecnie stosowane metody identyfikacji dla potrzeb badań symulacyjnych stanowią przeniesienie metod identyfikacji układów liniowych na układy nieliniowe. Przyjmuje się, że w pewnym otoczeniu sygnałów użytych do identyfikacji układ jest liniowy, a więc że słuszna jest zasada superpozycji. Ze względu jednak na rzeczywistość występujące nieliniowe własności obiektu, prawidłowe rozwiązanie zagadnienia prostego lub odwrotnego wymaga stosowania procedur iteracyjnych. W każdym kroku iteracji na podstawie nowych sygnałów zmierzonych podczas przeprowadzanego eksperymentu dokonuje się identyfikacji własności obiektu. Wykonywanych jest tyle kroków iteracji, aby wymagane rozwiązanie zagadnienia prostego lub odwrotnego zawarte było w przyjętym obszarze liniowych własności obiektu.

Stosowane metody identyfikacji można podzielić na dwie grupy. Jedną grupę stanowią metody, których wszystkie operacje przeprowadzane są w dziedzinie czasu, do drugiej grupy należą metody, w których operacje przeprowadzane są w dziedzinie częstości. Dla metod z pierwszej grupy zależność między sygnałami wejściowymi a wyjściowymi, po wprowadzeniu charakterystyk impulsowych (rys.3) [2,6,3], opisuje całka splotu w postaci:

$$(2.1) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^m \int_0^t x_k(\varphi) h_{ik}(t - \varphi) d\varphi,$$

gdzie  $h_{ik}(t)$  oznacza charakterystyki impulsowe.

Nie są jednak znane efektywne metody identyfikacji charakterystyk impulsowych, możliwe do zastosowania w stanowiskowych badaniach symulacyjnych. Nawet gdyby takie istniały, to zależność (2.1) jest bardzo niedogodna do rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Oryginalna metoda identyfikacji, w zastosowaniu do badań symulacyjnych, jest przed-



Rys. 3 Zależność sygnałów w dziedzinie czasu

stawiona w pracy [7]. Zastąpiona tam zależność (2.1) związkiem (2.2), zakładając ich równość. Założono więc, że każdy sygnał wyjściowy

$$(2.2) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^m g_{ik}(t)x_k(t)$$

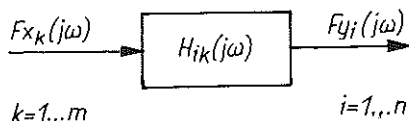
jest kombinacją liniową sygnałów wejściowych, a współczynniki  $g_{ik}(t)$  są zmienne w czasie. Współczynniki te są wyznaczane z warunków minimalizacji funkcjonału będącego miarą różnic sygnałów wyjściowych, mierzonych podczas eksperymentu na stanowisku oraz obliczonych ze wzoru (2.2). Dla układów o własnościach liniowych współczynniki  $g_{ik}$  są stałe, nie zależą od czasu. Natomiast dla obiektów nieliniowych informacja o jego własnościach zawarta we współczynnikach  $g_{ik}(t)$  jest prawdziwa tylko dla sygnałów dostatecznie bliskich tym, które posłużyły do identyfikacji. Wymagane jest więc stosowanie procedur iteracyjnych. Dużą zaletą tej metody jest jej efektywność wynikająca z łatwości rozwiązywania zagadnienia prostego lub odwrotnego.

Dokonując transformacji Fouriera lewej i prawej strony równania (2.1), otrzymuje się zależność (2.3) będącą podstawą metod identyfikacji należących do drugiej grupy, (rys.4).

$$(2.3) \quad Fy_i(j\omega) = \sum_{k=1}^m H_{ik}(j\omega)Fx_k(j\omega),$$

gdzie  $Fy_i(j\omega)$ ,  $Fx_k(j\omega)$  oznaczają transformanty Fouriera sygnałów  $y_i(t)$ ,  $x_k(t)$  oraz  $H_{ik}(j\omega)$  - charakterystyki częstotściowe obiektu.

Identyfikacja polega na wyznaczeniu charakterystyk częstotściowych obiektu  $H_{ik}(j\omega)$ . Wyznacza się je z warunków minimalizacji funkcjonału będącego miarą różnic transformat Fouriera sygnałów zmierzonych podczas eksperymentu oraz wyliczonych ze wzoru (2.3) [4,8,6]. Uzależnienie charakterystyk częstotściowych tylko od częstotści wymaga stosowania procedur iteracyjnych podczas rozwiązywania zagadnienia prostego lub odwrotnego dla obiektów o własnościach nieliniowych. Uzależnienie tych



Rys. 4 Zależność sygnałów w dziedzinie częstości

charakterystyk ponadto od amplitudy sygnałów pozwala na uniknięcie stosowania procedur iteracyjnych lub zmniejszenie liczby potrzebnych kroków iteracyjnych [1].

### 3. IDENTYFIKACJA PARAMETRYCZNA PĘTLI HISTEREZY

W poprzednio przedstawionych metodach, uzyskana w procesie identyfikacji informacja o własnościach obiektu przechowywana jest w postaci funkcji zależnych od czasu lub funkcji zależnych od częstości. Nie uwzględniana jest natomiast zależność zmian własności układu od jego historii, czyli od wcześniejszych przebiegów sygnałów. Funkcja uwzględniająca tę przeszłość określałaby histerezę układu, rozumianą jako zależność stanu układu od stanów poprzednich. Funkcja taka musi więc posiadać cechy pamięci. Przewidując lub raczej zakładając postać tej funkcji zależną od parametrów (3.1)

$$(3.1) \quad y_i(t) = f_i[\tilde{x}_k(t, \tau), \lambda_{k\nu}], \quad k = 1 \dots m, \quad \nu = 1 \dots \mu,$$

gdzie  $x_k(t, \tau)$  oznacza wartości sygnałów  $x_k(t)$  w przedziale  $\langle t - \tau, t \rangle$ ,  $\tau$ - zasięg pamięci,  $\lambda_{k\nu}$ - parametry funkcji,  $\mu$ - liczbę parametrów oraz  $f_i(\cdot)$ - złożoną funkcję czasu, można zagadnienie identyfikacji sprowadzić do zagadnienia minimalizacji funkcjonału jakości, ze względu na poszukiwane wartości parametrów  $\lambda_{k\nu}$ . Gdy miarą jakości będą kwadraty różnic między sygnałami zmierzonymi podczas eksperymentu  $y_i^*(t)$  oraz wyliczonymi z równania (3.1) w przedziale czasu  $\langle t_1, t_2 \rangle$ , funkcjonał jakości przyjmie postać:

$$(3.2) \quad I(\lambda_{k\nu}) = \frac{1}{I_0} \int_{t_1}^{t_2} [y_i^*(t) - y_i(t)]^2 dt = \frac{1}{I_0} \int_{t_1}^{t_2} \{y_i^*(t) - f_i[\tilde{x}_k(t, \tau), \lambda_{k\nu}]\}^2 dt,$$

gdzie funkcjonal odniesienia  $I_0$  ma postać:

$$(3.3) \quad I_0 = \int_{t_1}^{t_2} [y_i^*(t)]^2 dt.$$

Minimalizacja funkcjonału (3.2) może być przeprowadzona numerycznie, gdzie w komputerze, korzystając z programów optymalizacyjnych, wyznacza się wartości parametrów  $\lambda_{k\nu}$  zapewniających minimum funkcjonału. Dla pewnych postaci funkcjonału (3.1) możliwe jest wykonanie zadania minimalizacji poprzez rozwiązanie równań (3.4) będących warunkami jego minimalizacji

$$(3.4) \quad \frac{\partial I(\lambda_{k\nu})}{\partial \lambda_{k\nu}} = 0 \quad k = 1 \dots m, \quad \nu = 1 \dots \mu.$$

W celu rozwiązania zagadnienia konieczne jest przedstawienie propozycji funkcji określających histerezę (3.1). Jedną z możliwości jest wykorzystanie funkcji jednej zmiennej, opisujących zjawisko histerezy. W tym celu przedstawimy sygnał wyjściowy  $y_i(t)$  jako złożoną funkcję sygnałów wejściowych, przy czym funkcje wewnętrzne w tym złożeniu zależne są tylko od pojedynczych sygnałów wejściowych

$$(3.5) \quad y_{ik}(t) = f_{ik}[\tilde{x}_k(t, \tau), \lambda_{k\nu}] \quad \nu = 1 \dots \mu,$$

gdzie  $y_{ik}(t)$  oznacza wydzieloną część sygnału  $y_i(t)$  (funkcja wewnętrzna) zależną tylko od  $\tilde{x}_k(t, \tau)$ , a sygnał wyjściowy jest funkcją tych wydzielonych sygnałów

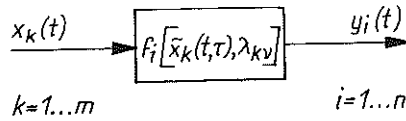
$$(3.6) \quad y_i(t) = \tilde{f}_i[y_{ik}(t)].$$

Funkcja  $\tilde{f}_i(\cdot)$  może być nieliniowa. Aproksymując ją wielomianem, otrzymamy

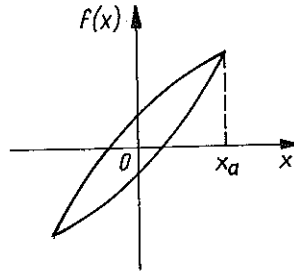
$$(3.7) \quad y_i(t) = \sum_{k=1}^m a_{ik} y_{ik}(t) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_{ikl} y_k(t) y_l(t) + \\ + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m a_{iklj} y_k(t) y_l(t) y_j(t) + \dots,$$

gdzie  $a_{ik}$ ,  $a_{ikl}$ ,  $a_{iklj}$  oznaczają współczynniki wielomianu aproksymującego.

Podczas minimalizacji funkcjonału (3.2) należy także wyznaczyć wartości współczynników wielomianu aproksymującego  $a_{ik}$ ,  $a_{ikl}$  .... Funkcje



Rys. 5 Funkcje z pamięcią



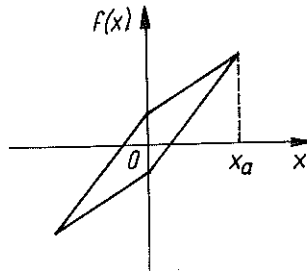
Rys. 6 Pętla histerezy dla hipotezy Panowa

określające pętle histerezy są znane, stosowane do opisu własności materiałów. Na przykład funkcje dla harmoniczných sygnałůw wejściowych mają postać [5]:

pętla histerezy według hipotezy Panowa (rys.6)

$$(3.8) \quad f(x) = \lambda_1 x \pm \lambda_2 x_a \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_a} \right)^2 \right],$$

pętla histerezy odcinkami liniowa (rys.7)



Rys. 7 Pętla histerezy odcinkami liniowa

$$(3.9) \quad f(x) = \lambda_1 x \pm \lambda_2 x_a \left( 1 - \frac{x}{x_a} \right),$$



gdzie  $x_a$  oznacza maksymalną wartość sygnału  $x(t)$ , a  $\lambda_1, \lambda_2$  - parametry pętli histerezy.

Znaki  $\pm$  w (3.8), (3.9) odpowiadają górnej i dolnej gałęzi pętli histerezy. Funkcje w postaci (3.8), (3.9) opisują pętle histerezy tylko dla harmoniczných sygnałów wejściowych. Dla dowolnych przebiegów sygnałów wejściowych można zaproponować funkcje powstałe z nich przez przesunięcie układu współrzędnych, zależne od wcześniejszych wartości sygnałów. Dla pętli histerezy (3.8):

$$(3.10) \quad f(x) = \lambda_1(x - x_0) + y_0 \pm \lambda_2(x_a - x_0) \left[ 1 - \frac{(x - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \right],$$

dla pętli histerezy (3.9):

$$(3.11) \quad f(x) = \lambda_1(x - x_0) + y_0 \pm \lambda_2(x_a - x_0) \left[ 1 - \frac{(x - x_0)}{(x_a - x_0)} \right],$$

a przesunięcie układu współrzędnych wynosi

$$(3.12) \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_a + x_b),$$

$$(3.13) \quad y_0 = f(x_a) - \lambda_1(x_a - x_0),$$

gdzie  $x_a$  oznacza wartość ostatniego ekstremum funkcji  $x(t)$  oraz  $x_b$  - wartość przedostatniego ekstremum funkcji  $x(t)$ .

W przedstawionych funkcjach pamięć jest ograniczona do dwóch ostatnich ekstremów sygnału wejściowego  $x(t)$ . Tak więc za każdym razem po osiągnięciu przez sygnał  $x_k(t)$  kolejnego ekstremum zmieniają się wartości  $x_0, y_0$  (rys.8). Uwzględniając, że sygnał wejściowy jest funkcją czasu, zależność (3.5) po uwzględnieniu (3.10) przyjmuje postać

$$(3.14) \quad y_{ik}(t) = \lambda_{1ik}[x_k(t) - x_{0k}] + y_{0k} \pm \lambda_{2ik}(x_{ak} - x_{0k}) \left\{ 1 - \frac{[x_k(t) - x_{0k}]^2}{[x_{ak} - x_{0k}]^2} \right\},$$

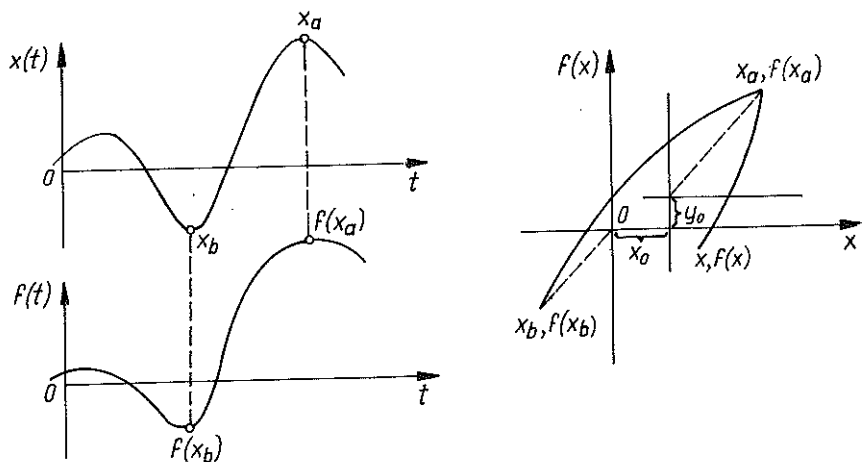
lub po uwzględnieniu (3.11)

$$(3.15) \quad y_{ik}(t) = \lambda_{1ik}[x_k(t) - x_{0k}] + y_{0k} \pm \lambda_{2ik}(x_{ak} - x_{0k}) \left\{ 1 - \frac{x_k(t) - x_{0k}}{x_{ak} - x_{0k}} \right\}$$

oraz

$$(3.16) \quad x_{0k} = \frac{1}{2}(x_{ak} + x_{bk}),$$

$$(3.17) \quad y_{0k} = y_{ik}(x_{ak}) - \lambda_2(x_{ak} - x_{0k}).$$



Rys. 8 Zmodyfikowana pętla histerezy

## 4. ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Ograniczając wielomian aproksymujący funkcję (3.7) tylko do składników liniowych możliwe jest uzyskanie rozwiązania zagadnienia w postaci analitycznej. Funkcjonał (3.2) dla pętli histerezy (3.14), po uwzględnieniu (3.17), przyjmuje postać:

$$(4.1) \quad I_i(\lambda_{1ik}, \lambda_{2ik}) = \frac{1}{I_0} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ y_i^*(t) - \sum_{k=1}^m \left[ \lambda_{1ik}(x_k(t) - x_{ak}) + y_{ak} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_k \lambda_{2ik}(x_{ak} - x_{0k}) \left[ 1 - \frac{(x_k(t) - x_{0k})^2}{(x_{ak} - x_{0k})^2} \right] \right] \right\}^2 dt.$$

Ze względu na liniowość (3.14) względem parametrów  $\lambda_1, \lambda_2$  przyjęto wartości współczynników wielomianu  $a_{ik} = 1$ . Wprowadzono także zamiast znaków  $\pm$  parametr  $\mu_k$ , który przyjmuje następujące wartości:

$\mu_k = 1$  w przedziałach, w których funkcja  $x_k(t)$  jest rosnąca,

$\mu_k = -1$  w przedziałach, w których funkcja  $x_k(t)$  jest malejąca,

Po podstawieniu (4.1) do (3.4) otrzymuje się układ równań liniowych ze względu na parametry  $\lambda_{1ik}, \lambda_{2ik}$ , którego rozwiązanie w postaci macierzowej jest następujące:

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} \lambda_{1i\nu} \\ \lambda_{2i\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\nu k}^{11} & A_{\nu k}^{12} \\ A_{\nu k}^{21} & A_{\nu k}^{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{\nu}^1 \\ B_{\nu}^2 \end{bmatrix}, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, m,$$

gdzie poszczególne macierze cząstkowe występujące w (4.2) wynoszą:

$$(4.3) [A_{\nu k}^{11}] = \left[ \int_{t_1}^{t_2} (x_k(t) - x_{ak})(x_\nu(t) - x_{a\nu}) dt \right],$$

$$(4.4) [A_{\nu k}^{12}] = \left[ \int_{t_1}^{t_2} \mu_k(x_{ak} - x_{0k}) \left\{ 1 - \frac{(x_k(t) - x_{0k})^2}{(x_{ak} - x_{0k})^2} \right\} (x_\nu(t) - x_{a\nu}) dt \right],$$

$$(4.5) [A_{\nu k}^{21}] = \left[ \int_{t_1}^{t_2} (x_k(t) - x_{ak}) \mu_\nu(x_{a\nu} - x_{0\nu}) \left\{ 1 - \frac{(x_\nu(t) - x_{0\nu})^2}{(x_{a\nu} - x_{0\nu})^2} \right\} dt \right],$$

$$(4.6) [A_{\nu k}^{22}] = \left[ \int_{t_1}^{t_2} \mu_k(x_{ak} - x_{0k}) \left\{ 1 - \frac{(x_k(t) - x_{0k})^2}{(x_{ak} - x_{0k})^2} \right\} \mu_\nu(x_{a\nu} - x_{0\nu}) \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 - \frac{(x_\nu(t) - x_{0\nu})^2}{(x_{a\nu} - x_{0\nu})^2} \right\} dt \right],$$

$$(4.7) [B_\nu^1] = \left[ \int_{t_1}^{t_2} (y_i^*(t) - y_{a\nu})(x_\nu(t) - x_{0\nu}) dt \right],$$

$$(4.8) [B_\nu^2] = \left[ \int_{t_1}^{t_2} (y_i^*(t) - y_{a\nu}) \mu_\nu(x_{a\nu} - x_{0\nu}) \left\{ 1 - \frac{(x_\nu(t) - x_{0\nu})^2}{(x_{a\nu} - x_{0\nu})^2} \right\} dt \right],$$

W zależności (4.2) symbolem  $[ ]^{-1}$  oznaczono odwracanie macierzy. Na przykład dla jednego sygnału wejściowego  $m = 1$  otrzymamy

$$(4.9) \lambda_1 = \frac{L_1}{M},$$

$$(4.10) \lambda_2 = \frac{L_2}{M},$$

gdzie

$$(4.11) M = \int_{t_1}^{t_2} [(x(t) - x_a)^2 dt \int_{t_1}^{t_2} (x_a - x_0)^2 \left[ 1 - \frac{(x(t) - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \right]^2 dt - \\ - \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \mu(x(t) - x_a)(x_a - x_0) \left[ 1 - \frac{(x(t) - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \right] dt \right\}^2],$$

$$(4.12) L_1 = \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t) - y_0][x(t) - x_a] dt \int_{t_1}^{t_2} (x_a - x_0)^2 \left[ 1 - \frac{(x(t) - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \right]^2 dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t) - y_0] \mu(x_a - x_0) \left[ 1 - \frac{(x(t) - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \right] dt \times \\ \times \int_{t_1}^{t_2} [(x(t) - x_a) \mu(x_a - x_0) \left[ 1 - \frac{(x(t) - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \right] dt],$$

$$(4.13) \quad L_2 = \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - x_a]^2 dt \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t) - y_a] \mu(x_a - x_0) [1 -$$

$$(4.14)$$

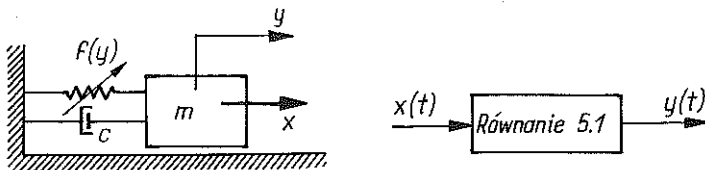
$$\begin{aligned} & - \frac{(x(t) - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \Big] dt - \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - x_a] \mu(x_a - x_0) \left[ 1 - \frac{(x(t) - x_0)^2}{(x_a - x_0)^2} \right] dt \times \\ & \times \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t) - y_a] [x(t) - x_a] dt, \end{aligned}$$

$$(4.15) \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_a - x_b).$$

Jednym z zastosowań przedstawionej metody identyfikacji, gdy  $m = 1, n = 1$  (4.9) - (4.14), jest określenie histerezy wynikającej z tłumienia wewnętrznego materiału. Wtedy miejsce sygnałów  $x, y$  przyjmują naprężenia oraz odkształcenia materiału  $(\sigma, \varepsilon)$ .

## 5. PRZYKŁAD IDENTYFIKACJI

W przedstawionym przykładzie eksperyment rzeczywisty na stanowisku symulacyjnym zastąpiono eksperymentem komputerowym. Obiekt stanowi układ drgający o jednym stopniu swobody z nieliniowym elementem sprężystym (rys.9).



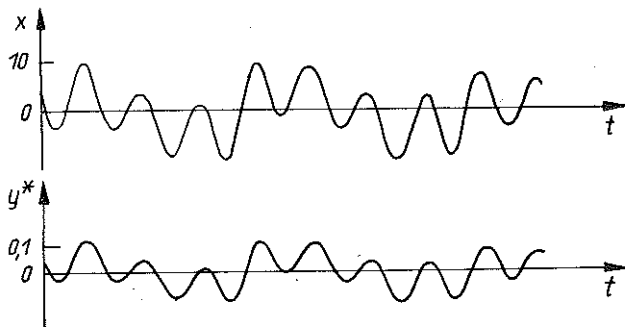
Rys. 9 Przykładowy obiekt

Modelem matematycznym analizowanego obiektu jest równanie różniczkowe w postaci:

$$(5.1) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + k_1y^3 = x,$$

gdzie  $x(t)$  oznacza siłę wymuszającą (sygnał wejściowy),  $y(t)$  - przemieszczenie masy (sygnał wyjściowy),  $m$  - masa (5 kg),  $c$  - współczynnik tłumienia ( $50 \frac{Ns}{m}$ ) oraz  $k, k_1$  - współczynniki sprężystości ( $100 \frac{N}{m}, 10 \frac{N}{m^3}$ ).

Wykonanie eksperymentu polega na rozwiązaniu równania (5.1), czyli na wyznaczeniu  $y(t)$  przy danym sygnale wymuszającym  $x(t)$ . Sygnały z eksperymentu  $x(t)$ ,  $y^*(t)$  (rys.10) posłużyły do obliczenia parametrów pętli histerezy według wzorów (4.9) - (4.14).



Rys. 10 Sygnały z eksperymentu dla identyfikacji

Wynoszą one odpowiednio

$$(5.2) \quad \lambda_1 = 0.009 \frac{m}{N},$$

$$(5.3) \quad \lambda_2 = 0.001 \frac{m}{N}.$$

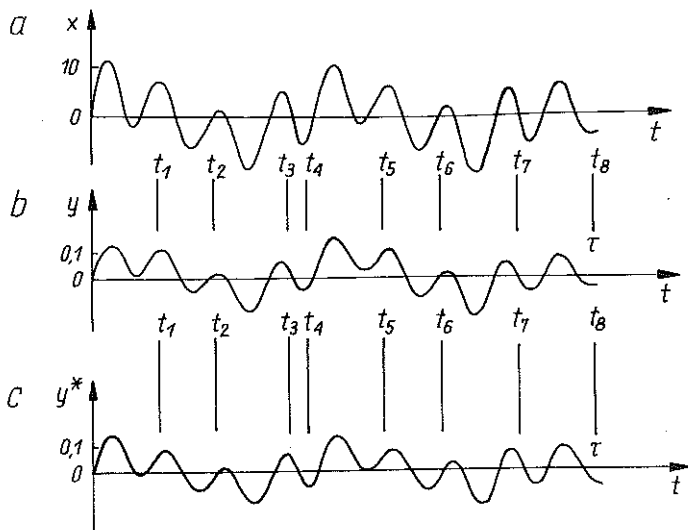
Dla tak zidentyfikowanej pętli histerezy wyznaczono sygnał wymuszony  $y(t)$  (rys.11a) dla wybranego sygnału wymuszającego  $x(t)$  (rys.11b).

W celu weryfikacji otrzymanego wyniku wykonano eksperyment (rozwiązano równanie (5.1)) dla tego samego sygnału wymuszającego. Umożliwia to porównanie przebiegów sygnałów w funkcji czasu (rys.11c) oraz porównanie kształtów fragmentów pętli histerezy (rys.12) dla rozwiązania dokładnego (eksperyment) oraz obliczonego dla parametrów pętli histerezy (5.2), (5.3).

Dla rozważanego przypadku wyznaczono błąd będący miarą różnic między sygnałem z eksperymentu  $y^*(t)$  oraz obliczeń  $y(t)$  w przedziale czasu  $\tau \in \langle 0, \tau \rangle$

$$(5.4) \quad \delta = \frac{\int_0^\tau [y^*(t) - y(t)]^2 dt}{\int_0^\tau [y^*(t)]^2 dt}.$$

Dla przedstawionego przykładu wartość błędu wynosi 8.63%.



Rys. 11 Sygnały z obliczeń

## 6. ZAGADNIENIE ODWROTNE

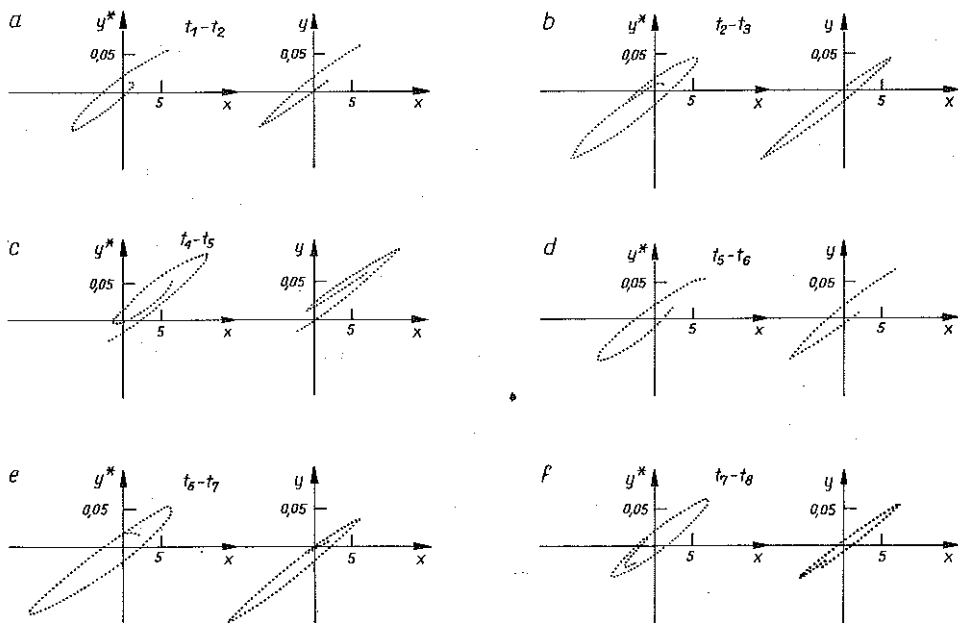
W zagadnieniu odwrotnym wyznacza się przebiegi czasowe sygnałów wymuszających  $x(t)$  dla przyjętych sygnałów wymuszonych  $y(t)$ . Dla rozwiązania tego zadania wymagana jest znajomość jednoznacznej zależności między sygnałami w postaci:

$$(6.1) \quad x_k(t) = F_k[\tilde{y}_i(t)], i = 1, \dots, n$$

dla każdego  $k = 1 \dots m$ .

Wyznaczenie (6.1) jako funkcji odwrotnych do (3.1) teoretycznie jest możliwe tylko w przypadku, gdy liczba sygnałów wymuszających jest równa liczbie sygnałów wymuszanych ( $m = n$ ). Dla przypadku gdy  $m > n$  zadanie posiada wiele rozwiązań, a jedno z nich można wybrać po przyjęciu jako znane  $m - n$  sygnałów wymuszających. Dla  $m < n$  zadanie jest nierozwiązywalne. Ze względu jednak na nieliniową postać funkcji (3.1) wyznaczenie funkcji odwrotnych często jest w praktyce bardzo skomplikowane lub wręcz niewykonalne.

Możliwe jest uniknięcie trudności z wyznaczeniem funkcji odwrotnych przez odpowiednie postępowanie w procesie identyfikacji. Traktując proces identyfikacji jako formalne wyznaczenie zależności

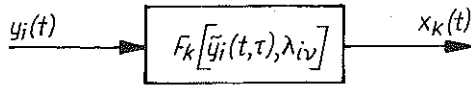


Rys. 12 Fragmenty pętli histerezy (a,b,c,d,e,f)

między sygnałami  $x(t)$  oraz  $y(t)$  można założyć postać funkcji odwrotnej zależną od parametrów w postaci odwrotnej do (3.1)

$$(6.2) \quad x_k(t) = F_k[\tilde{y}_i(t, \tau), \lambda_{iv}], \quad \nu = 1, \dots, \mu, \quad k = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dalsze postępowanie należy prowadzić w sposób przedstawiony w poprzednich rozdziałach (rozdz. 3,4), zamieniając odpowiednio sygnały, traktując sygnały wymuszone jako wejściowe, a wymuszające jako wyjściowe (rys.13).



Rys. 13 Sygnały w zagadnieniu odwrotnym

## 7. UWAGI KOŃCOWE

Pewną niedogodność w stosowaniu przedstawionej metody stanowi konieczność jednoczesnej rejestracji wszystkich sygnałów wejściowych i wyjściowych w układzie. Nawet niewielkie przesunięcia fazowe wynikające z niedoskonałości pomiaru i rejestracji sygnałów mogą znacznie wpłynąć na otrzymane wyniki. Uwaga ta odnosi się także do innych metod, w których identyfikację przeprowadza się na podstawie przebiegów czasowych sygnałów [7,3]. Jednak obecna technika pomiarowa umożliwia spełnienie wymaganego warunku dokładności pomiaru. Oprócz identyfikacji dla badań symulacyjnych metoda ta może być stosowana do określenia tłumienia wewnętrznego materiałów i wtedy jest tylko jeden sygnał wejściowy i jeden wyjściowy, co w znacznym stopniu upraszcza obliczenia i zmniejsza ich ilość.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A.BARWICKI, *Metoda odtwarzania przebiegu nieliniowych charakterystyk układu mechanicznego*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, Warszawa 1981.
2. J.S.BENDAT, A.G.PIERSOL, *Metody analizy i pomiarów sygnałów losowych*, PWN, Warszawa 1976.
3. P.EYKOFF, *Identyfikacja w układach dynamicznych*, PWN, Warszawa 1980.
4. W.GIERULSKI, *Synteza sygnałów wymuszających w badaniach stanowiskowych*, Rozpr.Inżyn., **37**, 1, 1989.
5. W.GIERULSKI, *Energy dissipation in a bar made of small damping material*, Arch.Bud.Maszyn, **3**, 1988.
6. J.OSIECKI, *Symulacja rzeczywistych obciążeń samochodu, jego zespołów i elementów na stanowiskach badawczych*, Prace PIMOT, Warszawa 1979.
7. A.J.POPŁAWSKI, *Zastosowanie rachunku wariacyjnego do rozwiązania zagadnienia identyfikacji i pomiaru*, Rozpr.Inżyn., Warszawa 1987.
8. J.WICHER, *Problemy identyfikacji systemów technicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów mechanicznych*, Praca habilit., IPPT PAN, Warszawa 1975.



## Резюме

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА В  
ИМИТАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ НА УСТАНОВКАХ

В работе представлены методы идентификации, пригодные в имитационных исследованиях на установках, а также представлен метод параметрической идентификации, учитывающий нелинейность типа гистерезиса. В этом методе все действия проведены на сигналах в области времени. Показаны функции зависящие от параметров, дающие возможность идентификации этого типа, а также представлен пример идентификации, в котором реальный эксперимент заменен компьютерным экспериментом.

## SUMMARY

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF THE HYSTERESIS LOOP IN SIMULATION  
TESTS

The identification methods applicable to simulation tests are proposed, including the parametric identification method accounting for the hysteresis-type nonlinearities. According to the method proposed, all operations are performed in the domain of time. The parameter-dependent functions are given which make such identification possible, and an example of the identification procedure is presented in which the actual experiment is replaced with a computer experiment.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 czerwca 1989 r.*

---